

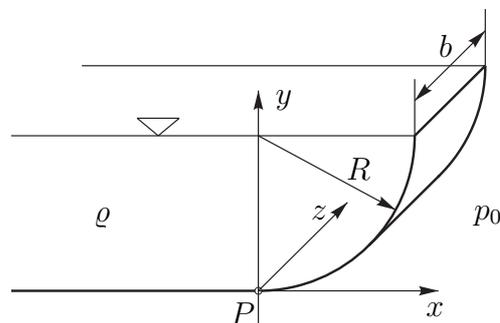
# Kapitel 1

## Hydrostatik

### 1.1 Flüssigkeitsdruck auf zylindrisch gekrümmte Wand.

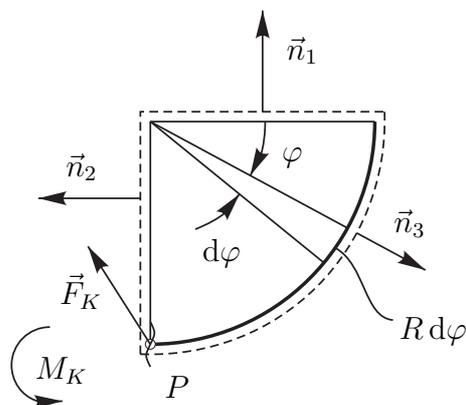
Eine gekrümmte Wand trennt, wie in der Skizze gezeigt, eine Flüssigkeit der Dichte  $\rho$  von der umgebenden Luft (Druck  $p_0$ ).

Berechnen Sie den Betrag und den Angriffspunkt der von den Fluiden auf die Wand wirkenden Kraft  $\vec{F}_{Fl}$ . Der Kraftangriffspunkt ist jener (fiktive) Punkt in dem eine gesuchte Kraft bzw. Gegenkraft momentenfrei ansetzt, um die Gleichgewichtsbedingungen für Kräfte und Momente zu erfüllen.



#### 1.1.1 Kraft $\vec{F}_{Fl}$

##### Kontrollvolumen 1



$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{n}_3 = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix}$$

**Impulsbilanz IB**

(2.13)+(2.14):

$$\oint_{\partial \text{KV}} \varrho v_n \vec{v} dO + \oint_{\partial \text{KV}} p \vec{n} dO = \int_{\text{KV}} \varrho \vec{g} dV + \Sigma \vec{F}_K$$

$$\begin{aligned} \oint_{\partial \text{KV}} \varrho v_n \vec{v} dO & \dots \text{konvektiver Term} & \text{hier: } = 0 \\ \oint_{\partial \text{KV}} p \vec{n} dO & \dots \text{Druckterm} \\ \int_{\text{KV}} \varrho \vec{g} dV & \dots \text{Schwerkraftterm} \\ \Sigma \vec{F}_K = \vec{F}_K & \dots \text{Kraft auf das KV - Schnittkraft} & \text{hier: } \vec{F}_K = -\vec{F}_{Fl} \end{aligned}$$

**Druckterm**

$$\oint_{\partial \text{KV}} p \vec{n} dO = \int_{A_1} p_0 \vec{n}_1 dO + \int_{A_2} p(y) \vec{n}_2 dO + \int_{A_3} p_0 \vec{n}_3 dO$$

$$\int_{A_1} p_0 \vec{n}_1 dO = p_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \int_{A_1} dO = p_0 b R \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

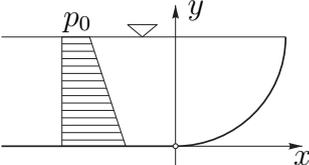
$$\int_{A_2} p(y) \vec{n}_2 dO = \text{siehe Kasten „Hydrostatische Druckverteilung“}$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^R [p_0 + \rho g (R - y)] \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} b dy \\ &= b \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \left[ \int_0^R p_0 dy + \rho g \int_0^R (R - y) dy \right] \\ &= b \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \left[ p_0 R + \rho g \left( R \cdot R - \frac{R^2}{2} \right) \right] \\ &= b R \left( p_0 + \rho g \frac{R}{2} \right) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\int_{A_3} p_0 \vec{n}_3 dO = p_0 \int_0^{\pi/2} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix} bR d\varphi = p_0 bR \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

**Hydrostatische Druckverteilung**  
 Bewegungsgleichung (3.5)

$$v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} - g$$

$$\Rightarrow p(y) = p_0 + \rho g (R - y)$$


$$\Rightarrow \oint_{\partial KV} p \vec{n} dO = \rho g b \frac{R^2}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

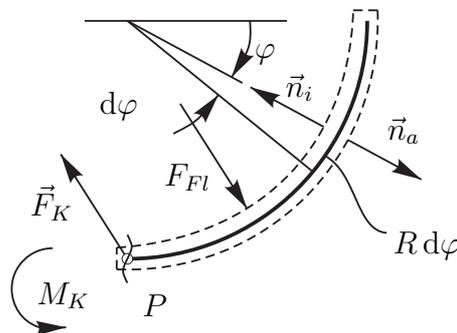
Man sieht, der Umgebungsdruck hat keinen Einfluß.

**Schwerkraftterm**

$$\int_{KV} \rho \vec{g} dV = \rho g \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \int_{KV} dV = -\rho g b \frac{R^2 \pi}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_K = \rho g b \frac{R^2}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = -\vec{F}_{Fl}$$

**Alternatives Kontrollvolumen 2**



$$\vec{n}_a = \vec{n}_3 = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix} \quad \vec{n}_i = -\vec{n}_a = -\vec{n}_3 = \begin{pmatrix} -\cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

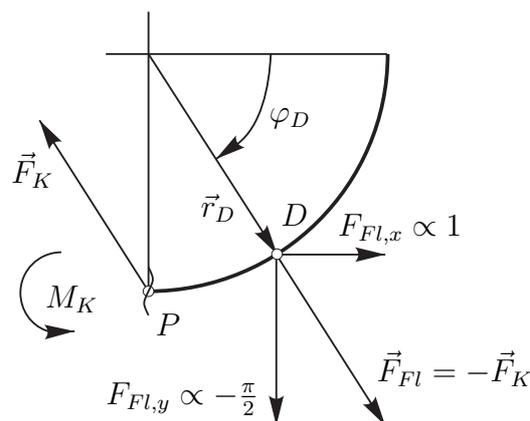
## Impulsbilanz

$$\begin{aligned}
\underbrace{\oint_{\partial \text{KV}} \varrho v_n \vec{v} dO}_{=0} + \underbrace{\oint_{\partial \text{KV}} p \vec{n} dO}_{=0} &= \underbrace{\int_{\text{KV}} \varrho \vec{g} dV}_{=0} + \vec{F}_K \\
\oint_{\partial \text{KV}} p \vec{n} dO &= \int_{A_1} p_0 \vec{n}_a dO + \int_{A_2} p(\varphi) \vec{n}_i dO \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} p_0 \vec{n}_3 b R d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^0 p(\varphi) (-\vec{n}_3) b R (-d\varphi) \\
&= bR \left[ p_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix} d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( p_0 + \varrho g \underbrace{(R-y)}_{R \sin \varphi} \right) \begin{pmatrix} -\cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} d\varphi \right] \\
&= \varrho g b R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cos \varphi \\ \sin^2 \varphi \end{pmatrix} d\varphi \\
&= \frac{1}{2} \varrho g b R^2 \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \vec{F}_K &= \varrho g b \frac{R^2}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = -\vec{F}_{Fl}
\end{aligned}$$

## 1.1.2 Kraftangriffspunkt

## Anschauliche Überlegung

Wirkungslinie von  $\vec{F}_{Fl}$  geht durch den Krümmungsmittelpunkt.  $D$  wird Druckpunkt genannt.

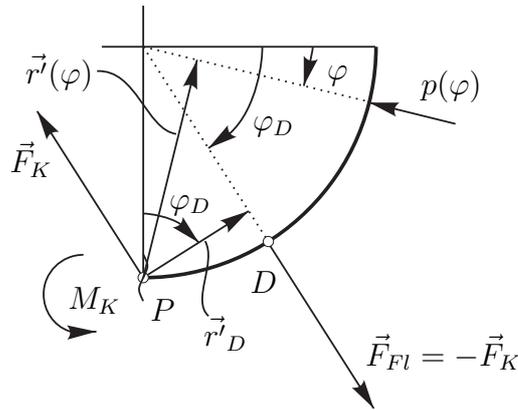


$$\tan \varphi_D = \frac{|\vec{F}_{K,y}|}{|\vec{F}_{K,x}|} = \frac{|\pi/2|}{|-1|} \quad \Rightarrow \quad \varphi_D = \arctan \frac{\pi}{2} = 57,5^\circ$$

**Drehmoment  $\vec{M}$  um  $P$  – Rein formale Lösung**

Momentengleichgewicht um den Punkt  $P$ :

$$\vec{M}_K + \vec{r}'_D \times \vec{F}_{Fl} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{M}_K = \vec{r}'_D \times \vec{F}_K$$

**Kontrollvolumen 2**

Schnittmoment der gekrümmten Wand um den Punkt  $P$ :

$$\begin{aligned} \vec{M}_K &= \vec{r}'_D \times \vec{F}_K = \oint_{\partial \text{KV}} \vec{r}'(\varphi) \times \vec{n}_i p(\varphi) dO \\ \rightarrow \quad \vec{r}'_D \times \vec{F}_K - \oint_{\partial \text{KV}} \vec{r}'(\varphi) \times \vec{n}_i p(\varphi) dO &= \vec{0} \\ \Rightarrow \quad \varphi_D & \end{aligned}$$

**alternativ: Kontrollvolumen 1**

Schnittmoment des gesamten Kontrollvolumens um den Punkt  $P$ :

$$\begin{aligned} \vec{M}_K + \int_{A_2} \vec{n}_1 \cdot \vec{y} \times (-\vec{n}_2)(p(y) - p_0) dA + \varrho g \int_V x(-\vec{n}_2) \times (-\vec{n}_1) dV &= 0 \\ \int_{A_2} \vec{n}_1 \cdot \vec{y} \times (-\vec{n}_2)(p(y) - p_0) dA &= - \int_0^R \varrho g b (R - y) y dA = -\varrho g b \frac{R^3}{6} \\ \varrho g \int_V x(-\vec{n}_2) \times (-\vec{n}_1) dV &= -\varrho g \int_0^R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{r \cos \varphi}_x \underbrace{r b dr d\varphi}_{dV} \\ &= -\frac{\varrho}{3} g b R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\rho}{3}gbR^3 \sin \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\rho}{3}gbR^3 \\
\rightarrow \quad M_K &= \rho gb \frac{R^3}{6} + \rho gb \frac{R^3}{3} = \rho gb \frac{R^3}{2} \\
M_K &= \vec{r}_D \times \vec{F}_K = R \cos \varphi_D \cdot |\vec{F}_K| \\
|\vec{F}_K| &= \rho gb \frac{R^2}{2} \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4}} \\
\rightarrow \quad \rho gb \frac{R^3}{2} \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4}} \cos \varphi_D &= \rho gb \frac{R^3}{2} \\
\Rightarrow \quad \cos \varphi_D &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4}}} \quad \Rightarrow \quad \varphi_D = 57.5^\circ
\end{aligned}$$