



Rechenübung Strömungslehre 322.014

Institut für Strömungsmechanik und Wärmeübertragung
E322

Christian Hauser

9. März 2007

Inhaltsverzeichnis

1	Hydrostatik	1
1.1	Flüssigkeitsdruck auf zylindrisch gekrümmte Wand.	1
1.1.1	Kraft \vec{F}_{Fl}	1
1.1.2	Kraftangriffspunkt	4
1.2	Hydraulische Presse.	6
1.3	Druckkraft auf Kreiszylinder.	7
2	Bernoulli-Gleichung	9
2.1	Fallrohr.	9
2.1.1	Bernoulligleichung	9
2.1.2	Druckverlauf	11
2.2	Austrittsdiffusor.	11
3	Rotierende Flüssigkeit	13
3.1	Rotierende Flüssigkeit.	13
3.1.1	a ruht, b rotiert mit $\omega = const.$ um vertikale Achse	13
3.1.2	a rotiert auch mit $\omega = const.$	14
4	Impulssatz	15
4.1	Rohrkrümmer.	15
4.1.1	Haltekraft \vec{H}	15
4.1.2	Mantelkraft \vec{R}	17
4.2	Düse.	18
4.2.1	Kraft \vec{F}	18
4.2.2	Haltekraft \vec{H}	19
4.3	Schaufelgitter.	20
4.3.1	Kraft \vec{F}	21
4.4	Düse.	22
4.5	Ausströmvorgang.	23
4.6	Propeller.	24
4.7	Teilung eines Wasserstrahls.	24
4.8	Turbinenschaufel.	25
4.9	Freistrahл trifft Platte	25

5	Drehimpulssatz	27
5.1	Rasensprenger.	27
5.1.1	Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$	28
5.1.2	Volumenstrom \dot{V}	29
5.2	Segnersches Wasserrad.	31
6	Instationäre Bernoulli-Gleichung	33
6.1	Druckleitung eines Stausees.	33
6.1.1	Beschleunigungen $a_1 = \frac{\partial u_1}{\partial t}$ und $a_2 = \frac{\partial u_2}{\partial t}$	33
6.1.2	Druck an der Stelle C nach Öffnen des Schiebers	35
6.1.3	Zeitlicher Verlauf $u_2(t)$	35
6.2	Heberleitung.	36
7	Kompressible Strömung	39
7.1	Ausströmen aus einem Kessel.	39
7.1.1	Ausströmgeschwindigkeit u , Massenstrom \dot{m} für $p_0 = 8$ bar (konvergente Düse)	39
7.1.2	Ausströmgeschwindigkeit u_e , Massenstrom \dot{m} und Austrittsquerschnitt A_e für $p_0 = 8$ bar (Lavaldüse)	41
7.1.3	Alle Größen für $p_0 = 1.5$ bar.	41
7.2	Pitotrohr.	44
7.3	Lavaldüse.	44
7.4	Lavaldüse.	44
7.5	Lavaldüse.	45
7.6	Intermittierender Windkanal.	46
8	Reibungsbehaftete Strömung	47
8.1	Druckabfall in einer Gasleitung	47
8.2	Heizölleitung.	48
8.2.1	Druckabfall Δp in der Rohrleitung	48
8.2.2	Antriebsleistung P	49
8.2.3	Durchmesser d_1	49
8.3	Ausfluß aus einem Gefäß.	50
8.3.1	Strömungsgeschwindigkeit in der Rohrleitung	51
8.4	Carnotscher Stoßverlust.	52
8.5	Hintereinanderschaltung von Widerständen.	52
8.6	Parallelschaltung von Widerständen.	53
8.7	Beliebige Schaltung von Widerständen.	53
9	Potentialtheorie	55
9.1	Rankine Körper.	55
9.1.1	Potentialfunktion Φ und Stromfunktion Ψ	55
9.1.2	Geschwindigkeitskomponenten u und v	56
9.1.3	Koordinaten des Staupunkts:	56
9.1.4	Gleichung der Stromlinie $r_K(\varphi)$ durch den Ursprung (Körperkontur)	57

9.1.5	Dicke b des Körpers für $x \rightarrow \infty$	57
9.1.6	Druckverteilung am Rankine-Körper mittels Druckbeiwert c_p	58
9.1.7	Kraft \vec{F}_Q , mit der die Quelle gehalten werden muß	59
9.1.8	Kraft \vec{F}_H , mit der ein materiell ausgeführter Körper zu halten wäre	60
9.2	Potentialwirbel über Ebene.	63
9.2.1	Stromfunktion und Geschwindigkeitspotential	63
9.2.2	Geschwindigkeiten $u(x, y)$ und $v(x, y)$	64
9.2.3	Druckbeiwert c_p an der Wand	64
9.2.4	Kraft pro Tiefeneinheit, die der Wirbel auf die Wand ausübt	64
9.2.5	Fortschrittsgeschwindigkeit zweier gleichstarker, gegendrehender, paralleler Wirbelfäden	65
9.3	Unsymmetrisches, angestelltes Parabelbogenzweieck.	66
9.3.1	Geschwindigkeitsstörung an der Profiloberfläche	66
9.3.2	Druckbeiwert c_p an der Profiloberfläche	67
9.3.3	Auftriebsbeiwert c_A	67
9.4	Bewegte Quelle.	68
9.5	Doppelquellenanordnung (ebenes Problem).	68
9.6	Quelle vor einer Wand (ebenes Problem).	68
9.7	Halbkörper.	69
9.8	Ebene Parabelumströmung.	69
9.9	Unsymmetrische, ebene Parabelumströmung.	70
9.10	Rauchring.	70
9.11	Zylinderumströmung	70
10	Ebene, kompressible Strömung	71
10.1	Wellige Wand.	71
10.1.1	Inkompressibel: $M_\infty \ll 1$	71
10.1.2	Kompressibilitätseinfluß schallnaher Unterschallströmung:	74
10.1.3	Überschall: $M_\infty > 1$	74
10.2	Kanal-Überschallströmung (lineare Theorie).	75
10.2.1	für $(M_\infty^2 - 1)^{-1/2} < 2h/L$	76
10.2.2	für $(M_\infty^2 - 1)^{-1/2} = 2h/L$ und $\tau \ll 1$	80
10.2.3	Wie müßte die obere Kanalwand modifiziert werden, damit stromabwärts keine Druckstörungen auftreten?	80
10.3	angestelltes Rautenprofil	82
10.3.1	Geschwindigkeitsstörung an der Profiloberfläche	82
10.3.2	Druckbeiwert c_p	83
10.3.3	Widerstandsbeiwert c_w	84
10.3.4	Auftriebsbeiwert c_a	84
11	Nichtlineare Theorie f. Überschallströmung	85
11.1	Rautenprofil in Überschallströmung.	85
11.1.1	Geschwindigkeits- und Druckstörungen	85
11.1.2	Widerstandsbeiwert c_w	90

11.1.3	Stromlinienbild	91
11.2	Umlenkung eines Überschallfreistrahls.	91
11.3	Schwingender Freistrahls.	92
11.4	Kanaleinlauf.	93
12	Dünne Reibungsschichten	95
12.1	Laminare selbstähnliche Grenzschichten	95
12.1.1	Grundgleichungen	95
12.2	Grenzschichttheorie Keilströmung	101
12.2.1	Wandgeschwindigkeit $U_w(x)$ der reibungsfreien Anströmung . . .	102
12.2.2	Grenzschichtdicke	102
12.2.3	Reibungsbeiwert c'_f	103
12.2.4	Haltekraft $\tilde{F} = \tilde{F}_R + \tilde{F}_P$	103
12.3	Lokale, ebene Staupunktströmung.	104
12.4	Schmierspalttheorie.	104
13	Anhang	107
13.1	Colebrook-Diagramm.	107
13.2	Isentropentabelle	108
13.3	Charakteristikendiagramm	109
13.4	Tabelle zum Charakteristikendiagramm für Luft ($\kappa = 1,4$)	110
13.5	Stoßpolarendiagramm	111

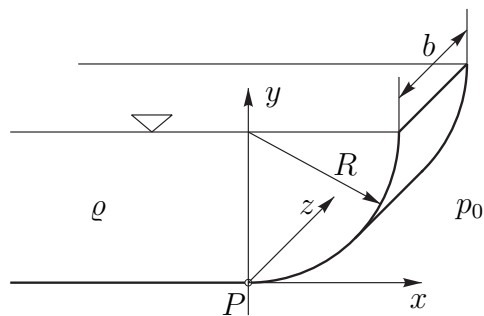
Kapitel 1

Hydrostatik

1.1 Flüssigkeitsdruck auf zylindrisch gekrümmte Wand.

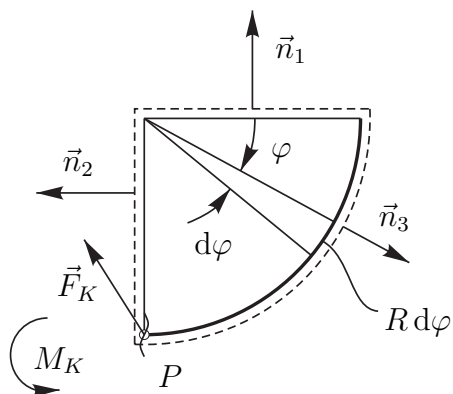
Eine gekrümmte Wand trennt, wie in der Skizze gezeigt, eine Flüssigkeit der Dichte ρ von der umgebenden Luft (Druck p_0).

Berechnen Sie den Betrag und den Angriffspunkt der von der Flüssigkeit auf die Wand wirkenden Kraft \vec{F}_{Fl} .



1.1.1 Kraft \vec{F}_{Fl}

Kontrollvolumen 1



$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{n}_3 = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix}$$

Impulsbilanz IB

(2.13)+(2.14):

$$\boxed{\oint_{\partial \text{KV}} \rho v_n \vec{v} dO + \oint_{\partial \text{KV}} p \vec{n} dO = \int_{\text{KV}} \rho \vec{g} dV + \Sigma \vec{F}_K}$$

$$\oint_{\partial \text{KV}} \rho v_n \vec{v} dO \quad \dots \text{konvektiver Term} \quad \text{hier: } = 0$$

$$\oint_{\partial \text{KV}} p \vec{n} dO \quad \dots \text{Druckterm}$$

$$\int_{\text{KV}} \rho \vec{g} dV \quad \dots \text{Schwerkraftterm}$$

$$\Sigma \vec{F}_K = \vec{F}_K \quad \dots \text{Kraft auf das KV - Schnittkraft} \quad \text{hier: } \vec{F}_K = -\vec{F}_{Fl}$$

Druckterm

$$\oint_{\partial \text{KV}} p \vec{n} dO = \int_{A_1} p_0 \vec{n}_1 dO + \int_{A_2} p(y) \vec{n}_2 dO + \int_{A_3} p_0 \vec{n}_3 dO$$

$$\int_{A_1} p_0 \vec{n}_1 dO = p_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \int_{A_1} dO = p_0 b R \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\int_{A_2} p(y) \vec{n}_2 dO = \text{siehe Kasten „Hydrostatische Druckverteilung“}$$

$$= \int_0^R [p_0 + \rho g (R - y)] \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} b dy$$

$$= b \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \left[\int_0^R p_0 dy + \rho g \int_0^R (R - y) dy \right]$$

$$= b \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \left[p_0 R + \rho g \left(R \cdot R - \frac{R^2}{2} \right) \right]$$

$$= b R \left(p_0 + \rho g \frac{R}{2} \right) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

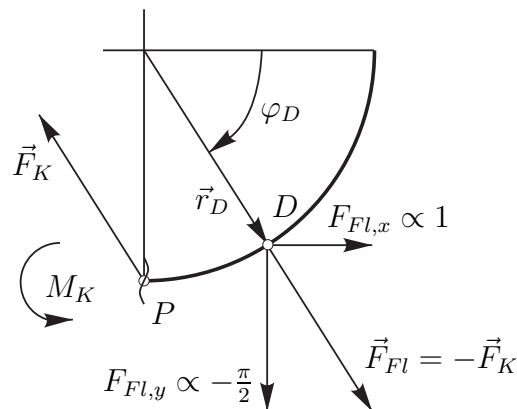
Impulsbilanz

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\oint_{\partial \text{KV}} \varrho v_n \vec{v} dO}_{=0} + \underbrace{\oint_{\partial \text{KV}} p \vec{n} dO}_{=0} &= \underbrace{\int_{\text{KV}} \varrho \vec{g} dV}_{=0} + \vec{F}_K \\
 \oint_{\partial \text{KV}} p \vec{n} dO &= \int_{A_1} p_0 \vec{n}_a dO + \int_{A_2} p(\varphi) \vec{n}_i dO \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} p_0 \vec{n}_3 b R d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^0 p(\varphi) (-\vec{n}_3) b R (-d\varphi) \\
 &= bR \left[p_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix} d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(p_0 + \varrho g R \underbrace{(R-y)}_{R \sin \varphi} \right) \begin{pmatrix} -\cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} d\varphi \right] \\
 &= \varrho g b R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cos \varphi \\ \sin^2 \varphi \end{pmatrix} d\varphi \\
 &= \frac{1}{2} \varrho g b R^2 \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow \vec{F}_K &= \varrho g b \frac{R^2}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = -\vec{F}_{Fl}
 \end{aligned}$$

1.1.2 Kraftangriffspunkt

Anschauliche Überlegung

Wirkungslinie von \vec{F}_{Fl} geht durch den Krümmungsmittelpunkt. D wird Druckpunkt genannt.

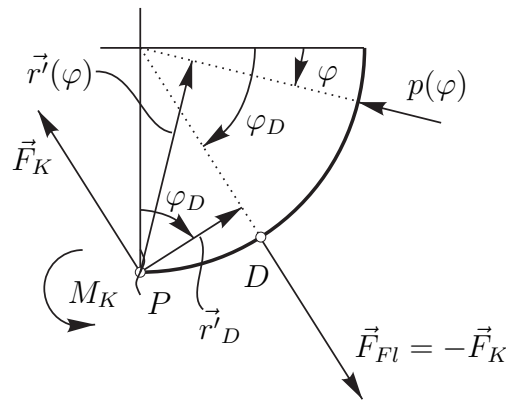


$$\tan \varphi_D = \frac{|\vec{F}_{K,y}|}{|\vec{F}_{K,x}|} = \frac{|\pi/2|}{|-1|} \Rightarrow \varphi_D = \arctan \frac{\pi}{2} = 57,5^\circ$$

Drehmoment \vec{M} um P – Rein formale Lösung

Momentengleichgewicht um den Punkt P :

$$\vec{M}_K + \vec{r}'_D \times \vec{F}_{Fl} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{M}_K = \vec{r}'_D \times \vec{F}_K$$

Kontrollvolumen 2

Schnittmoment der gekrümmten Wand um den Punkt P :

$$\vec{M}_K = \vec{r}'_D \times \vec{F}_K = \oint_{\partial \text{KV}} \vec{r}'(\varphi) \times \vec{n}_i p(\varphi) dO$$

$$\rightarrow \vec{r}'_D \times \vec{F}_K - \oint_{\partial \text{KV}} \vec{r}'(\varphi) \times \vec{n}_i p(\varphi) dO = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \varphi_D$$

alternativ: Kontrollvolumen 1

Schnittmoment des gesamten Kontrollvolumens um den Punkt P :

$$\vec{M}_K + \int_{A_2} \vec{n}_1 \cdot \vec{y} \times (-\vec{n}_2)(p(y) - p_0) dA + \rho g \int_V \vec{x}(-\vec{n}_2) \times (-\vec{n}_1) dV = 0$$

$$\int_{A_2} \vec{n}_1 \cdot \vec{y} \times (-\vec{n}_2)(p(y) - p_0) dA = - \int_0^R \rho g b (R - y) y dA = - \rho g b \frac{R^3}{6}$$

$$\begin{aligned} \rho g \int_V \vec{x}(-\vec{n}_2) \times (-\vec{n}_1) dV &= - \rho g \int_0^R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{r \cos \varphi}_x \underbrace{r b dr d\varphi}_{dV} \\ &= - \frac{\rho}{3} g b R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\rho}{3}gbR^3 \sin \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\rho}{3}gbR^3 \\
\rightarrow \quad M_K &= \rho gb \frac{R^3}{6} + \rho gb \frac{R^3}{3} = \rho gb \frac{R^3}{2} \\
M_K &= \vec{r}_D \times \vec{F}_K = R \cos \varphi_D \cdot |\vec{F}_K| \\
|\vec{F}_K| &= \rho gb \frac{R^2}{2} \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4}} \\
\rightarrow \quad \rho gb \frac{R^3}{2} \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4}} \cos \varphi_D &= \rho gb \frac{R^3}{2} \\
\Rightarrow \quad \cos \varphi_D &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4}}} \quad \Rightarrow \quad \varphi_D = 57.5^\circ
\end{aligned}$$

1.2 Hydraulische Presse.

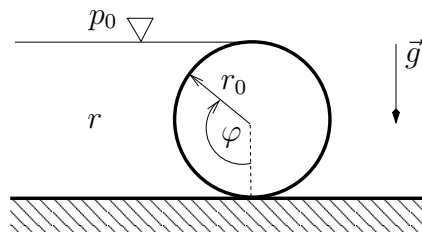
Ein hydraulischer Wagenheber besteht im Prinzip aus zwei miteinander verbundenen, flüssigkeitsgefüllten Röhren unterschiedlicher Querschnittsfläche. Nach oben ist die Flüssigkeit von je einem, dicht mit der Wand des jeweiligen Rohres abschließenden Kolben begrenzt.

Man berechne für die gegebenen Kolbenflächen A_1 , A_2 die Kraft F_1 auf Kolben 1, die nötig ist, um einer Kraft F_2 auf Kolben 2 die Waage zu halten.

1.3 Druckkraft auf Kreiszyylinder.

Für das skizzierte kreiszylindrische Wehr vom Radius r_0 und der Breite b (senkrecht zur Zeichenebene) ist die resultierende Druckkraft nach Betrag und Richtung gesucht. Bestimmen Sie die Kraft durch Integration über die Druckverteilung.

Durch welchen Punkt führt die Wirkungslinie der resultierenden Kraft?



Kapitel 2

Bernoulli-Gleichung

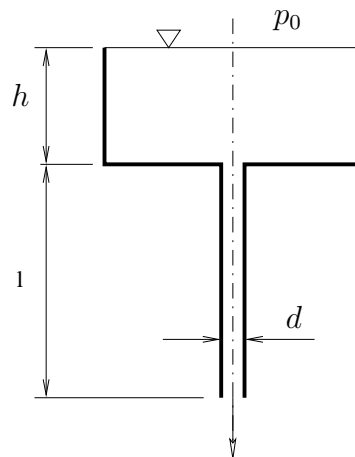
2.1 Fallrohr.

In einem Behälter von sehr großem Querschnitt befindet sich bis zur Höhe h Wasser der Dichte ϱ . Zur Vermeidung von Dampfbildung (Dampfdruck p_D) am Rohreinlauf muß die Rohrlänge l begrenzt bleiben.

Wie groß kann die Länge l maximal ausgeführt werden, wenn

1. der Rohrdurchmesser d konstant ist?
2. am Rohrende eine Düse den Rohrdurchmesser von d auf $d/2$ verringert?

Berechnen Sie das Ergebnis zunächst allgemein und sodann für die Zahlenwerte $d = 100$ mm, $\varrho = 1000$ kg/m³, $h = 5$ m und Umgebungsdruck $p_0 = 1$ bar.

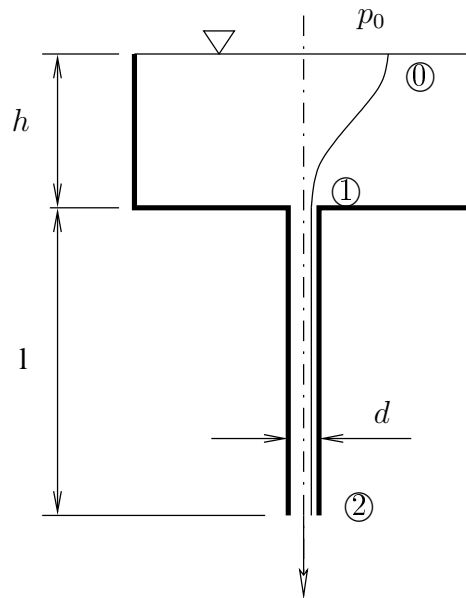


2.1.1 Bernoulligleichung

$$\frac{p}{\varrho} + \frac{u^2}{2} + gh = \text{const}$$

stationär, reibungsfrei, inkompressibel, entlang Stromlinie

Bernoulligleichung entlang Stromlinie



①-①:

$$\frac{p_0}{\rho} + g \cdot h + \frac{0^2}{2} = \frac{p_1}{\rho} + g \cdot 0 + \frac{u_1^2}{2} \quad (2.1)$$

①-②:

$$\frac{p_1}{\rho} + g \cdot l + \frac{u_1^2}{2} = \frac{p_0}{\rho} + g \cdot 0 + \frac{u_2^2}{2} \quad (2.2)$$

Massenbilanz MB

$$\dot{m} = \rho u A = \text{const}$$

$$\rho = \text{const} \Rightarrow \dot{V} = u A = \text{const}$$

①-②:

$$\begin{aligned} u_1 \frac{d^2}{4} &= u_2 \frac{d_2^2}{4} \\ u_2 &= u_1 \frac{d^2}{d_2^2} \end{aligned} \quad (2.3)$$

somit wird (2.2)

$$\frac{p_0 - p_1}{\rho} = \frac{u_1^2}{2} \left(1 - \frac{d^4}{d_2^4} \right) + gl \quad (2.4)$$

und (2.1)

$$\frac{p_0 - p_1}{\rho} = \frac{u_1^2}{2} - gh \quad (2.5)$$

(2.4)=(2.5):

$$u_1^2 = 2g(l+h) \frac{d_2^4}{d^4} \quad (2.6)$$

In (2.5) eingesetzt:

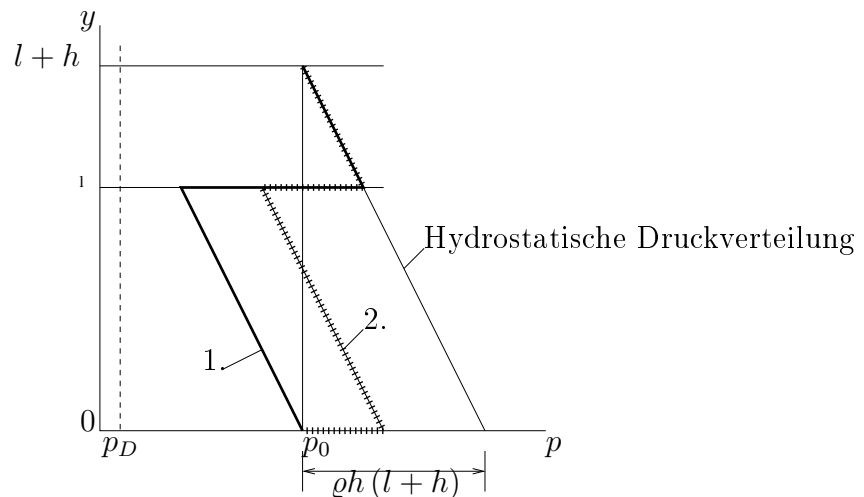
$$l = \left(\frac{p_0 - p_1}{\rho} + gh \right) \frac{1}{g} \frac{d^4}{d_2^4} - h \quad (2.7)$$

Berechnung der maximalen Länge

Da p_D gegenüber p_0 sehr klein ist, soll hier der Einfachheit halber $p_D \approx 0$ angenommen werden.

1. $d = const$	$l \leq \frac{p_0}{\rho g} + h - h$ $l \leq 10,2 \text{ m}$	$u_1^2 = 2g \left(\frac{p_0}{\rho g} + h \right)$ $u_1 = 17,3 \text{ m/s}$	$u_2 = u_1$ $u_2 = 17,3 \text{ m/s}$
2. $d_s = \frac{d}{2}$	$l \leq \left(\frac{p_0}{\rho g} + h \right) \cdot 16 - h$ $l \leq 238 \text{ m}$	$u_1^2 = 2g \left(\frac{p_0}{\rho g} + h \right)$ $u_1 = 17,3 \text{ m/s}$	$u_2 = u_1 \cdot 4$ $u_2 = 69 \text{ m/s}$

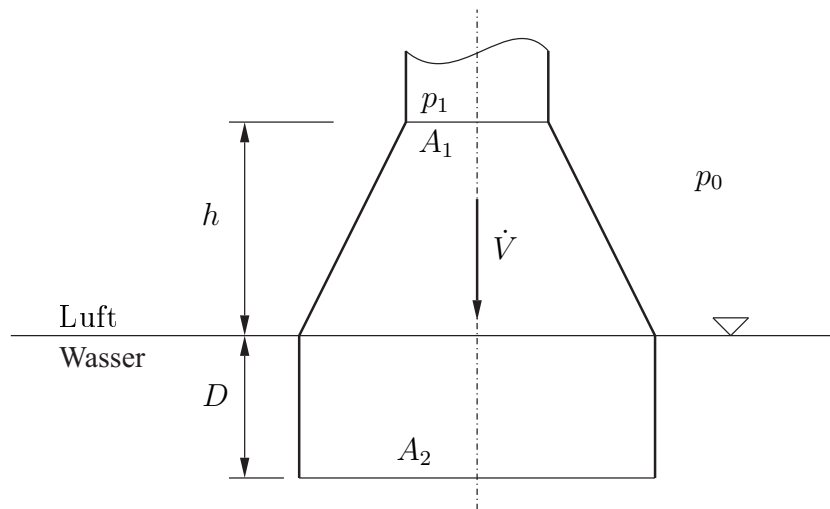
2.1.2 Druckverlauf



2.2 Austrittsdiffusor.

Der Austrittsdiffusor einer Turbine erweitere sich von der Eintrittsfläche A_1 auf die Austrittsfläche A_2 . Der Diffusoreintritt liege um die Höhe h über dem Wasserspiegel.

Für die Werte $h = 2 \text{ m}$, $A_1 = 5 \text{ m}^2$, $A_2 = 25 \text{ m}^2$, $\rho = 1 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, $p_0 = 1 \text{ bar}$ bestimme man den maximalen Volumenstrom \dot{V} , sodaß der Druck p_1 im Diffusoreintritt den Dampfdruck $p_D \approx 0 \text{ bar}$ des Wassers gerade nicht unterschreitet.



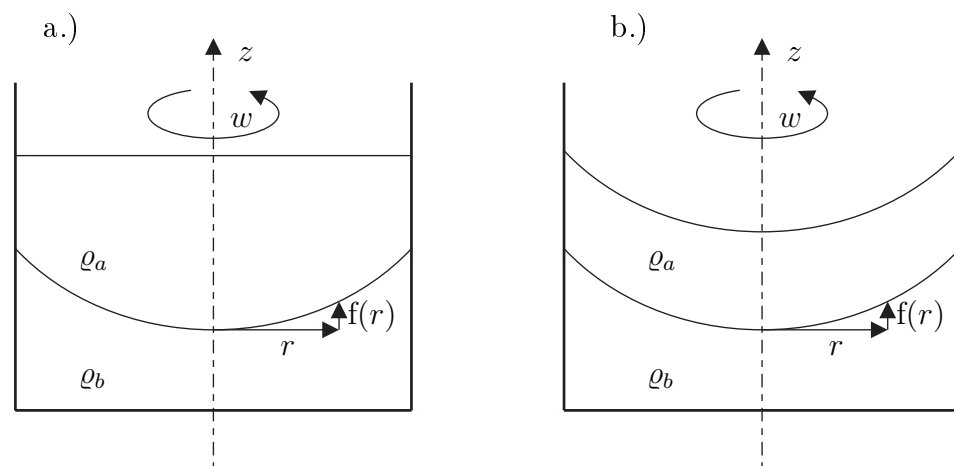
Kapitel 3

Rotierende Flüssigkeit

3.1 Rotierende Flüssigkeit.

Ein Kreiszyklindrischer Behälter ist mit zwei übereinander geschichteten Flüssigkeiten der Dichten ϱ_a und ϱ_b gefüllt, wobei $\varrho_a < \varrho_b$ gilt. Welcher Gleichung $z = f(r)$ genügt die Trennlinie zwischen den beiden Flüssigkeiten, wenn

1. die untere Flüssigkeit mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotiert, während die obere Flüssigkeit ruht?
2. beide Flüssigkeiten mit der Geschwindigkeit ω rotieren?



3.1.1 a ruht, b rotiert mit $\omega = const.$ um vertikale Achse

→ Stromlinien sind Kreise! Im Punkt $z = 0, r = 0$ soll der Druck p^* herrschen. Ausgehend von einem beliebigen Punkt innerhalb der Flüssigkeit b kann die Änderung des Druckes angegeben werden:

$$\frac{\partial p_b}{\partial r} = \varrho_b \frac{v^2}{r} = \varrho_b r \omega^2 \qquad \frac{\partial p_b}{\partial z} = -\varrho_b g$$

Integration liefert

$$p_b = \varrho_b \omega^2 \frac{r^2}{2} + f_1(z)$$

$$p_b = -\varrho_b g z + f_2(r)$$

und es folgt somit für den Druck

$$p_b = \varrho_b \omega^2 \frac{r^2}{2} - \varrho_b g z + p^*$$

$$p^* = p_0 + \varrho_a g h_a$$

Da die Flüssigkeit a ruht, gilt für den Druck in a:

$$p_a = p^* - \varrho_a g z$$

Für die Grenzfläche bei $z = f(r)$ muß bei Vernachlässigung der Oberflächenspannung gelten:

$$p_a(r, f(r)) = p_b(r, f(r))$$

$$p^* - \varrho_a g z = \varrho_b \omega^2 \frac{r^2}{2} - \varrho_b g z + p^*$$

$$\rightarrow f(r) = \frac{\omega^2 r^2}{2g} \frac{\varrho_b}{\varrho_b - \varrho_a}$$

3.1.2 a rotiert auch mit $\omega = const.$

Während die Druckverhältnisse in b sich nicht geändert haben, ist der Druck in a nun

$$p_a = \varrho_a \omega^2 \frac{r^2}{2} - \varrho_a g z + p^*$$

Für die Grenzfläche bei $z = f(r)$ muß bei Vernachlässigung der Oberflächenspannung erneut gelten:

$$p_a(r, f(r)) = p_b(r, f(r))$$

$$\varrho_a \omega^2 \frac{r^2}{2} - \varrho_a g z + p^* = \varrho_b \omega^2 \frac{r^2}{2} - \varrho_b g z + p^*$$

$$\rightarrow f(r) = \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

Wichtig: Die Bernoulli-Gleichung gilt nur entlang von Stromlinien!

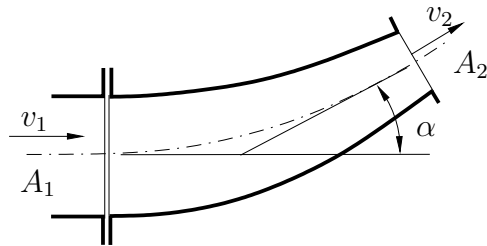
Kapitel 4

Impulssatz

4.1 Rohrkrümmer.

Gegeben ist ein Rohrkrümmer (Skizze) mit Eintrittsquerschnitt A_1 und Austrittsquerschnitt A_2 . Die Geschwindigkeit v_1 im Eintrittsquerschnitt sowie der Außendruck p_2 seien ebenfalls bekannt. Der Krümmer lenkt die Strömung um einen Winkel α um.

Berechnen Sie die Haltekraft \vec{H} , die in der Flanschverbindung übertragen wird, sowie die Kraft \vec{R} , die von der Flüssigkeit auf die Innenwand des Krümmers ausgeübt wird.



4.1.1 Haltekraft \vec{H}

Massenbilanz MB

$$\begin{aligned}\dot{V} &= uA = \text{const} \\ v_1 A_1 &= v_2 A_2 \\ v_2 &= v_1 \frac{A_1}{A_2}\end{aligned}\tag{4.1}$$

Bernoulli-Gleichung

$$\frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} + gh = \text{const}$$

Hydrostatische Höhe h vernachlässigt:

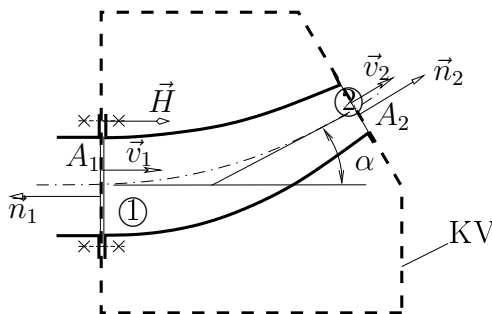
$$\begin{aligned}\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} &= \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} \\ p_1 &= p_2 + \frac{\rho}{2} (v_2^2 - v_1^2)\end{aligned}$$

(4.1) einsetzen:

$$p_1 = p_2 + \frac{\rho}{2} v_1^2 \left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1 \right) \quad (4.2)$$

Impulsbilanz IB

$$\oint_{\partial KV} \rho v_n \vec{v} dO + \oint_{\partial KV} p \vec{n} dO = \int_{KV} \rho \vec{g} dV + \Sigma \vec{F}_K \quad (4.3)$$



Normalvektoren:

$$\textcircled{1}: \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_{1n} = \vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1 = -v_1$$

$$\textcircled{2}: \quad \vec{v}_2 = v_2 \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad v_{2n} = \vec{v}_2 \cdot \vec{n}_2 = v_2 \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = v_2$$

$$\text{sonst:} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow v_n = 0$$

Konvektiver Anteil:

$$\oint_{\partial KV} \rho v_n \vec{v} dO = \rho \vec{v}_1 v_{1n} A_1 + \rho \vec{v}_2 v_{2n} A_2$$

(4.1) einsetzen

$$= \rho v_1^2 A_1 \left[-\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{A_1}{A_2} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \right] \quad (4.4)$$

Druckanteil:

$$\begin{aligned}\oint_{\partial KV} p \vec{n} dO &= p_1 \vec{n}_1 A_1 + p_2 \int_{\partial KV - A_1} \vec{n} dO \\ &= p_1 \vec{n}_1 A_1 + p_2 \left(\oint_{\partial KV} \vec{n} dO - \int_{A_1} \vec{n} dO \right)\end{aligned}$$

$$\oint_{\partial KV} \vec{n} dO = 0 \Rightarrow = -(p_1 - p_2) A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Gewichtskraftanteil:

$$\int_{KV} \varrho \vec{g} dV \neq 0, \text{ hier aber vernachlässigt} \quad (4.6)$$

Kräfte auf das Medium:

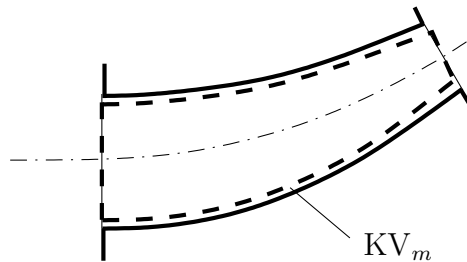
$$\Sigma \vec{F}_K = \vec{H} \quad (4.7)$$

(4.4)-(4.7) in (4.3) eingesetzt $\rightarrow \vec{H}$:

$$\vec{H} = \varrho v_1^2 A_1 \left[- \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{A_1}{A_2} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \right] - (p_1 - p_2) A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4.1.2 Mantelkraft \vec{R}

...Kraft, die die Flüssigkeit auf die Krümmwand ausübt.



Impulsbilanz wie oben.

Konvektiver Anteil: wie oben, da Körperkontur=Stromlinie

Druckanteil:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial KV} p \vec{n} dO &= \underbrace{\int_{\text{Mantel}} p \vec{n} dO}_{=\vec{R}} + p_1 \vec{n}_1 A_1 + p_2 \vec{n}_2 A_2 \\ &= \vec{R} + p_1 A_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + p_2 A_2 \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Haltekraft:

$$\vec{H} = 0$$

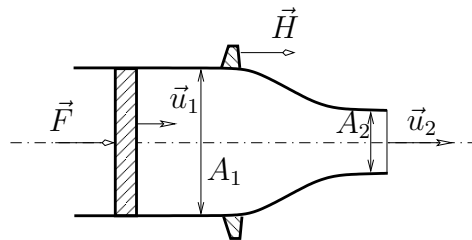
somit:

$$\vec{R} = -\varrho v_1^2 A_1 \left[- \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{A_1}{A_2} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \right] + p_1 A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - p_2 A_2 \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$

4.2 Düse.

Ein mit Flüssigkeit der Dichte ρ gefülltes Rohr der Querschnittsfläche A_1 mündet in eine Düse der Querschnittsfläche A_2 und wird dadurch geleert, daß ein Kolben mit der konstanten Geschwindigkeit u_1 durch das Rohr geschoben wird.

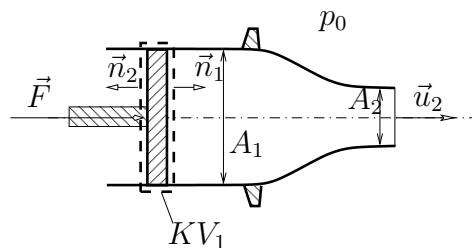
Berechnen Sie die Kraft F , mit welcher man den Kolben verschieben muß, sowie die Haltekraft H .



4.2.1 Kraft \vec{F}

Kontrollvolumen KV_1

Kontrollvolumen **stationär!**



Normalvektoren:

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Impulsbilanz IB

$$\underbrace{\oint_{\partial KV} \rho v_n \vec{v} dO}_{=0, \text{ da keine Durchströmung}} + \oint_{\partial KV} p \vec{n} dO = \underbrace{\int_{KV} \rho \vec{g} dV}_{\text{vernachlässigt}} + \Sigma \vec{F}_K$$

Druckintegral:

$$\oint_{\partial KV} p \vec{n} dO = p_0 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} A_1 + p_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} A_1$$

$$= (p_1 - p_0) A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Kräfte:

$$\Sigma \vec{F}_K = \vec{F}$$

Bernoulligleichung

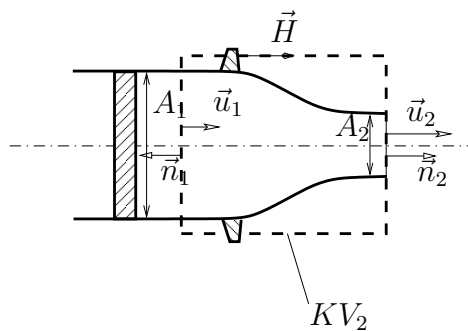
$$\begin{aligned} \frac{p_1}{\rho} + \frac{u_1^2}{2} + gh &= \frac{p_0}{\rho} + \frac{u_2^2}{2} + gh \\ (p_1 - p_0) &= \frac{\rho}{2} (u_2^2 - u_1^2) \end{aligned}$$

Massenbilanz MB

$$\begin{aligned} \rho u_1 A_1 &= \rho u_2 A_2 \\ u_2 &= u_1 \frac{A_1}{A_2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \frac{\rho}{2} u_1^2 \left[\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right] A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4.2.2 Haltekraft \vec{H}

Kontrollvolumen KV₂

Normalvektoren:

$$\begin{aligned} \vec{n}_1 &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \vec{u}_1 &= u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & u_{1n} &= u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -u_1, \\ \vec{n}_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \vec{u}_2 &= u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & u_{2n} &= u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = u_2 \end{aligned}$$

Impulsbilanz

$$\oint_{\partial \text{KV}} \varrho v_n \vec{v} dO + \oint_{\partial \text{KV}} p \vec{n} dO = \underbrace{\int_{\text{KV}} \varrho \vec{g} dV}_{\text{vernachlässigt}} + \Sigma \vec{F}_K$$

Konvektiver Anteil:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial \text{KV}} \varrho v_n \vec{v} dO &= -\varrho u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u_1 A_1 + \varrho u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u_2 A_2 + 0 \\ &= \varrho (-u_1^2 A_1 + u_2^2 A_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Druckanteil:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial \text{KV}} p \vec{n} dO &= -p_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} A_1 + p_0 \underbrace{\oint_{\partial \text{KV}} \vec{n} dO}_{=0} - p_0 \underbrace{\oint_{A_1} \vec{n} dO}_{=-A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \\ &= (p_0 - p_1) A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\vec{F} \end{aligned}$$

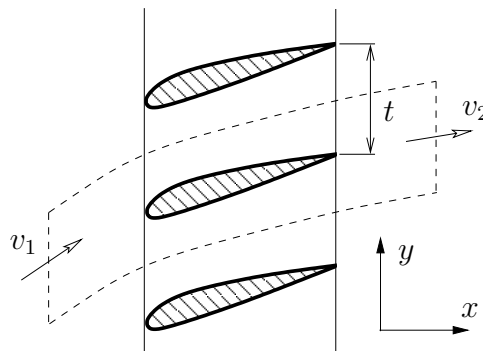
Kräfte:

$$\begin{aligned} \Sigma \vec{F}_K &= \vec{H} \\ \Rightarrow \vec{H} &= -\vec{F} + \varrho u_1^2 \left(\frac{A_1}{A_2} - 1 \right) A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4.3 Schaufelgitter.

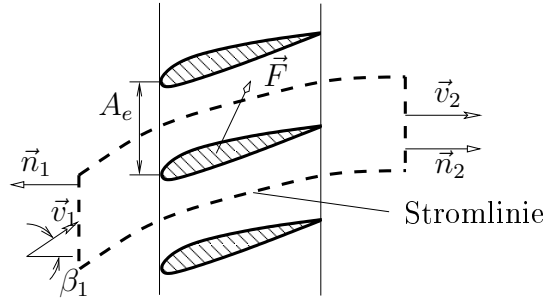
Eine Parallelströmung strömt ein ebenes Schaufelgitter unter dem Winkel $\beta_1 = \pi/6$ an, die Abströmung erfolgt unter dem Winkel $\beta_2 = 0$. Die Anströmgeschwindigkeit betrage $v_1 = 5$ m/s, der Eintrittsquerschnitt eines Schaufelkanals sei $A_e = 0,2$ m².

Man bestimme die auf eine Einzelschaufel wirkenden Kräfte unter der Annahme, daß es sich beim strömenden Medium um Wasser handelt ($\varrho = 1 \cdot 10^3$ kg/m³) und die Reibungskräfte vernachlässigt werden können.



4.3.1 Kraft \vec{F}

Kontrollvolumen



$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_1 = v_1 \begin{pmatrix} \cos \beta_1 \\ \sin \beta_1 \end{pmatrix}, \quad v_{1n} = \vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1 = v_1 \begin{pmatrix} \cos \beta_1 \\ \sin \beta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -v_1 \cos \beta_1$$

$$\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = v_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_{2n} = \vec{v}_2 \cdot \vec{n}_2 = v_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v_2$$

Impulsbilanz IB

$$\oint_{\partial \text{KV}} \rho v_n \vec{v} dO + \oint_{\partial \text{KV}} p \vec{n} dO = \underbrace{\int_{\text{KV}} \rho \vec{g} dV}_{\text{vernachlässigt}} + \Sigma \vec{F}_K$$

Konvektiver Anteil:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial \text{KV}} \rho v_n \vec{v} dO &= -\rho v_1 \begin{pmatrix} \cos \beta_1 \\ \sin \beta_1 \end{pmatrix} v_1 \cos \beta_1 A_e + \rho v_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} v_2 A_e \\ &= -\rho v_1^2 \cos \beta_1 A_e \begin{pmatrix} \cos \beta_1 \\ \sin \beta_1 \end{pmatrix} + \rho v_2^2 A_e \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

v_2 aus Massenbilanz in integraler Form:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial \text{KV}} \rho v_n dO &= 0 = -\rho v_1 \cos \beta_1 A_e + \rho v_2 A_e \\ v_2 &= v_1 \cos \beta_1 \\ \rightarrow \oint_{\partial \text{KV}} \rho v_n \vec{v} dO &= -\rho v_1^2 A_e \cos \beta_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \beta_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Druckintegral:

$$\oint_{\partial \text{KV}} p \vec{n} dO = p_1 A_e \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + p_2 A_e \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= (p_2 - p_1) A_e \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Druckdifferenz aus Bernoulligleichung:

$$\begin{aligned} \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gh &= \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gh \\ p_2 - p_1 &= \frac{\rho}{2} (v_1^2 - v_2^2) \\ &= \frac{\rho}{2} v_1^2 \sin^2 \beta_1 \end{aligned}$$

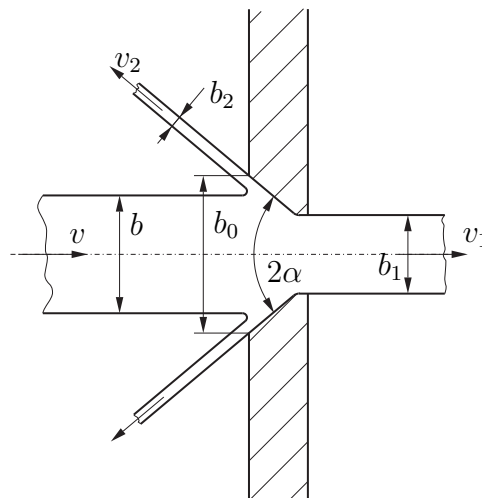
$$\begin{aligned} \rightarrow \oint_{\partial \text{KV}} p \vec{n} dO &= \frac{\rho}{2} v_1^2 \sin^2 \beta_1 A_e \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \vec{F} &= \rho v_1^2 \sin \beta_1 A_e \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \sin \beta_1 \\ \cos \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -625 \\ 2165 \end{pmatrix} \text{ N} \end{aligned}$$

4.4 Düse.

Ein ebener Strahl der Breite b strömt mit der Geschwindigkeit v auf eine konvergente Düse Schlitzdüse (Eintrittsbreite $b_0 > b$, Austrittsbreite $b_1 < b$). Der Öffnungswinkel der Düse beim Eintrittsquerschnitt ist 2α . Der Umgebungsdruck vor und hinter der Düse ist mit p_0 gegeben, die Dichte sei ρ .

Man berechne aus den gegebenen Größen unter Annahme einer inkompressiblen, reibungsfreien Strömung

1. die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 des durchtretenden und des reflektierten Strahls
2. den Breite b_2 eines reflektierten Strahls
3. sowie die Kraft \vec{F} (bezogen auf die Tiefeneinheit) auf die Düse.

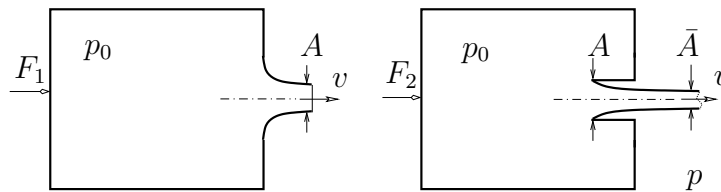


4.5 Ausströmorgang.

Eine inkompressible, reibungsfreie Flüssigkeit ströme aus einem Gefäß mit konstantem Innendruck p_0 durch eine Öffnung der Fläche A in die umgebende Luft (Druck p).

Man berechne die Haltekraft F und die Endquerschnittsfläche \bar{A} des Strahles für

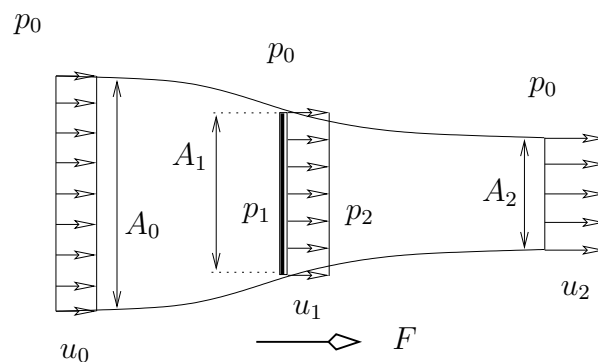
1. eine abgerundete Ausflußöffnung (keine Strahlkontraktion, $A = \bar{A}$)
2. eine *Bordamündung*: Die Ausflußöffnung A ist durch ein angesetztes Rohr weit in das Innere des Behälters gezogen. Der austretende Freistrahle kontrahiert sich.



4.6 Propeller.

Ein Propeller (Kreisfläche A_1) bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit u_0 durch ruhende Luft, auf die er die Schubkraft F ausübt. Die Skizze zeigt den für einen mit dem Propeller bewegten Beobachter stationären Strömungsvorgang. Die den Propellerkreis durchsetzende Luft strömt mit der Fluggeschwindigkeit u_0 in einem Strahl der Querschnittsfläche A_0 gegen den Propeller an und strömt in einiger Entfernung dahinter als Strahl der Querschnittsfläche A_2 mit der Geschwindigkeit $u_2 > u_1$ ab.

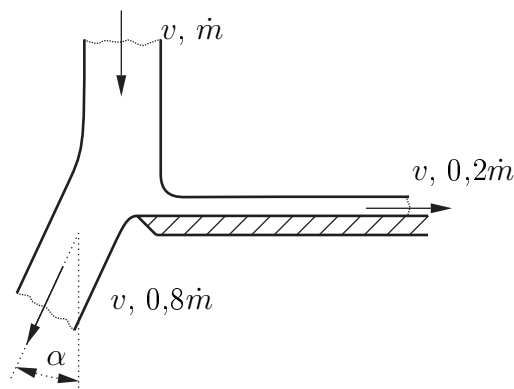
Ermitteln Sie eine Formel für die vom Propeller aufzubringende Leistung P und werten Sie sie für $u_0 = 40 \text{ m/s}$, $A_1 = 3 \text{ m}^2$, $\rho = 1,3 \text{ kg/m}^3$ und $F = 2 \text{ kN}$ aus.



4.7 Teilung eines Wasserstrahls.

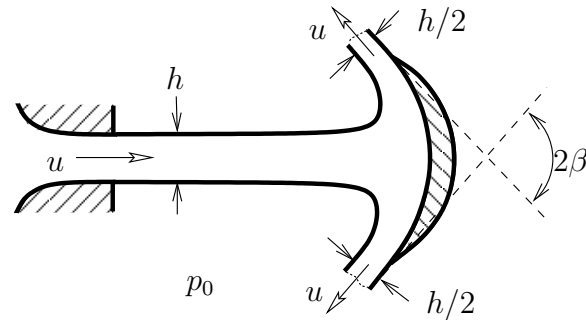
Ein Wasserstrahl der Menge $\dot{m} = 500 \text{ kg/s}$ strömt mit der Geschwindigkeit $v = 5 \text{ m/s}$ gegen eine Schneide und wird dort abgelenkt, wobei $1/5$ der Wassermenge nach rechts abströmt. Die Reibung sei wie die Schwerkraft vernachlässigbar (z.B. horizontale Strömung).

Berechnen Sie den Winkel α , um den der größere Teilstrahl von der ursprünglichen Strahlrichtung abgelenkt wird, sowie die Haltekraft der Schneide.



4.8 Turbinenschaufel.

Ein Wasserstrahl der Breite h und der Tiefe b trifft mit der Geschwindigkeit u auf die Schaufel eines Turbinenrades, die den Strahl symmetrisch nach zwei Seiten um den Winkel $\pi - \beta$ umlenkt.

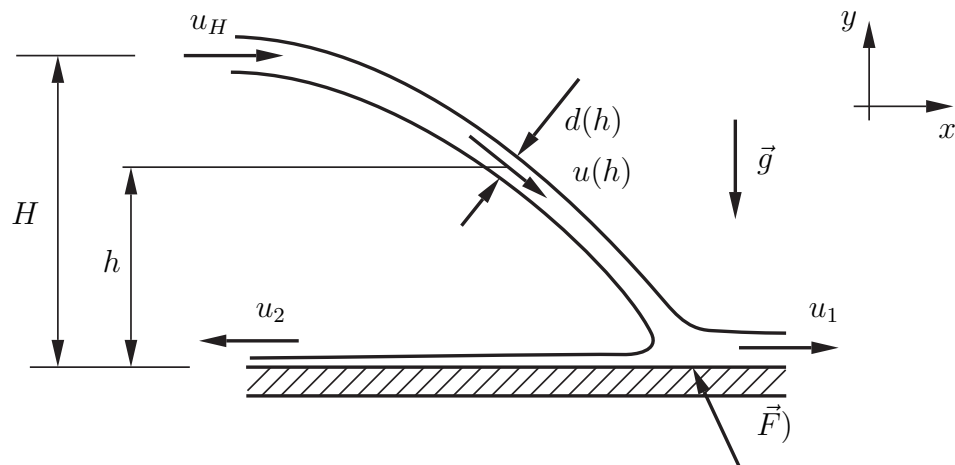


Man berechne:

1. Die Schaufelkraft F_S bei stillstehender Schaufel,
2. die Schaufelkraft F_S , wenn sich die Schaufel mit der Geschwindigkeit u_0 bewegt,
3. die Leistung P und den Wirkungsgrad η .

4.9 Haltekraft einer von einem Flüssigkeitsstrahl getroffenen ebenen Platte.

Ein ebener Flüssigkeitsstrahl der Dichte ρ tritt waagrecht mit der Geschwindigkeit u_H und der Dicke d_H aus einer Düse und trifft nach der Fallhöhe H auf eine ebene Platte.



Man berechne für *reibungsfreie* Strömung

1. den Auftreffwinkel des Strahls,

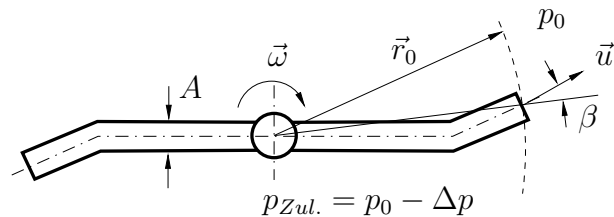
2. die Dicke $d(h)$ des Freistrahls,
3. sowie die Dicken der abgehenden Flüssigkeitsschichten.
4. die Kraft pro Tiefeneinheit b , mit der die Platte gehalten werden muß (die Gewichtskraft des Strahles ist zu vernachlässigen),

Kapitel 5

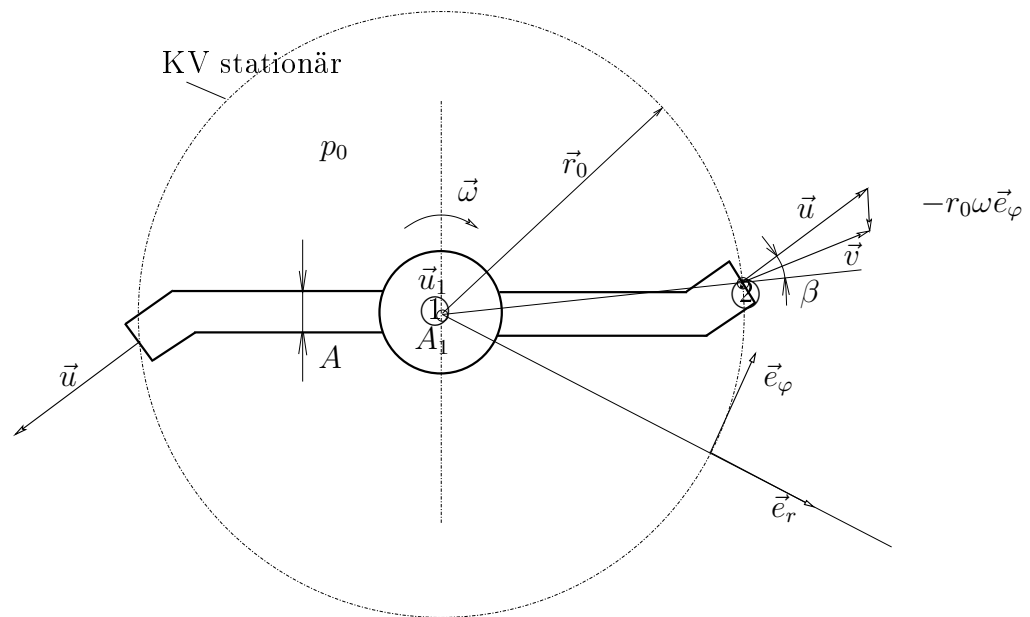
Drehimpulssatz

5.1 Rasensprenger.

Ein zweiarmiger Rasensprenger mit vertikaler Achse muss bei stationärer Drehung ein Reibungsmoment \vec{M}_r überwinden. Der Wasserdruck in der Zuleitung unmittelbar vor Eintritt in die beiden Arme beträgt $p_0 - \Delta p$ mit dem Atmosphärendruck p_0 . Die Querschnittsfläche jedes Armes ist A und die Querschnittsfläche der Zuleitung $A_1 = 2A$. Weiters sind auch r_0, β und ρ bekannt.



Bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$, mit welcher der Rasensprenger rotiert, sowie den Volumenstrom \dot{V} .



$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} = u \cos \beta \vec{e}_r + u \sin \beta \vec{e}_\varphi$$

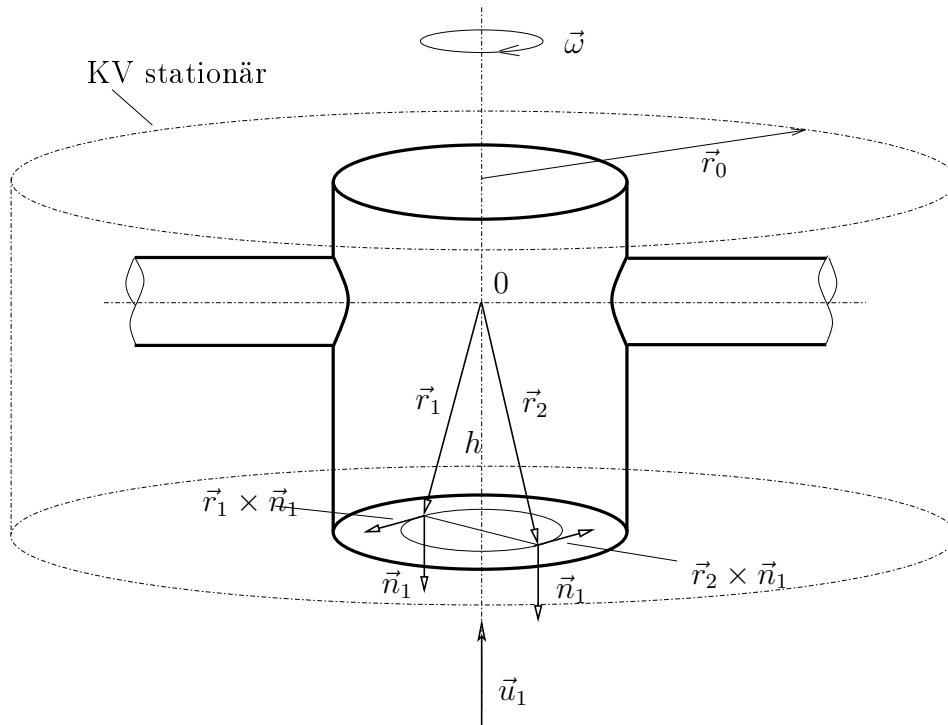
... Austrittsgeschwindigkeit im bewegten Bezugssystem

$$\vec{v} = \vec{u} + r_0 \omega (-\vec{e}_\varphi) = u \cos \beta \vec{e}_r + (u \sin \beta - r_0 \omega) \vec{e}_\varphi$$

... Austrittsgeschwindigkeit im ruhenden Bezugssystem

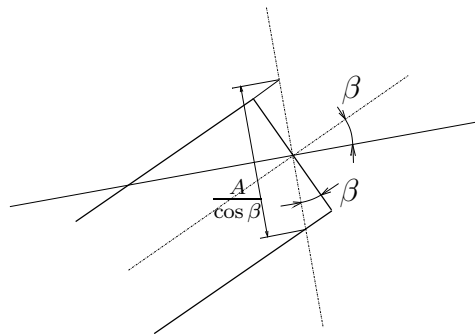
5.1.1 Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$

Kontrollvolumen



Massenbilanz MB

für $r_0 \gg A$ gilt:



$$A: \quad v_n = \vec{u} \cdot \vec{e}_r = (u \cos \beta \vec{e}_r + u \sin \beta \vec{e}_\varphi) \cdot \vec{e}_r = u \cos \beta$$

$$A_1: \quad v_n = \vec{u}_1 \cdot (-\vec{e}_z) = -u_1$$

$$\oint_{\partial \text{KV}} \rho v_n \, dO = 0 = -\rho u_1 A_1 + 2\rho u \cos \beta \frac{A}{\cos \beta} \quad \rightarrow \quad u_1 = u$$

Bernoulli-Gleichung für ein rotierendes Bezugssystem

allgemein:

$$\boxed{\frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} - \frac{r^2 \omega^2}{2} = \text{const}}$$

entlang einer Stromlinie von ①-②, $\rho = \text{const}$:

$$\begin{aligned} \frac{p_0 - \Delta p}{\rho} + \frac{u_1^2}{2} &= \frac{p_0}{\rho} + \frac{u^2}{2} - \frac{r_0^2 \omega^2}{2} \\ \rightarrow \Delta p &= \frac{\rho r_0^2 \omega^2}{2} \\ \rightarrow \omega &= \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho r_0^2}} \end{aligned}$$

5.1.2 Volumenstrom \dot{V}

Drehimpulsbilanz DIB

für ein ruhendes Bezugssystem:

$$\boxed{\oint_{\partial \text{KV}} \rho v_n (\vec{r} \times \vec{v}) \, dO + \oint_{\partial \text{KV}} p (\vec{r} \times \vec{n}) \, dO = \int_{\text{KV}} \rho (\vec{r} \times \vec{g}) \, dV + \vec{M}_r}$$

$$\oint_{\partial \text{KV}} \rho v_n (\vec{r} \times \vec{v}) \, dO \quad \dots \quad \text{konvektiver Term}$$

$$\oint_{\partial \text{KV}} p (\vec{r} \times \vec{n}) \, dO \quad \dots \quad \text{Druckterm}$$

$$\int_{\text{KV}} \rho (\vec{r} \times \vec{g}) \, dV \quad \dots \quad \text{Schwerkraftterm}$$

$$\vec{M}_r \quad \dots \quad \text{auf das Medium wirkende Moment}$$

konvektiver Term

$$\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi = \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_r \times \vec{e}_z = \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = -\vec{e}_\varphi, \quad \vec{e}_i \times \vec{e}_i = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r = 1, \quad \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\varphi = 0$$

für A_1 gilt: $\vec{r} = r\vec{e}_r - h\vec{e}_z$

$$\begin{aligned} \int_{A_1} \rho v_n (\vec{r} \times \vec{v}) \, dO &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{\frac{A_1}{\pi}}} \rho(-u_1) (r\vec{e}_r - h\vec{e}_z) \times (u_1\vec{e}_z) \, d(r, \varphi) \\ &= \rho u_1^2 \underbrace{\int_0^{2\pi} \vec{e}_\varphi \, d\varphi}_0 \int_0^{\sqrt{\frac{A_1}{\pi}}} r \, dr = 0 \end{aligned}$$

für A gilt:

$$\begin{aligned} \vec{r} \times \vec{v} &= \vec{r}_0 \times \vec{v} = (r_0\vec{e}_r) \times (u \cos \beta \vec{e}_r + (u \sin \beta - r_0\omega) \vec{e}_\varphi) \\ &= r_0 (u \sin \beta - r_0\omega) \vec{e}_z \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \oint_{\partial KV} \rho v_n (\vec{r} \times \vec{v}) \, dO = 2\rho u \cos \beta r_0 (u \sin \beta - r_0\omega) \frac{A}{\cos \beta} \vec{e}_z$$

Druckterm

$$\begin{aligned} \oint_{\partial KV} p (\vec{r} \times \vec{n}) \, dO &= \underbrace{\oint_{\partial KV} p_0 (\vec{r} \times \vec{n}) \, dO}_0 - \int_{A_1} p_0 (\vec{r} \times \vec{n}) \, dO \\ &\quad + \int_{A_1} (p_0 - \Delta p) (\vec{r} \times \vec{n}) \, dO \\ &= -\Delta p \int_{A_1} (r\vec{e}_r - h\vec{e}_z) \times (-\vec{e}_z) \, d(r, \varphi) \\ &= -\Delta p \underbrace{\int_0^{2\pi} \vec{e}_\varphi \, d\varphi}_0 \int_0^{\sqrt{\frac{A_1}{\pi}}} r \, dr = 0 \end{aligned}$$

Anschauliche Begründung:

Zu jedem Punkt in A_1 mit Ortsvektor \vec{r}_1 und Richtungsvektor $\vec{r}_1 \times \vec{n}_1$ gibt es genau einen gegenüberliegenden Punkt mit Ortsvektor \vec{r}_2 und entgegengesetztem Richtungsvektor $\vec{r}_2 \times \vec{n}_2$. Das Druckintegral über die Fläche A_1 verschwindet.

Schwerkraftterm

$$\int_{KV} \rho (\vec{r} \times \vec{g}) \, dV = 0 \quad \text{aus (obigen) Symmetriegründen!}$$

Moment

$$\vec{M} = \vec{M}_r = M_r \vec{e}_z$$

Das alles eingesetzt in die DIB ergibt

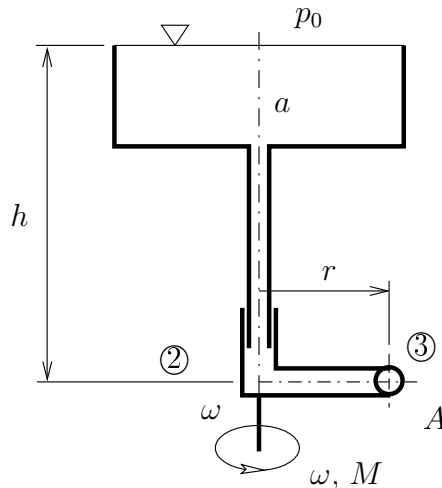
$$\begin{aligned}
 & 2\rho r_0 u (u \sin \beta - r_0 \omega) A \vec{e}_z = M_r \vec{e}_z \\
 \rightarrow & 2\rho r_0 u^2 \sin \beta A - 2\rho r_0^2 \omega u A = M_r \\
 \Rightarrow & u^2 - \frac{r_0 \omega}{\sin \beta} u - \frac{M_r}{2\rho r_0 \sin \beta A} = 0 \\
 \rightarrow & \text{für } M_r > 0: \quad u = \frac{r_0 \omega}{2 \sin \beta} + \sqrt{\left(\frac{r_0 \omega}{2 \sin \beta}\right)^2 + \frac{M_r}{2\rho r_0 \sin \beta A}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \dot{V} &= 2Au \\
 &= \frac{Ar_0 \omega}{\sin \beta} + \sqrt{\left(\frac{Ar_0 \omega}{\sin \beta}\right)^2 + \frac{2AM_r}{\rho r_0 \sin \beta}}
 \end{aligned}$$

5.2 Segnersches Wasserrad.

Aus einem Behälter strömt Flüssigkeit durch ein vertikales Rohr einem an den Stellen ② und ③ abgewinkelten Rohr zu, das sich reibungsfrei um die Achse a dreht. An das drehbare Rohr ist eine Welle w angesetzt, durch die ein Drehmoment M an einen Verbraucher abgegeben wird. Das Rohr rotiere mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω und habe die Querschnittsfläche A .

Man berechne das Moment M . Wie groß ist der Massenstrom \dot{m} ?



Kapitel 6

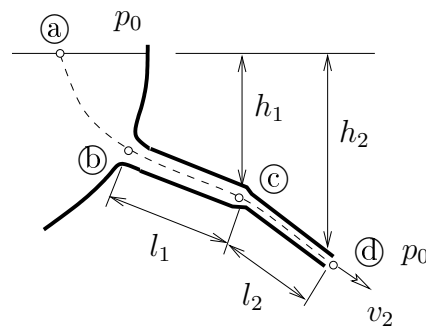
Instationäre Bernoulli-Gleichung

6.1 Druckleitung eines Stausees.

Aus einem Stausee führt eine Rohrleitung, die zunächst durch einen Schieber verschlossen ist. Der Schieber wird zur Zeit $t = 0$ plötzlich geöffnet.

Für die Werte $h_1 = 70$ m, $h_2 = 100$ m, $l_1 = 250$ m, $l_2 = 50$ m, $d_1 = 3,5$ m, $d_2 = 0,7$ m und $\rho = 1 \cdot 10^3$ kg/m³ berechne man

1. die in den beiden Teilleitungen 1 und 2 unmittelbar nach Öffnen des Schiebers herrschenden Beschleunigungen a_{01} und a_{02} .
2. den Überdruck $p_C - p_0$, der unmittelbar nach Öffnen des Schiebers im Punkt C herrscht.
3. die Ausströmgeschwindigkeit v_2 als Funktion der Zeit, $v_2 = v_2(t)$.



6.1.1 Beschleunigungen $a_1 = \frac{\partial u_1}{\partial t}$ und $a_2 = \frac{\partial u_2}{\partial t}$

Instationäre Bernoulligleichung

$$\int \frac{\partial u}{\partial t} ds + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} + gh = \text{const}$$

reibungsfrei, inkompressibel, entlang Stromlinie

(a)-(d):

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{0^2}{2} + g \cdot h_2 = \int_{\text{(a)}}^{\text{(d)}} \frac{\partial u}{\partial t} ds + \frac{p_0}{\rho} + \frac{u_2^2}{2} + g \cdot 0$$

$$\int_{\text{(a)}}^{\text{(d)}} \dots ds = \int_{\text{(a)}}^{\text{(b)}} \dots ds + \int_{\text{(b)}}^{\text{(c)}} \dots ds + \int_{\text{(c)}}^{\text{(d)}} \dots ds$$

$$\int_{\text{(a)}}^{\text{(b)}} \frac{\partial u}{\partial t} ds \approx 0$$

(bis knapp vor den Einlauf: $u \ll 1$; im Einlauf zwar große Beschleunigung, aber kleine Länge)

$$\int_{\text{(b)}}^{\text{(c)}} \frac{\partial u}{\partial t} ds = \frac{du_1}{dt} \int_{\text{(b)}}^{\text{(c)}} ds$$

$$= \frac{du_1}{dt} l_1$$

mit Massenbilanz MB: $u_1 \frac{d_1^2 \pi}{4} = u_2 \frac{d_2^2 \pi}{4} \rightarrow$

$$= \frac{d_2^2}{d_1^2} l_1 \frac{du_2}{dt}$$

$$\int_{\text{(c)}}^{\text{(d)}} \frac{\partial u}{\partial t} ds = l_2 \frac{du_2}{dt}$$

$$\Rightarrow gh_2 = \frac{u_2^2}{2} + \frac{d_2^2}{d_1^2} l_1 \frac{du_2}{dt} + l_2 \frac{du_2}{dt}$$

$$\frac{du_2}{dt} \underbrace{\left(l_2 + \frac{d_2^2}{d_1^2} l_1 \right)}_L = gh_2 - \frac{u_2^2}{2}$$

$$\frac{du_2}{dt} = \frac{1}{L} \left(gh_2 - \frac{u_2^2(t)}{2} \right)$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist $u_2 = 0$:

$$\Rightarrow a_{02} = \left. \frac{du_2}{dt} \right|_{t=0} = \frac{gh_2}{L},$$

aus Massenbilanz $u_1 d_1^2 = u_2 d_2^2$: $\frac{du_1}{dt} d_1^2 = \frac{du_2}{dt} d_2^2$

$$\Rightarrow a_{01} = \frac{d_2^2}{d_1^2} a_{02}$$

6.1.2 Druck an der Stelle C nach Öffnen des Schiebers

Ⓐ-Ⓒ:

$$\frac{p_0}{\rho} + gh_2 = \frac{p_{\text{C}}}{\rho} + \frac{u_1^2}{2} + g(h_2 - h_1) + l_1 \frac{du_1}{dt}$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist $u_1 = 0$, $\left. \frac{du_1}{dt} \right|_{t=0} = a_{01}$:

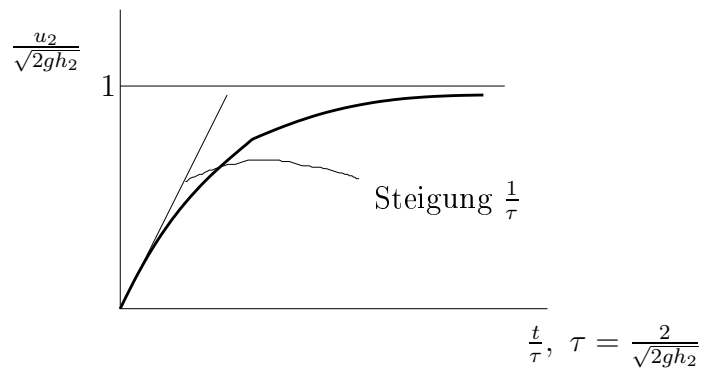
$$\Rightarrow p_{\text{C}} - p_0 = \rho(gh_1 - a_{01}l_1)$$

6.1.3 Zeitlicher Verlauf $u_2(t)$

$$\frac{du_2}{dt} = \frac{1}{L} \left(gh_2 - \frac{u_2^2(t)}{2} \right)$$

Trennung der Variablen:

$$\begin{aligned} \frac{du_2}{gh_2 - \frac{u_2^2}{2}} &= \frac{dt}{L} \\ \frac{1}{gh_2} \frac{du_2}{1 - \underbrace{\frac{u_2^2}{2gh_2}}_{x^2}} &= \frac{dt}{L} \\ x &= \frac{u_2}{\sqrt{2gh_2}} \\ dx &= \frac{du_2}{\sqrt{2gh_2}} \\ \rightarrow \frac{dx}{1-x^2} &= \frac{dt}{2L} \sqrt{2gh_2} \\ \int \frac{dx}{1-x^2} &= \operatorname{arctanh} x \\ \Rightarrow \operatorname{arctanh} \frac{u_2}{\sqrt{2gh_2}} &= t \frac{\sqrt{2gh_2}}{2L} \\ \frac{u_2(t)}{\sqrt{2gh_2}} &= \tanh\left(\frac{\sqrt{2gh_2}}{2L} t\right) \end{aligned}$$

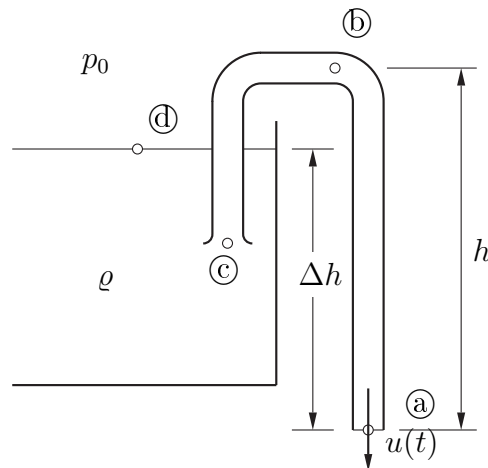


Zum Vergleich stationär gerechnet:

$$\begin{aligned} \textcircled{a} - \textcircled{d} : \frac{p_0}{\rho} + gh_2 &= \frac{p_0}{\rho} + \frac{u_2^2}{2} \\ \Rightarrow u_2 &= \sqrt{2gh_2} \end{aligned}$$

6.2 Heberleitung.

Eine Heberleitung der Länge l und konstanten Querschnitts taucht in einen großen Flüssigkeitsbehälter ein. Die Leitung ist zunächst am unteren Ende verschlossen und vollständig mit Flüssigkeit gefüllt. Die Ausflußöffnung liegt um Δh unter dem Flüssigkeitsspiegel im Behälter.



Bestimmen Sie

1. die Beschleunigung a_0 im Rohr zum Zeitpunkt $t = 0$, an dem die Heberleitung plötzlich geöffnet wird,
2. den Druck p_b , der unmittelbar nach Öffnen der Leitung bzw. für große Zeiten im Punkt \textcircled{b} herrscht.

3. die Ausströmgeschwindigkeit $u(t)$ als Funktion der Zeit und die Geschwindigkeit u_∞ , die sich für große Zeiten einstellt,

Skizzieren Sie den Druckverlauf für $t = 0$ und $t \rightarrow \infty$.

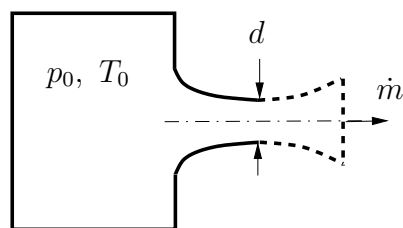
Kapitel 7

Kompressible Strömung

7.1 Ausströmen aus einem Kessel.

Aus einem Kessel (Ruhedruck $p_0 = 8$ bar, Ruhetemperatur $T_0 = 350$ K) strömt durch eine Öffnung Luft aus. Der Außendruck ist $p_a = 1$ bar, der minimale Durchmesser ist $d = 50$ mm. $c_p = 1005$ J/kg/K, $\kappa = 1,4$. Man berechne:

1. die Ausströmgeschwindigkeit u und den Massenstrom \dot{m} für den Fall, daß der kleinste Querschnitt der Austrittsquerschnitt ist.
2. die Ausströmgeschwindigkeit u_e im Endquerschnitt, \dot{m} und Austrittsquerschnitt A_e für den Fall, daß die Öffnung eine ideale Lavaldüse darstellt (Überschall, $p_e = p_a = 1$ bar).
3. die in den Punkten 1. und 2. gesuchten Größen für $p_0 = 1,5$ bar, wobei aber für die zweite Aufgabenstellung der in 2. berechnete Endquerschnitt der Lavaldüse zu verwenden ist (Lavaldüse mit Stoß).



7.1.1 Ausströmgeschwindigkeit u , Massenstrom \dot{m} für $p_0 = 8$ bar (konvergente Düse)

Wird Schallgeschwindigkeit in $A_{min} = A_e$ erreicht?

Das testen wir mit dem geg. Ruhedruckverhältnis und dem kritische Ruhedruckverhältnis, entweder aus der ITB für $M = M^* = 1$ oder entsprechend:

$$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} = 0,528 \quad (\text{oder aus Isentropentabelle für } M = M^* = 1)$$

$$\frac{p_a}{p_0} = \frac{1}{8} = 0.125 < \frac{p^*}{p_0} = 0.528$$

→ $M = 1$ wird erreicht

$$\rightarrow A^* = A_{min} = A_e$$

Somit muß die Ausströmgeschwindigkeit u_e die kritische Schallgeschwindigkeit sein:

$$\begin{aligned} u_e &= c^* \\ \frac{c^*}{c_0} &= \sqrt{\frac{2}{\kappa + 1}} \\ c_0 &= \sqrt{c_p T_0 (\kappa - 1)} \\ \rightarrow c_0 &= 375.10 \text{ m/s} \\ \rightarrow c^* &= 342.42 \text{ m/s} \\ \Rightarrow u_e &= 342.42 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Herleitung $\frac{c^*}{c_0}$
Energieerhaltung:

$$c_p T_0 = c_p T + \frac{v^2}{2}$$

Schallgeschwindigkeit für ideale Gase:

$$c^2 = \frac{\kappa p}{\rho}$$

Zustandsgleichung für ideale Gase:

$$p = c_p \frac{\kappa - 1}{\kappa} \rho T$$

$$\begin{aligned} \rightarrow c_p T &= \frac{c^2}{\kappa - 1} \\ \rightarrow \frac{c_0^2}{\kappa - 1} &= \frac{c^2}{\kappa - 1} + \frac{v^2}{2} \\ &= \frac{c^{*2}}{\kappa - 1} + \frac{c^{*2}}{2} = \frac{\kappa + 1}{2(\kappa - 1)} c^{*2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{c^*}{c_0} = \sqrt{\frac{2}{\kappa + 1}} = \sqrt{\frac{T^*}{T_0}}$$

Der Massenstrom \dot{m} folgt aus:

$$\begin{aligned}\dot{m} &= \rho u A = \rho_e u_e A_e = \rho^* A^* c^* \\ \frac{\rho^*}{\rho_0} &= 0.634 \quad \text{aus Isentropentabelle}\end{aligned}$$

ideale Gas-Gleichung:

$$\begin{aligned}\rho_0 &= \frac{p_0}{T_0} \frac{\kappa}{c_p (\kappa - 1)} \\ \rightarrow \rho_0 &= 7.96 \text{ kg/m}^3 \\ \rightarrow \rho^* &= 5.05 \text{ kg/m}^3\end{aligned}$$

mit $A^* = A_{min}$:

$$\Rightarrow \dot{m} = 3.39 \text{ kg/s}$$

7.1.2 Ausströmgeschwindigkeit u_e , Massenstrom \dot{m} und Austrittsquerschnitt A_e für $p_0 = 8$ bar (Lavaldüse)

Wird Schallgeschwindigkeit in $A_{min} = A_e$ erreicht?

$M = 1$ wird in A_{min} erreicht da $\frac{p_a}{p_0} < \frac{p^*}{p_0}$. Ausströmgeschwindigkeit u_e :

$$\begin{aligned}u_e &= M^*_e c^* \\ M^*_e &= 1.638 \text{ aus Isentropentabelle (Überschall) für } \frac{p_a}{p_0} = 0.125 \\ c^* &= 342.42 \text{ m/s s.o. (hängt nur von Ruhegrößen ab)} \\ \Rightarrow u_e &= 560.88 \text{ m/s}\end{aligned}$$

Der Massenstrom \dot{m} ist wieder:

$$\begin{aligned}\dot{m} &= \rho u A = \rho_e u_e A_e = \rho^* u^* A^* \\ \Rightarrow \dot{m} &= 3.39 \text{ kg/s}\end{aligned}$$

Austrittsquerschnitt A_e :

$$\begin{aligned}\rho_e u_e A_e &= \rho^* c^* A^* \\ \rightarrow \frac{A^*}{A_e} &= \frac{\rho_e u_e}{\rho^* c^*} = 0.583 \quad \text{aus Isentropentabelle bei } \frac{p_e}{p_0} = 0.125 \\ A^* = A_{min} &= \frac{d^2 \pi}{4} \\ \Rightarrow d_e &= 65.5 \text{ mm}\end{aligned}$$

7.1.3 Alle Größen für $p_0 = 1.5$ bar.

Ausströmgeschwindigkeit u und Massenstrom \dot{m} für die konvergente Düse

Wird Schallgeschwindigkeit in $A_{min} = A_e$ erreicht?

$$\frac{p_a}{p_0} = \frac{1}{1.5} = 0.667$$

$$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} = 0.528 \quad \text{oder aus Isentropentabelle für } M = M^* = 1$$

$\Rightarrow M = 1$ wird nicht erreicht, da $\frac{p_a}{p_0} > \frac{p^*}{p_0} \Rightarrow$ **reiner Unterschall**

$$u = M^* c^* = u_e$$

Isentropentabelle Unterschall + lineare Interpolation:

$$M^* = 0.810$$

Ausströmgeschwindigkeit u_e :

$$\begin{aligned} u_e &= M^* c^* \\ \text{mit } c^* &= 342.42 \text{ m/s} \\ \Rightarrow u_e &= 277.36 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Massenstrom \dot{m} :

$$\begin{aligned} \dot{m} &= \rho u A = \rho_e u_e A_e \\ \frac{\rho_e}{\rho_0} &= 0.748 \quad \text{aus Isentropentabelle } \frac{p_a}{p_0} = 0.667 \\ \text{mit } \rho_0 &= 1.49 \text{ kg/m}^3 \\ &\rightarrow \rho_e = 1.12 \text{ kg/m}^3 \\ \text{mit } A_e = A_{min} &= \frac{d^2 \pi}{4}: \\ &\Rightarrow \dot{m} = 0.61 \text{ kg/s} \end{aligned}$$

Ausströmgeschwindigkeit u_e und Massenstrom \dot{m} für die Lavaldüse

Betriebsart?

Laut Angabe ist die zuvor berechnete Lavaldüse zu verwenden. D.h.

$$\begin{aligned} \frac{A_{min}}{A_e} &= \frac{A^*}{A_e} = 0.583 \text{ s.o.} \\ \frac{A_{min}}{A_e} &= \frac{\rho u}{\rho^* c^*} \end{aligned}$$

$$\text{Isentropentabelle (Unterschall): } \frac{p_e}{p_0} \approx 0.9$$

$$\text{Isentropentabelle (Überschall): } \frac{p_e}{p_0} \approx 0.12$$

$$\rightarrow \frac{p_a}{p_0} = 0.667 \text{ liegt dazwischen}$$

\rightarrow Verdichtungsstoß

Lage x_s des Stoßes? Iteration!

(Formeln siehe Skriptum)

1. Annahme: $\frac{A^*}{A_s}$ zwischen $\left[\frac{A^*}{A_e}; 1\right]$
2. Ruhedruckverlust $\frac{\hat{p}_0}{p_0}$: Isentropentabelle (*Überschall*) für $\frac{\rho_s u_s}{\rho^* c^*} = \frac{A^*}{A_s}$
3. $\frac{\hat{A}^*}{A^*} = \frac{p_0}{\hat{p}_0} = \frac{1}{\frac{\hat{p}_0}{p_0 1.}}$
4. $\frac{\hat{A}^*}{A_e} = \underbrace{\frac{\hat{A}^*}{A^*}}_2 \cdot \underbrace{\frac{A^*}{A_e}}_{\text{Geometrie}}$
5. $\frac{p_e}{\hat{p}_0}$: aus Isentropentabelle (*Unterschall*) für $\frac{\rho u}{\rho^* c^*} = \underbrace{\frac{\hat{A}^*}{A_e}}_3$
6. Enddruck p_e : $p_e = \underbrace{\frac{p_e}{\hat{p}_0}}_4 \cdot \underbrace{\frac{\hat{p}_0}{p_0}}_1 p_0$
7. Wahl von neuem $\frac{A^*}{A_s}$ bzw. $\frac{\hat{p}_0}{p_0} \rightarrow 1.$ bzw. $2.$

0.	1.	2.	3.	4.	5.
$\frac{A^*}{A_s}$	$\frac{\hat{p}_0}{p_0}$	$\frac{\hat{A}^*}{A^*}$	$\frac{\hat{A}^*}{A_e}$	$\frac{p_e}{\hat{p}_0}$	p_e
0.748	0.856	$\frac{1}{0.856} = 1.168$	$1.168 \cdot 0.583 = 0.681$	0.874	$0.874 \cdot 0.856 \cdot 1.5 = 1.122 \text{ bar}$
0.643	0.767	$\frac{1}{0.767} = 1.304$	$1.304 \cdot 0.583 = 0.760$	0.835	$0.835 \cdot 0.767 \cdot 1.5 = 0.961 \text{ bar}$
0.668	0.789	$\frac{1}{0.789} = 1.267$	$1.267 \cdot 0.583 = 0.739$	0.846	$0.846 \cdot 0.739 \cdot 1.5 = 1.001 \text{ bar}$

Lage von x_s , aus $\frac{A^*}{A_s}$, wenn $A(x)$!

$$\begin{aligned} \rightarrow M_e &= 0.49 \\ \rightarrow M_e^* &= 0.53 \\ \rightarrow u_e &= M_e^* c^* = 183.18 \text{ m/s} \\ \rho_0 &= 1.49 \text{ kg/m}^3 \text{ w.o.} \\ \frac{\rho^*}{\rho_0} &= 0.634 \text{ w.o.} \\ T_e &= \frac{T_e}{T_0} \cdot T_e = 333.65 \text{ K} \\ \rho_e &= 1.044 \text{ kg/m/s} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \dot{m} = \rho^* c^* A^* = \rho_e u_e A_e = 0.635 \text{ kg/s}$$

7.2 Pitotrohr.

In Unterschallströmungen läßt sich durch Messung der Druckdifferenz Δp zwischen Staupunktendruck p_S und statischem Druck p_∞ die Strömungsgeschwindigkeit bestimmen. Es sei $p_\infty = 1 \text{ bar}$, die Temperatur des strömenden Mediums $T_\infty = 288 \text{ K}$.

Man berechne die Strömungsgeschwindigkeit v

1. bei inkompressibler Strömung,
2. für ein ideales Gas konstanter spezifischer Wärmen ($c_p = 1005 \text{ J/kg K}$, $\kappa = 1,4$)
3. und bestimme die relative Abweichung der Ergebnisse für inkompressible von jenen für kompressible Strömung für die Druckdifferenzen $\Delta p_1 = 0.3 \text{ Pa}$, $\Delta p_2 = 250 \text{ Pa}$ und $\Delta p_3 = 4000 \text{ Pa}$.

7.3 Lavaldüse.

Eine Lavaldüse habe einen minimalen Durchmesser $A_{min} = 5 \text{ cm}^2$ und einen doppelt so großen Endquerschnitt, $A_e = 2A_{min}$. Ruhedruck und Ruhetemperatur vor der Düse sind durch $p_0 = 3 \text{ bar}$ und $T_0 = 300 \text{ K}$ gegeben, beim strömenden Medium handle es sich um ein ideales Gas mit $\kappa = 1,4$ und $c_p = 1005 \text{ J/kg K}$. In der Düse stehe ein senkrechter Verdichtungsstoß am Querschnitt $A_s = 6,25 \text{ cm}^2$.

Berechnen Sie mit Hilfe der Isentropentabelle den Druck p_e und die Machzahl M_e im Endquerschnitt.

7.4 Lavaldüse.

Gegeben ist eine Lavaldüse mit minimalem Querschnitt $A_{min} = 10 \text{ cm}^2$. Der Ruhezustand vor der Düse ist durch $p_0 = 4.9 \text{ bar}$ und $T_0 = 300 \text{ K}$ gegeben, der Umgebungsdruck am Ende der Düse ist $p_e = 1 \text{ bar}$.

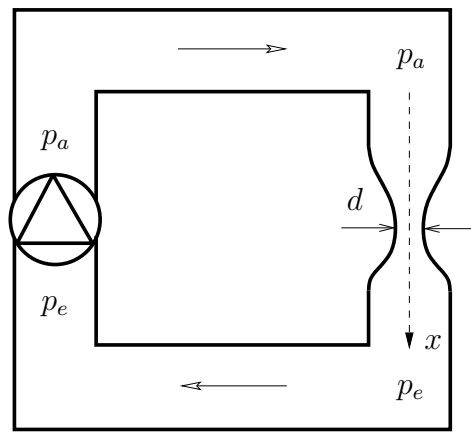
1. Bestimmen Sie den Endquerschnitt A_e und den Massenstrom \dot{m} durch die Düse für den Fall, daß es sich um eine ideale Lavaldüse im Überschallbetrieb handelt.
2. Erhöht man den Umgebungsdruck am Düsenende auf den Wert $p'_e = 4 \text{ bar}$, so bildet sich in der Düse ein senkrechter Verdichtungsstoß aus. Bestimmen Sie den Stoßquerschnitt A_s .
3. Welcher Umgebungsdruck p''_e ist nötig, damit der Massenstrom $\dot{m}_c = 0.7\dot{m}_{max}$ durch die Düse strömt?

7.5 Lavaldüse.

Eine Lavaldüse, deren Querschnittsverlauf gegeben ist, wird in einem geschlossenen Kreislauf durch einen Kompressor betrieben. Das Druckverhältnis des Kompressors $\frac{p_a}{p_e}$ sei 2.

Berechnen Sie die Stoßlage, füllen Sie die unten stehende Tabelle aus und skizzieren Sie den Druckverlauf. Beachten Sie, daß nach dem Stoß $\frac{A^*}{A}$ wie auch $\frac{p}{p_0}$ nicht mehr sinnvoll sind und statt dessen besser eine andere Größe eingetragen wird. Welche? ($\kappa = 1,4$, $c_p = 1005 \text{ J/kg/K}$)

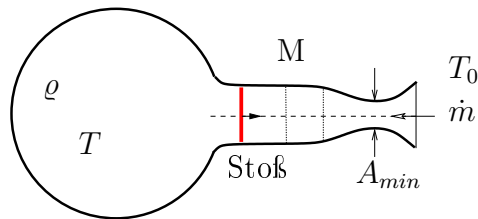
Hinweis: $\frac{\hat{p}_0}{p_0} \approx \frac{p_e}{p_a}$



7.6 Intermittierender Windkanal.

Ein Kessel, der anfänglich zu 90% evakuiert ist, betreibt eine Lavaldüse bei einer Machzahl $M = 3$. Durch den Unterdruck im Kessel strömt Luft aus der Umgebung in den Kessel. Der Querschnitt der Meßstrecke, die sich zwischen Lavaldüse und Kessel befindet, beträgt 100 cm^2 . Die maximale Meßzeit (d.h. die Zeitspanne, in der die Strömung in der Meßstrecke als stationär angesehen werden kann) betrage 20 s. Der Umgebungsdruck ist mit $p_0 = 1 \text{ bar}$ gegeben.

Unter der vereinfachenden Annahme, daß die Ruhetemperatur im Kessel gleich der Außentemperatur (15 °C) sei, berechne man das mindestens notwendige Kesselvolumen.



Kapitel 8

Reibungsbehaftete Strömung

8.1 Druckabfall in einer Gasleitung

In einer Gasleitung ($\rho_{Gas} = 1,18 \text{ kg/m}^3$, $\nu_{Gas} = 15 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$) von 0,2 km Länge und 150 mm Durchmesser strömt das Gas mit einer Geschwindigkeit von 20 m/s. Die Rauigkeit k sei 0,075 mm (geschweißte Stahlrohre).

Man berechne den Druckabfall Δp . Die Strömung kann als inkompressibel angenommen werden.

Bernoulligleichung ① – ②:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{u_1^2}{2} + gh = \frac{p_2}{\rho} + \frac{u_2^2}{2} + gh + \frac{1}{\rho} \sum \Delta p_v$$

$$\text{Rohrwiderstand: } \Delta p_v = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho u^2}{2}$$

$$\text{andere Verluste: } \Delta p_v = \zeta \frac{\rho u^2}{2}$$

Massenbilanz ①-②:

$$\begin{aligned} \dot{m} = \rho u A = \text{const} &\quad \rightarrow \quad \dot{V} = u A = \text{const} \\ \rightarrow \quad \rho U_1 A_1 = \rho U_2 A_2 &\quad \Rightarrow \quad u_1 = u_2 = u \end{aligned}$$

mit der Bernoulligleichung und $h_1 = h_2$:

$$\begin{aligned} \frac{p_1}{\rho} + \frac{u^2}{2} &= \frac{p_2}{\rho} + \frac{u^2}{2} + \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho u^2}{2} \\ \rightarrow p_1 - p_2 &= \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho u^2}{2} \end{aligned}$$

Rohrwiderstandsbeiwert λ aus Colebrook-Diagramm

Überprüfung „turbulent-laminar“:

$$\text{Re} = \frac{ud}{\nu} = \frac{20 \cdot 0.15}{15 \cdot 10^{-6}}$$

$$\text{Re} = 2 \cdot 10^5 \geq \text{Re}_c \Rightarrow \text{turbulent}$$

Verhältnis $\frac{k}{d}$:

$$\frac{k}{d} = \frac{0.075 \cdot 10^{-3}}{0.15} = 5 \cdot 10^{-4}$$

Colebrook $\rightarrow \lambda = 0.0185$:

$$\rightarrow p_1 - p_2 = 0.0185 \frac{200}{0.15} \frac{1.18 \cdot 400}{2}$$

$$\Delta p = p_1 - p_2 = 5.82 \cdot 10^3 \text{Pa} = 5.82 \cdot 10^{-2} \text{bar}$$

8.2 Heizölleitung.

Durch eine gerade, horizontale Rohrleitung fließt der Volumenstrom \dot{V} an Heizöl. Der reibungsbedingte Druckabfall Δp wird durch eine Ölpumpe ausgeglichen. Die Rohrleitung hat die Länge l , den Durchmesser d_0 und die relative Rauigkeit k/d_0 . Für die Werte $d_0 = 100 \text{mm}$, $k/d_0 = 2 \cdot 10^{-3}$, $l = 750 \text{m}$, $\dot{V} = 108 \frac{\text{m}^3}{\text{h}}$, $\nu = 8 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$ und $\rho = 860 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ berechne man:

1. den Druckabfall Δp in der Rohrleitung,
2. die Antriebsleistung P , die der Pumpe zugeführt werden muß, wenn ihr Wirkungsgrad $\eta_P = 0.7$ beträgt.
3. den Durchmesser d_1 , auf den unter sonst gleichen Verhältnissen die Leitung erweitert werden müßte, wollte man mit der halben Antriebsleistung auskommen.

8.2.1 Druckabfall Δp in der Rohrleitung

Bernoulligleichung ①-②:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{u_1^2}{2} + gh = \frac{p_2}{\rho} + \frac{u_2^2}{2} + gh + \frac{1}{\rho} \sum \Delta p_v$$

$$\text{Rohrwidestand: } \Delta p_v = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho u^2}{2}$$

$$\text{andere Verluste: } \Delta p_v = \zeta \frac{\rho u^2}{2}$$

Massenbilanz ①-②:

$$\begin{aligned} \dot{m} = \rho u A = \text{const} &\quad \rightarrow \quad \dot{V} = u A = \text{const} \\ \rightarrow \quad \rho U_1 A_1 = \rho U_2 A_2 &\quad \Rightarrow \quad u_1 = u_2 = u_m \end{aligned}$$

$$\dot{V} = A u_m = \frac{d_0^2 \pi}{4} u_m \quad \Rightarrow \quad u_m = \frac{4 \dot{V}}{d_0^2 \pi}$$

$$u_m = \frac{4 \cdot 108}{0.1^2 \pi} = 13751 \text{m/h} = 3.82 \text{m/s}$$

mit der Bernoulligleichung und $h_1 = h_2$:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{u_m^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{u_m^2}{2} + \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho u_m^2}{2}$$

$$\rightarrow p_1 - p_2 = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho u_m^2}{2}$$

Rohrwiderstandsbeiwert λ aus Colebrook-Diagramm

Überprüfung „turbulent-laminar“:

$$\text{Re} = \frac{u_m d_0}{\nu} = \frac{3.82 \cdot 0.1}{8 \cdot 10^{-6}}$$

$$\text{Re} = 4.8 \cdot 10^4 \geq \text{Re}_c \Rightarrow \text{turbulent}$$

Verhältnis $\frac{k}{d_0}$:

$$\frac{k}{d_0} = \frac{0.2 \cdot 10^{-3}}{0.1} = 2 \cdot 10^{-3}$$

Colebrook $\rightarrow \lambda = 0.0265$:

$$\rightarrow p_1 - p_2 = 0.0265 \frac{750 \, 860 \cdot 3.82^2}{0.1 \cdot 2}$$

$$p_1 - p_2 = 12.5 \cdot 10^5 \text{Pa} = 12.5 \text{bar}$$

8.2.2 Antriebsleistung P

„Herleitung“ der Antriebsleistung:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{F \cdot s}{t} = \frac{F}{A} Av = p \dot{V}$$

Verlustleistung P_v durch Reibung und Pumpenleistung P :

$$P_v = \Delta p_v \cdot \dot{V}$$

$$P = \frac{P_v}{\eta_P} = \frac{\Delta p_v \cdot \dot{V}}{\eta_P}$$

$$= \frac{12.5 \cdot 10^5 \frac{108}{3600}}{0.7} = 53.4 \cdot 10^3 \text{W}$$

$$P = 53.4 \text{kW}$$

8.2.3 Durchmesser d_1

$$P_1 = \frac{\Delta p_{v1} \cdot \dot{V}}{\eta_P} = \frac{1}{2} P = \frac{\Delta p_v \cdot \dot{V}}{2\eta_P}$$

$$\rightarrow \Delta p_{v1} = \frac{1}{2} \Delta p_v$$

$$\Delta p_{v1} = \frac{1}{2} \Delta p_v \lambda_1(\text{Re}_1(u_{m1}, d_1), \frac{k}{d_1}) \frac{l}{d_1} \frac{\rho u_1^2}{2}$$

\Rightarrow Iteration mit $\frac{d_0}{d_1}$:

1. $\frac{d_0}{d_1} = \xi_i$ wählen.
2. Daraus folgt $d_1 = \frac{d_0}{\xi_i}$.
3. u_{m1} folgt aus $\frac{d_0^2 \pi}{4} u_m = \frac{d_1^2 \pi}{4} u_{m1}$ mit $u_{m1} = u_m \cdot \xi_i^2$
4. $Re_1 = \frac{u_{m1} d_1}{\nu_1}$
5. somit folgt ein $\frac{k}{d_1}$
6. neues λ_1 aus Colebrook-Diagramm
7. neue tatsächlicher Druckverlust $\Delta p_{v1} = \lambda_1 \cdot \frac{l}{d_1} \frac{\rho u_{m1}^2}{2}$
8. $\frac{\Delta p_{v1}}{\Delta p_v} = \frac{1}{2}$? wenn nicht, neues $\frac{d_0}{d_1} = \xi_{i+1}$ wählen und zurück zu „2.“

1. $\xi = \frac{d_0}{d_1}$	2. d_1	3. u_{m1}	4. Re_1	5. $\frac{k}{d_1}$	6. λ_1	7. Δp_{v1}	8. $\frac{\Delta p_{v1}}{\Delta p_v}$
0.5	0.2	0.96	$2.4 \cdot 10^4$	$1 \cdot 10^{-3}$	0.027	$0.4 \cdot 10^5$	0.0318 $\Rightarrow d_1 \downarrow$
0.75	0.13	2.15	$3.6 \cdot 10^4$	$1.5 \cdot 10^{-3}$	0.027	$3 \cdot 10^5$	0.242
0.85	0.116	2.76	$4 \cdot 10^4$	$1.7 \cdot 10^{-3}$	0.0265	$5.6 \cdot 10^5$	0.444
0.87	0.115	2.9	$4.2 \cdot 10^4$	$1.74 \cdot 10^{-3}$	0.0265	$6.25 \cdot 10^5$	0.498

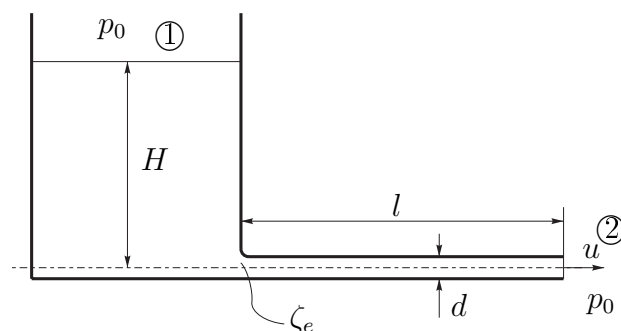
Iteration

$\Rightarrow d_1 = 0.115\text{m}$, (nur um 15% größer als d_0 !!)

8.3 Ausfluß aus einem Gefäß.

Aus einem Gefäß mit großer Querschnittsfläche, das bis zur Höhe $H = 20\text{m}$ gefüllt ist, strömt durch eine horizontale Rohrleitung (Länge $l = 5\text{m}$, Durchmesser $d = 5\text{mm}$, relative Rauigkeit $k/d = 2 \cdot 10^{-3}$) Flüssigkeit der Dichte $\rho = 1000\text{kgm}^{-3}$ und dynamischen Viskosität $\mu = 2 \cdot 10^{-3}\text{Nsm}^{-3}$ aus. Am Einlauf des Behälters in das Rohr tritt ein Einlaufverlust auf ($\zeta_e = 0.5$).

Man bestimme die Strömungsgeschwindigkeit mit Hilfe des Colebrook-Diagramms.



8.3.1 Strömungsgeschwindigkeit in der Rohrleitung

Bernoulligleichung ①-②:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{u_1^2}{2} + gh = \frac{p_2}{\rho} + \frac{u_2^2}{2} + gh + \frac{1}{\rho} \sum \Delta p_v$$

$$\text{Rohrwidestand: } \Delta p_v = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho u^2}{2}$$

$$\text{andere Verluste: } \Delta p_v = \zeta \frac{\rho u^2}{2}$$

mit

$$\sum \Delta p_v = \zeta_e \frac{\rho u^2}{2} + \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho u^2}{2} = \left(\zeta_e + \lambda \frac{l}{d} \right) \frac{\rho u^2}{2}$$

$$\rightarrow u = \sqrt{\frac{2gH}{1 + \zeta_e + \lambda \frac{l}{d}}}$$

vgl. dazu für reibungsfreie Strömung:

$$u_{\text{reibungs frei}} = \sqrt{2gH}$$

da $\lambda = \lambda(\text{Re}, k/d) = \lambda(u) \Rightarrow$ Iteration mit Re:

1. Re wählen.

2. λ aus Colebrook-Diagramm für $k/d = 2 \cdot 10^{-3}$

3. $u = \sqrt{\frac{2gH}{1 + \zeta_e + \lambda \frac{l}{d}}}$

4. $\text{Re}_{\text{neu}} = \frac{u \cdot d}{\nu} \approx \text{Re}$? wenn nicht \Rightarrow „2.“

1. Re	2. λ	3. u	4. Re_{neu}	$> \text{Re}_c$?	
∞	0.023	4.0	$1 \cdot 10^4$	ok	
	0.034	3.32	$8.31 \cdot 10^3$	ok	Iteration
	0.0355	3.26	$8.25 \cdot 10^3$	ok	
	0.036	3.23	$8.1 \cdot 10^3$	ok	
	0.036	3.23			

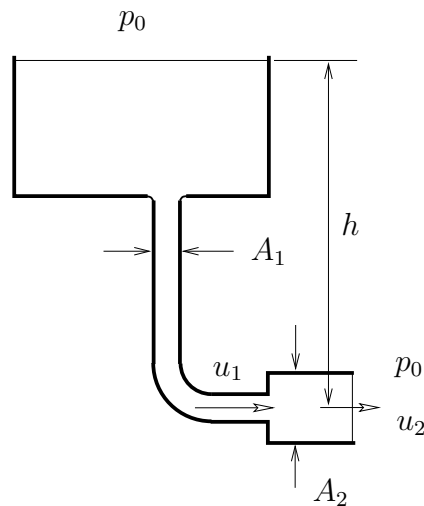
$$\Rightarrow u = 3.23 \text{ m/s} \quad (\text{Vergleiche: } u_{\text{reibungs frei}} = 19.8 \text{ m/s})$$

8.4 Carnotscher Stoßverlust.

Aus einem Behälter strömt Flüssigkeit durch ein Fallrohr aus, das sich unstetig von der Querschnittsfläche A_1 auf die Querschnittsfläche A_2 erweitert. Schwerebeschleunigung g , Höhendifferenz h , A_1 und Dichte ρ seien bekannt.

Berechnen Sie

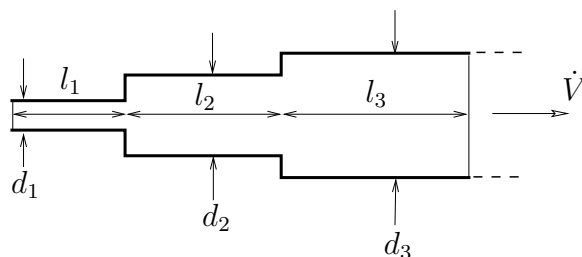
1. den Wert des Flächenverhältnisses A_1/A_2 , für den die Strömungsgeschwindigkeit u_1 maximal wird,
2. u_1 und u_2 für diesen Fall,
3. den Carnot'schen Stoßverlust Δp_{VC} und ζ_C für diesen Fall,
4. die mechanische Energie P_V , die der Strömung pro Zeiteinheit entzogen und in Wärme umgewandelt wird.



8.5 Hintereinanderschaltung von Widerständen.

In einem Anlagensystem sind n Rohrleitungen mit unterschiedlichem Durchmesser und unterschiedlicher Länge aneinandergesetzt.

Man bestimme den Druckverlust Δp in Abhängigkeit vom Volumenstrom \dot{V} für beliebige Rohrelemente.



Hinweis: Zur übersichtlicheren Beschreibung genügt es, die Verlustbeiwerte ζ zu verwenden.

8.6 Parallelschaltung von Widerständen.

In einem Anlagensystem sind n Rohrleitungen mit unterschiedlichem Durchmesser und unterschiedlicher Länge parallel angeordnet.

Man bestimme den Druckverlust Δp in Abhängigkeit vom Volumenstrom \dot{V} für beliebige Rohrelemente.

Hinweis: Zur übersichtlicheren Beschreibung genügt es, die Verlustbeiwerte ζ zu verwenden.

8.7 Beliebige Schaltung von Widerständen.

In einem Anlagensystem sind Rohrleitungen mit unterschiedlichem Durchmesser und unterschiedlicher Länge parallel und hintereinander angeordnet.

Man bestimme den Druckverlust Δp in Abhängigkeit vom Volumenstrom \dot{V} .

Kapitel 9

Potentialtheorie

9.1 Rankine Körper.

Man untersuche die ebene, stationäre und inkompressible Umströmung eines Rankine-Körpers durch Überlagerung einer Quelle im Ursprung und einer Parallelströmung in x -Richtung.

Gesucht sind:

1. Potentialfunktion ϕ und Stromfunktion ψ ,
2. die Geschwindigkeitskomponenten u und v ,
3. die Koordinaten des Staupunkts S ,
4. die Gleichung der Stromlinie durch den Staupunkt S ,
5. die Dicke b des Körpers für $x \rightarrow +\infty$,
6. die Druckverteilung am Rankine-Körper in Form des Druckbeiwertes c_p ,
7. die Kraft \vec{F}_Q , mit der die Quelle gehalten werden müßte,
8. die Kraft \vec{F}_H , mit der ein materiell ausgeführter Körper zu halten wäre.

9.1.1 Potentialfunktion Φ und Stromfunktion Ψ

Wir verwenden das komplexe Potential. Dessen Realteil von der Potentialfunktion gebildet, während die Stromfunktion den Imaginärteil repräsentiert.

Das komplexe Potential setzt sich in unserem Fall aus einer Parallelströmung und einer Quelle im Ursprung zusammen:

$$F(z) = \underbrace{u_\infty z}_{\text{Parallelströmung}} + \underbrace{\frac{q}{2\pi} \ln z}_{\text{Quelle im Ursprung}} = \underbrace{\Phi(x, y)}_{\text{Potential}} + i \underbrace{\Psi(x, y)}_{\text{Stromfunktion}}$$

Zuerst führen wir eine Transformation auf Polarkoordinaten durch:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad \rightarrow \quad z = x + iy = r (\cos \varphi + i \sin \varphi) = r e^{i(\varphi+2\pi n)}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad F(r, \varphi) &= u_\infty r e^{i(\varphi+2\pi n)} + \frac{q}{2\pi} \ln (r e^{i(\varphi+2\pi n)}) \\ &= u_\infty r (\cos \varphi + i \sin \varphi) + \frac{q}{2\pi} [\ln r + i(\varphi + 2\pi n)] \\ &= \Phi(r, \varphi) + i\Psi(r, \varphi) \\ \rightarrow \quad \Phi(r, \varphi) &= \operatorname{Re}(F) = u_\infty r \cos \varphi + \frac{q}{2\pi} \ln r \\ \rightarrow \quad \Psi(r, \varphi) &= \operatorname{Im}(F) = u_\infty r \sin \varphi + \frac{q}{2\pi} (\varphi + 2\pi n) \end{aligned}$$

Rücktransformation in kartesische Koordinaten mittels

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan \frac{y}{x}.$$

9.1.2 Geschwindigkeitskomponenten u und v

$$\begin{aligned} F'(z) &= u - iv \\ &= u_\infty + \frac{q}{2\pi} \frac{1}{z} \\ &= u_\infty + \frac{q}{2\pi r} e^{-i(\varphi+2\pi n)} \\ &= u_\infty + \frac{q}{2\pi r} [\cos(-(\varphi + 2\pi n)) + i \sin(-(\varphi + 2\pi n))] \\ &= u_\infty + \frac{q}{2\pi r} (\cos \varphi - i \sin \varphi) \\ \rightarrow \quad u(r, \varphi) &= \operatorname{Re}(F') = u_\infty + \frac{q}{2\pi r} \cos \varphi \\ \quad v(r, \varphi) &= -\operatorname{Im}(F') = \frac{q}{2\pi r} \sin \varphi \end{aligned}$$

Bemerkung:

$$\begin{aligned} r \rightarrow +\infty : \quad u &\rightarrow u_\infty \\ \quad v &\rightarrow 0 \\ &\dots \text{ Parallelströmung} \end{aligned}$$

9.1.3 Koordinaten des Staupunkts:

Bedingung:

Die Geschwindigkeit \vec{v}_S im Staupunkt S ist 0, d.h. $u_S = 0$ und $v_S = 0$.

$$v_S = \frac{q}{2\pi r_S} \sin \varphi_S = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_S = m\pi \quad \forall m \in \mathbf{Z}$$

$$\begin{aligned}
u_S &= u_\infty + \frac{q}{2\pi r_S} \cos \varphi_S \\
&= u_\infty + \frac{q}{2\pi r_S} (-1)^m \\
&= 0 \\
\Rightarrow r_S &= -\frac{q}{2\pi u_\infty} (-1)^m > 0 \quad \rightarrow \quad m \text{ muß ungerade sein; wir wählen } m = 1 \\
\rightarrow r_S &= \frac{q}{2\pi u_\infty}, \quad \varphi_S = \pi \\
\text{bzw. } x_S &= -\frac{q}{2\pi u_\infty}, \quad y_S = 0
\end{aligned}$$

9.1.4 Gleichung der Stromlinie $r_K(\varphi)$ durch den Ursprung (Körperkontur)

Der Logarithmus im Komplexen ist nicht eindeutig:

$\ln z = \ln (r e^{i(\varphi+2\pi n)}) = \ln r + i(\varphi + 2\pi n)$ (siehe Stromfunktion Ψ). Durch die Wahl von $\varphi \in [0, 2\pi[$ folgt $n = 0$.

Der Wert der Stromfunktion im Staupunkt ergibt sich dadurch zu

$$\varphi_S = \pi \quad \rightarrow \quad \Psi_S = u_\infty r_S \sin \varphi_S + \frac{q}{2\pi} \varphi_S = \frac{q}{2}$$

Die Gleichung der Stromlinie durch den Staupunkt folgt aus der Bedingung $\Psi_K(r_K, \varphi) = \Psi_S(r_S, \varphi_S)$:

$$u_\infty r_K(\varphi) \sin \varphi + \frac{q}{2\pi} \varphi = \frac{q}{2} \quad \rightarrow \quad r_K(\varphi) = \frac{q}{2\pi u_\infty} \frac{\pi - \varphi}{\sin \varphi} = r_S \frac{\pi - \varphi}{\sin \varphi}$$

Dabei gilt

$$\begin{aligned}
\varphi \rightarrow 0 &: r \rightarrow \infty \\
\varphi \rightarrow \pi &: r \rightarrow r_S \\
\varphi \rightarrow 2\pi &: r \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

Bemerkung: $\left. \frac{\pi - \varphi}{\sin \varphi} \right|_{\varphi=\pi} = 1 !$

9.1.5 Dicke b des Körpers für $x \rightarrow \infty$

1. Möglichkeit:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} u \, dy = u_\infty b \\
\text{bzw. } u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} &\rightarrow \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} u \, dy = \int_{\Psi_S}^{\Psi_{\varphi=2\pi}} d\Psi + \int_{\Psi_{\varphi=0}}^{\Psi_S} d\Psi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \Psi_{2\pi} - \Psi_S + \Psi_S - \Psi_0 \\
&= \Psi_{2\pi} - \Psi_0 \\
&= q \\
\Rightarrow \quad u_\infty b = q &\quad \rightarrow \quad b = \frac{q}{u_\infty}
\end{aligned}$$

2. Möglichkeit:

$$\begin{aligned}
b = 2 \cdot y|_{\varphi \rightarrow 0 \text{ bzw. } r \rightarrow +\infty} &= \lim_{\varphi \rightarrow 0} 2r_K(\varphi) \sin \varphi \\
&= \lim_{\varphi \rightarrow 0} 2r_S \frac{\pi - \varphi}{\sin \varphi} \sin \varphi \\
&= 2r_S \pi \\
&= \frac{q}{u_\infty}
\end{aligned}$$

3. Möglichkeit:

Für $x \rightarrow +\infty$ klingt die Störung ab, d.h. $u \rightarrow u_\infty$ und es gilt

$$\dot{V} = u_\infty b = q \quad \rightarrow \quad b = \frac{q}{u_\infty}$$

9.1.6 Druckverteilung am Rankine-Körper mittels Druckbeiwert c_p

Aus der Bernoulligleichung folgt mit $\vec{v}_\infty = u_\infty \vec{e}_x$

$$\begin{aligned}
\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \vec{v}^2 &= p_\infty + \frac{\rho}{2} \vec{v}_\infty^2 \\
\rightarrow \quad p - p_\infty &= \frac{\rho}{2} \vec{v}_\infty^2 - \frac{\rho}{2} \vec{v}^2 \quad \Rightarrow \quad c_p(r, \varphi) := \frac{p - p_\infty}{\frac{\rho}{2} \vec{v}_\infty^2} = 1 - \frac{\vec{v}^2}{\vec{v}_\infty^2} \\
\rightarrow \quad c_p(r, \varphi) &= 1 - \frac{\vec{v}^2}{\vec{v}_\infty^2} \\
&= 1 - \frac{u^2 + v^2}{u_\infty^2} \\
&= -\frac{q}{\pi r u_\infty} \cos \varphi - \left(\frac{q}{2\pi r u_\infty} \right)^2
\end{aligned}$$

Für die Konturlinie gilt $r_K(\varphi) = r_S \frac{\pi - \varphi}{\sin \varphi}$. Der Druckbeiwert auf der Konturlinie c_{pK} lautet daher

$$c_{pK} = -\frac{q}{\pi r_S u_\infty} \cdot \overbrace{\frac{\frac{1}{2} \sin 2\varphi}{\pi - \varphi}}^{\frac{1}{2} \sin 2\varphi} - \underbrace{\left(\frac{q}{2\pi u_\infty r_S} \right)^2}_1 \cdot \left(\frac{\sin \varphi}{\pi - \varphi} \right)^2$$

$$= -\frac{\sin(2\varphi)}{\pi - \varphi} - \left(\frac{\sin \varphi}{\pi - \varphi}\right)^2$$

Bemerkung: Für $\varphi = \pi$ ist $c_{pK} = -(-2) - 1^2 = 1 > 0$.

9.1.7 Kraft \vec{F}_Q , mit der die Quelle gehalten werden muß

Wir wählen das Kontrollvolumen KV folgendermaßen:

1. Linker Rand mit Höhe a bei $x \rightarrow -\infty$
2. Oberer Rand entlang einer Stromlinie
3. Rechter Rand bei $x \rightarrow +\infty$
4. Unterer Rand entlang einer Stromlinie

Das Kontrollvolumen soll die Tiefe t haben.

Abstand Körperkontur – Stromlinie des Kontrollvolumens

Der durch den linken senkrechten Rand einströmende Volumenstrom muß zur Gänze am rechten Rand zwischen den außen liegenden Stromlinien und der Körperkontur wieder abtransportiert werden, da über Stromlinien hinweg kein Volumen transportiert werden kann. Da wir hier eine inkompressible Strömung betrachten, so muß der gesuchte Abstand gleich $\frac{a}{2}$ sein.

Impulssatz

$$\oint_{\partial KV} \rho v_n \vec{v} dO + \oint_{\partial KV} p \vec{n} dO = \vec{F}_Q$$

Beiträge zum konvektiven Integral $\oint_{\partial KV} \rho v_n \vec{v} dO$ des Impulssatzes liefern nur der linke und rechte Rand 1. und 3.. Dabei ist auf die Richtung des Normalenvektors \vec{n} zu achten, der konventionsgemäß aus dem Kontrollvolumen herauszeigt:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial KV} \rho v_n \vec{v} dO &= \underbrace{\rho(-u_\infty)u_\infty \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} at}_{\text{linker Rand 1.}} + \underbrace{\rho(+u_\infty)u_\infty \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \left(2\frac{a}{2} + b\right) t}_{\text{rechter Rand 3.}} \\ &= \rho u_\infty^2 b t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Für die Berechnung des Druckanteils $\oint_{\partial KV} p \vec{n} dO$ nehmen wir an, daß die obere und untere Berandung 2. und 4. des Kontrollvolumens auch im Unendlichen liegt ($a \rightarrow \infty$). Dann herrscht entlang der Oberfläche des gesamten Kontrollvolumens der Druck p_∞ .

$$\oint_{\partial KV} p \vec{n} dO = \lim_{a \rightarrow \infty} \oint_{\partial KV} p \vec{n} dO$$

$$\begin{aligned}
&= p_\infty \underbrace{\oint_{\partial \text{KV}} \vec{n} \, dO}_{=0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Bemerkung: Das Oberflächenintegral des Normalvektors \vec{n} über eine geschlossene Kurve ergibt immer 0.

Einsetzen der beiden Integrale und Auflösen nach \vec{F}_Q liefert:

$$\vec{F}_Q = \rho u_\infty^2 b t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bzw. auf die Längeneinheit t bezogen:

$$\frac{\vec{F}_Q}{t} = \rho u_\infty^2 b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Haltekraft \vec{F}_Q der Quelle zeigt (eigentlich unerwarteterweise) in Richtung der positiven x -Achse, d.h. die Quelle würde sich bei Fehlen dieser Kraft stromaufwärts bewegen!

9.1.8 Kraft \vec{F}_H , mit der ein materiell ausgeführter Körper zu halten wäre

Zwischen der Körperkontur soll jetzt ein fester Körper eingefügt werden. Das Kontrollvolumen KV nehme den Körper aus, d.h. der rechte Rand verlaufe entlang der Körperoberfläche.

1. Möglichkeit:

Impulsbilanz

$$\oint_{\partial \text{KV}} \rho v_n \vec{v} \, dO + \oint_{\partial \text{KV}} p \vec{n} \, dO = 0$$

Bemerkung: Es gibt keinen umströmten Körper *im* Kontrollvolumen, d.h. auf der rechten Seite der Impulsbilanz ist $\vec{F}_K = 0$!

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial \text{KV}} \rho v_n \vec{v} \, dO &= \underbrace{\rho (-u_\infty) u_\infty \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} at}_{\text{linker Rand 1.}} + \underbrace{\rho (+u_\infty) u_\infty \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \left(2\frac{a}{2}\right) t}_{\text{rechter Rand 3.}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Zur Berechnung des Druckintegrals $\oint_{\partial \text{KV}} p \vec{n} \, dO$ wenden wir folgenden Trick an:

1. Wir berechnen das Integral $\oint_{\partial \text{KV}} p_\infty \vec{n} \, dO$ über das gesamte Kontrollvolumen.
2. Dieses ist um den Anteil der Körperoberfläche A_K zu groß (auf der Körperoberfläche herrscht ja nicht der Umgebungsdruck); deshalb ziehen wir $\int_{\partial A_K} p_\infty \vec{n} \, dO$ wieder ab .

3. Jetzt müssen wir nur noch den auf der Körperoberfläche herrschenden Druck dazurechnen. Das Integral $\int_{\partial A_K} p_K \vec{n} dO$ ist die Kraft vom Medium auf den Körper!

$$\begin{aligned} \oint_{\partial \text{KV}} p \vec{n} dO &= \underbrace{\oint_{\partial \text{KV}} p_\infty \vec{n} dO}_{=0} - \underbrace{\int_{\partial A_K} p_\infty \vec{n} dO}_{=p_\infty b t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} + \underbrace{\int_{\partial A_K} p_K \vec{n} dO}_{=-\vec{F}_H} \\ \Rightarrow 0 &= 0 - p_\infty b t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \vec{F}_H \\ \frac{\vec{F}_H}{t} &= -p_\infty b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Kraft \vec{F}_H ist die Kraft, mit der der Körper gehalten werden muß. Also erfährt der Körper eine Kraft in Richtung der positiven x -Achse, d.h. stromabwärts!

2. Möglichkeit: über die Druckverteilung $p_K(\varphi)$

Die Gesamtkraft auf die Oberfläche des Körpers \vec{F}_O :

$$\vec{F}_O = \int_{A_K} p_K(\varphi) \vec{n}(s) \underbrace{dO}_{ds \cdot t}$$

Aus Symmetriegründen gilt

$$F_{Oy} = 0,$$

d.h. wir können uns auf die x -Komponente beschränken:

$$\frac{F_{Ox}}{t} = \int_{A_K} p_K(\varphi) n_x(s) ds$$

Die Haltekraft \vec{F}_H des materiell ausgefüllten Körpers ist der Druckkraft \vec{F}_O entgegengesetzt:

$$\vec{F}_H = -\vec{F}_O$$

Berechnung von $n_x(s)$

Der Normalenvektor \vec{n} zeigt immer aus dem Kontrollvolumen heraus und ist normal zum Tangentialvektor $d\vec{r}$:

$$d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \rightarrow \vec{n} \perp d\vec{r}: \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} dy \\ -dx \end{pmatrix}$$

Der Normalvektor muß die Länge 1 haben. Die einfachste Art, dies zu erreichen, ist durch die Länge des Vektors $|d\vec{n}| = |d\vec{r}| = |d\vec{s}| = \sqrt{dx^2 + dy^2} = ds$ zu dividieren:

$$\vec{n}_0 = \begin{pmatrix} \frac{dy}{ds} \\ -\frac{dx}{ds} \end{pmatrix} \quad \dots \quad \text{Einheitsnormalvektor}$$

mit der x -Komponente:

$$n_x = \frac{dy}{ds}$$

Einsetzen in F_{Hx} :

$$\frac{F_{Hx}}{t} = - \int_{A_K} p_K(\varphi) \frac{dy}{ds} ds = - \int_{A_K} p_K(\varphi) dy$$

Um dieses Integral zu lösen, müssen wir über y integrieren. Wir haben unsere Druckverteilung p_K jedoch als Funktion von φ gegeben. Deshalb haben wir dy in $d\varphi$ umzurechnen.

Berechnung von dy :

In der Formel von $d\vec{r}$ hatten wir schon das dy (die y -Komponente des Vektors!). Dividieren wir durch $d\varphi$ so erhalten wir die gewünschte Abhängigkeit von φ :

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

Hätten wir $\vec{r}(\varphi)$, so können wir uns daraus $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}$ berechnen und haben mit der y -Komponente unser gesuchtes $\frac{\partial y}{\partial \varphi}$:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= r(\varphi) \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \\ &= r_S \frac{\pi - \varphi}{\sin \varphi} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wir brauchen nur die y -Komponente:

$$\begin{aligned} y(\varphi) &= r_S (\pi - \varphi) \\ \rightarrow \frac{\partial y}{\partial \varphi} &= \frac{dy}{d\varphi} = -r_S = -\frac{q}{2\pi u_\infty} \\ \rightarrow dy &= -\frac{q}{2\pi u_\infty} d\varphi \end{aligned}$$

Einsetzen in F_{Hx} :

$$\frac{F_{Hx}}{t} = \int_{A_K} p_K(\varphi) \frac{q}{2\pi u_\infty} d\varphi$$

mit $p_K(\varphi)$ von oben:

$$\begin{aligned} \frac{F_{Hx}}{t} &= \frac{q}{2\pi u_\infty} \int_{A_K} \left(p_\infty + \frac{\rho u_\infty^2}{2} c_{pK}(\varphi) \right) d\varphi \\ &= \frac{q}{2\pi u_\infty} \left\{ \int_0^{2\pi} p_\infty d\varphi + \frac{\rho u_\infty^2}{2} \int_0^{2\pi} c_{pK}(\varphi) d\varphi \right\} \end{aligned}$$

mit $c_{pK}(\varphi)$ von oben:

$$= \frac{q}{2\pi u_\infty} p_\infty \int_0^{2\pi} d\varphi + \frac{q\rho u_\infty}{4\pi} \underbrace{\int_0^{2\pi} \left[-\frac{\sin 2\varphi}{\pi - \varphi} - \left(\frac{\sin \varphi}{\pi - \varphi} \right)^2 \right] d\varphi}_{=0}$$

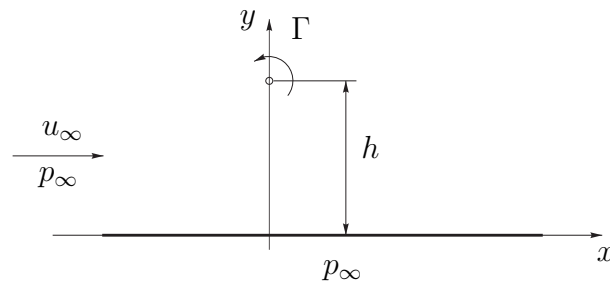
$$\begin{aligned}
&= \frac{q}{2\pi u_\infty} p_\infty \varphi \Big|_0^{2\pi} \\
&= \underbrace{\frac{q}{u_\infty}}_{=b} p_\infty \\
\frac{F_{Hx}}{t} &= p_\infty b
\end{aligned}$$

9.2 Potentialwirbel über Ebene.

Ein zweidimensionaler Potentialwirbel der Stärke Γ befindet sich im Abstand h oberhalb einer Ebene. Im Unendlichen sei der Druck p_∞ und die Geschwindigkeit u_∞ parallel zur Ebene. Die Flüssigkeit sei inkompressibel und reibungsfrei. (Anwendung des Spiegelungsprinzips)

Gesucht sind:

1. Stromfunktion und Geschwindigkeitspotential für diese Anordnung,
2. die Geschwindigkeitskomponenten,
3. der Druckbeiwert $c_p(x, 0)$ an der Ebene,
4. die Kraft pro Tiefeneinheit, die auf die Ebene wirkt, wenn auf der Unterseite der Druck p_∞ herrscht – zu welcher Beziehung vereinfacht sich der Ausdruck für die Kraft für $h \gg 1$?
5. Diskussion des Stromlinienbildes.
6. Wie schnell müssen sich zwei gleichstarke, gegendrehende parallele Wirbelfäden bewegen, damit sie auf zur x -Achse parallelen Bahnen laufen?



9.2.1 Stromfunktion und Geschwindigkeitspotential

Das komplexe Potential setzt sich aus einer Parallelströmung und den zwei nach dem Spiegelungsprinzip angeordneten gegendrehenden Potentialwirbeln zusammen:

$$F(z) = u_\infty z - i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(z - ih) - i \frac{(-\Gamma)}{2\pi} \ln(z - (-ih))$$

Für $(z - ih)$ setzen wir $r_1 e^{i\varphi_1}$ und für $(z + ih)$ setzen wir $r_2 e^{i\varphi_2}$. Es gilt $r_1 = \sqrt{x^2 + (y - h)^2}$, $r_2 = \sqrt{x^2 + (y + h)^2}$, $\varphi_1 = \arctan \frac{y-h}{x}$ bzw. $\varphi_2 = \arctan \frac{y+h}{x}$.

$$\begin{aligned} F(z) &= \Phi + i\Psi \quad \rightarrow \quad \Phi = \operatorname{Re}(F(z)), \quad \Psi = \operatorname{Im}(F(z)) \\ \Phi(r, \varphi) &= u_\infty r \cos \varphi + \frac{\Gamma}{2\pi} \varphi_1 - \frac{\Gamma}{2\pi} \varphi_2 \\ \Psi(r, \varphi) &= u_\infty r \sin \varphi - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r_1 + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r_2 \end{aligned}$$

9.2.2 Geschwindigkeiten $u(x, y)$ und $v(x, y)$

$$\begin{aligned} \Psi(x, y) &= u_\infty y + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + (y - h)^2} - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + (y + h)^2} \\ \rightarrow \quad u(x, y) &= \frac{\partial \Psi}{\partial y} = u_\infty - \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y - h}{x^2 + (y - h)^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y + h}{x^2 + (y + h)^2} \\ v(x, y) &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x}{x^2 + (y - h)^2} - \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x}{x^2 + (y + h)^2} \end{aligned}$$

Eine Überprüfung der Randbedingungen (Wand) zeigt:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_\infty + \frac{\Gamma h}{\pi(x^2 + h^2)} \quad \text{Bemerkung: } x \rightarrow \pm\infty : u \rightarrow u_\infty \\ v(x, 0) &= 0 \end{aligned}$$

9.2.3 Druckbeiwert c_p an der Wand

Aus der Bernoulligleichung folgt:

$$\begin{aligned} p_\infty + \frac{\rho}{2} u_\infty^2 &= p + \frac{\rho}{2} \vec{v}^2 \\ \rightarrow c_p(x, y) &= \frac{p - p_\infty}{\frac{\rho}{2} u_\infty^2} = 1 - \frac{\vec{v}^2}{u_\infty^2} = 1 - \frac{u^2 + v^2}{u_\infty^2} \\ \rightarrow c_p(x, 0) &= 1 - \frac{u(x, 0)^2}{u_\infty^2} = -\frac{2\Gamma}{\pi u_\infty} \frac{h}{x^2 + h^2} - \frac{\Gamma^2}{\pi^2 u_\infty^2} \frac{h^2}{(x^2 + h^2)^2} \end{aligned}$$

9.2.4 Kraft pro Tiefeneinheit, die der Wirbel auf die Wand ausübt

Impulsbilanz

Mit \vec{H}_W wird die Haltekraft der Wand bezeichnet. $\vec{F}_W = -\vec{H}_W$ ist die Kraft, die der Wirbel auf die Wand ausübt.

$$\underbrace{\oint_{\partial KV} \rho v_n \vec{v} dO}_0 = - \oint_{\partial KV} p \vec{n} dO + \vec{H}_W$$

$$\begin{aligned}
\rightarrow \quad \vec{F}_W &= - \oint_{\partial KV} p \vec{n} dO = - \oint_{\partial KV} p \vec{n} t ds \\
&= - \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{p_\infty (-\vec{e}_y) dx t}_{\text{Unterseite}} - \int_{+\infty}^{-\infty} \underbrace{p(x, 0) \vec{e}_y (-dx) t}_{\text{Oberseite}} \\
\Rightarrow \quad \frac{F_{Wy}}{t} &= - \int_{-\infty}^{+\infty} (-p_\infty + p(x, 0)) dx = -\frac{\rho}{2} u_\infty^2 \int_{-\infty}^{+\infty} c_p(x, 0) dx \\
&= -\frac{\rho}{2} u_\infty^2 \left\{ - \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{2\Gamma}{\pi u_\infty} \frac{h}{x^2 + h^2} + \frac{\Gamma^2}{\pi^2 u_\infty^2} \frac{h^2}{(x^2 + h^2)^2} \right) dx \right\} \\
&= \frac{\rho}{2} u_\infty^2 \left\{ \frac{2\Gamma}{u_\infty} + \left(\frac{\Gamma h}{\pi u_\infty} \right)^2 \frac{\pi}{2h^3} \right\} \\
&= \rho u_\infty \Gamma + \frac{\rho \Gamma^2}{4\pi h}
\end{aligned}$$

Bemerkung: für $h \rightarrow \infty$: $F_{Wy} \neq 0$

9.2.5 Fortschrittsgeschwindigkeit zweier gleichstarker, gegen-drehender, paralleler Wirbelfäden

Impulsbilanz

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial KV} \rho v_n \vec{v} dO &= -\rho u_\infty^2 A \vec{e}_x + \rho u_\infty^2 A \vec{e}_x = 0 \\
\oint_{\partial KV} p \vec{n} dO &= \underbrace{\oint_{\partial KV} p_\infty \vec{n} dO}_0 - \int_G p_\infty \vec{n} dO + \int_G p \vec{n} dO \\
&= \int_G (p - p_\infty) (-\vec{e}_y) dO = -\vec{e}_y \underbrace{\int_G (p(x, 0) - p_\infty) t dx}_{-F_{Wy}}
\end{aligned}$$

Aus der Forderung $F_{Wy} = 0$ folgt:

$$\begin{aligned}
\rho u_\infty \Gamma + \frac{\rho \Gamma^2}{4\pi h} &= 0 \\
\rightarrow u_\infty &= -\frac{\Gamma}{4\pi h}
\end{aligned}$$

9.3 Unsymmetrisches, angestelltes Parabelbogenzweieck.

Gegeben sei ein dünnes Profil mit den Koordinatenfunktionen $y_o(x) = 16\tau x(1-x)/3$ und $y_u(x) = -8\tau x(1-x)/3$ für die Ober- und Unterseite, der Dickenparameter τ sei $\ll 1$. Das Profil wird mit der Geschwindigkeit \vec{v}_∞ unter dem Winkel $\varepsilon \ll 1$ angeströmt.

Gesucht sind die Geschwindigkeitsstörungen und der Druckbeiwert c_p an der Profilober- und -unterseite, sowie der Auftriebsbeiwert c_A .

Hinweise:

$$\begin{aligned} \oint_0^1 \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}} d\xi &= \frac{\pi}{2} & \oint_0^1 \xi \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}} d\xi &= \frac{3\pi}{8} \\ \int_0^1 \sqrt{x(1-x)} x &= \frac{\pi}{8} & \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}} x &= \frac{\pi}{2} \\ \oint_0^1 \frac{\sqrt{\xi(1-\xi)}}{\xi-x} d\xi &= -\frac{\pi}{2} (2x-1) \\ \oint_0^1 \frac{\xi \sqrt{\xi(1-\xi)}}{\xi-x} d\xi &= -\frac{3\pi}{8} \left[1 - 4(1-x) + \frac{8}{3}(1-x)^2 \right] \end{aligned}$$

9.3.1 Geschwindigkeitsstörung an der Profiloberfläche

Geschwindigkeitsstörung in y-Richtung:

Für $0 \leq x \leq 1$ gilt:

$$\frac{v}{u_\infty}(x, 0^\pm) = \tau [\pm h'_d + h'_w] = \begin{cases} \frac{16}{3}\tau(1-2x) & \dots \text{ Oberseite} \\ -\frac{8}{3}\tau(1-2x) & \dots \text{ Unterseite} \end{cases}$$

Geschwindigkeitsstörung in x-Richtung:

Dickeneffekt:

$$\begin{aligned} \varphi_{1d,x}(x, 0^\pm) &= \frac{4}{\pi} \oint_0^1 \frac{1-2\xi}{x-\xi} d\xi \\ &= \frac{4}{\pi} \oint_0^1 \frac{1-2x+2x-2\xi}{x-\xi} d\xi \\ &= \frac{4}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [((2x-1) \ln |x-\xi| + 2\xi) \Big|_0^{x-\varepsilon} + ((2x-1) \ln |x-\xi| + 2\xi) \Big|_{x+\varepsilon}^1] \end{aligned}$$

$$= \frac{4}{\pi} \left[2 + (2x - 1) \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| \right]$$

Anstelleffekt:

$$\varphi_{2,x}(x, 0^\pm) = \pm \sqrt{\frac{1-x}{x}}$$

Wölbefekt:

$$\begin{aligned} \varphi_{1w,x}(x, 0^\pm) &= \mp \frac{4}{3\pi\sqrt{x(1-x)}} \left[\underbrace{\int_0^1 \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}} (1-2\xi) \, d\xi}_{\substack{\frac{\pi}{2} - 2 \cdot \frac{3\pi}{8} \\ = -\frac{\pi}{4}}} \right. \\ &\quad + \left. \underbrace{\int_0^1 \frac{\sqrt{\xi(1-\xi)}}{\xi-x} (1-2\xi) \, d\xi}_{-\frac{\pi}{2}(2x-1) - 2 \cdot \left(-\frac{3\pi}{8} [1-4(1-x) + \frac{8}{3}(1-x)^2]\right)} \right] \\ &= \mp \frac{4}{3\pi\sqrt{x(1-x)}} \underbrace{\left[-2\pi + 2\pi x + 2\pi - 4\pi x + 2\pi x^2 \right]}_{\substack{-2\pi x + 2\pi x^2 \\ = 2\pi x(x-1)}} \\ &= \pm \frac{8}{3} \sqrt{x(1-x)} \end{aligned}$$

Die Geschwindigkeitsstörung an der Profilloberseite in x-Richtung ergibt sich nun aus der Summe aller drei Effekte:

$$\frac{u - u_\infty}{u_\infty}(x, 0^\pm) = \frac{4\tau}{\pi} \left(2 + (2x - 1) \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| \right) \pm \frac{8\tau}{3} \sqrt{x(1-x)} \pm \varepsilon \sqrt{\frac{1-x}{x}}$$

9.3.2 Druckbeiwert c_p an der Profilloberfläche

Für dünne Profile mit schwacher Anstellung, d.h. $\tau \ll 1$ und $\varepsilon \ll 1$ gilt:

$$c_p(x, 0^\pm) = -2 \frac{u - u_\infty}{u_\infty}(x, 0^\pm)$$

9.3.3 Auftriebsbeiwert c_A

$$\begin{aligned} c_A &= - \int_0^1 (c_{po} - c_{pu}) \, dx = 4 \int_0^1 \left(\frac{8\tau}{3} \sqrt{x(1-x)} + \varepsilon \sqrt{\frac{1-x}{x}} \right) \, dx \\ &= \dots = \frac{4\pi\tau}{3} + 2\pi\varepsilon \end{aligned}$$

9.4 Bewegte Quelle.

Die stationäre Quellumströmung wird durch das komplexe Potential

$$F(z) = u_\infty z + \frac{q}{2\pi} \ln z$$

beschrieben. Man bestimme daraus Strom- und Bahnlinien für den Fall, daß die Quelle durch ein ruhendes Medium mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_R = -u_\infty \vec{e}_x$ bewegt wird.

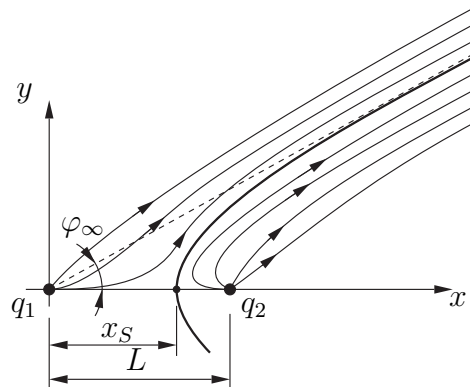
Hinweis:

$$\int \frac{\cos^n x}{\sin^m x} dx = \frac{-1}{m-1} \frac{\cos^{n-1} x}{\sin^{m-1} x} - \frac{n-1}{m-1} \int \frac{\cos^{n-2} x}{\sin^{m-2} x} dx, \quad m \neq 1$$

9.5 Doppelquellenanordnung (ebenes Problem).

Man betrachte zwei Quellen im Abstand L mit den Quellstärken q_1 und q_2 ($q_1 > q_2$).

1. Ermitteln Sie Strom- und Potentialfunktion und daraus die Geschwindigkeitskomponenten für dieses Problem (inkompressibel, reibungsfrei).
2. Wo liegt der Staupunkt, wie lautet die Gleichung für die Trennstromlinie (Polarkoordinaten r, φ)?
3. Man gebe die Parameterdarstellung $r(\varphi)$ der Trennstromlinie an und bestimme den Öffnungswinkel des entstehenden Halbkörpers für $r \rightarrow \infty$.

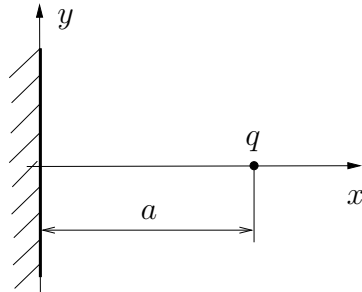


9.6 Quelle vor einer Wand (ebenes Problem).

Gegeben ist eine Quelle der Quellstärke q im Abstand a vor einer Wand. Man bestimme mit Hilfe der Spiegelungsmethode die Potential- und Stromfunktion für diese Anordnung und daraus die Geschwindigkeits- und Druckverteilung im gesamten Halbraum (die Strömung sei inkompressibel und reibungsfrei). Wie sieht die Geschwindigkeits- und Druckverteilung an der Wand bzw. im Unendlichen aus? Weiters ermittle man die Haltekraft der Quelle durch geeignete Wahl eines Kontrollvolumens.

Hinweis:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

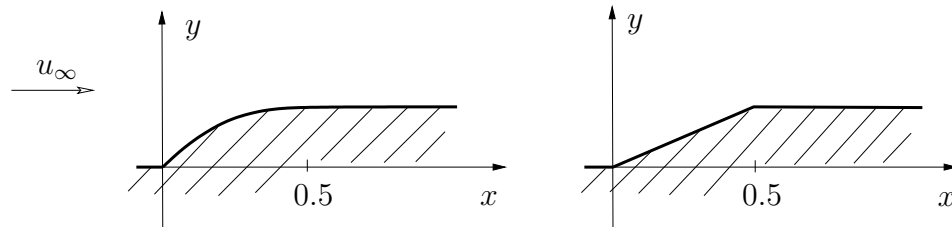


9.7 Halbkörper.

Gesucht sind die Geschwindigkeitsstörungen und der Druckbeiwert an den Oberflächen folgender Profile:

1. Parabelhalbkörper: $h_d(x) = (0, 2x(1-x), 0.5)$ für $(x < 0, 0 \leq x \leq 0.5, x > 0.5)$,
2. Keilhalbkörper: $h_d(x) = (0, x, 0.5)$ für $(x < 0, 0 \leq x \leq 0.5, x > 0.5)$.

Skizzieren Sie die Ergebnisse!



9.8 Ebene Parabelumströmung.

Man zeige, daß das komplexe Potential

$$F(z) = u_{\infty} \left(z \mp i\sqrt{2R}\sqrt{z} \right), \quad y \lesseqgtr 0$$

die symmetrische Umströmung einer Parabel beschreibt, deren Scheitelkrümmungskreis den Radius R hat. (Körperkontur, Geschwindigkeitskomponenten, Geschwindigkeit und Druckverteilung an der Kontur, Staupunkt,...)

Hinweis: Zur Bestimmung der Stromfunktion benutze man die Exponentialdarstellung von $\sqrt{z} = \sqrt{r} e^{i\gamma/2}$ und Halbwinkelsätze der trigonometrischen Funktionen.

9.9 Unsymmetrische, ebene Parabelumströmung.

Man zeige, daß die Superposition des komplexen Potentials

$$F(z) = u_\infty \left(z \mp i\sqrt{2R}\sqrt{z} \right), \quad y \lesseqgtr 0$$

und einer Kantenumströmung der Form

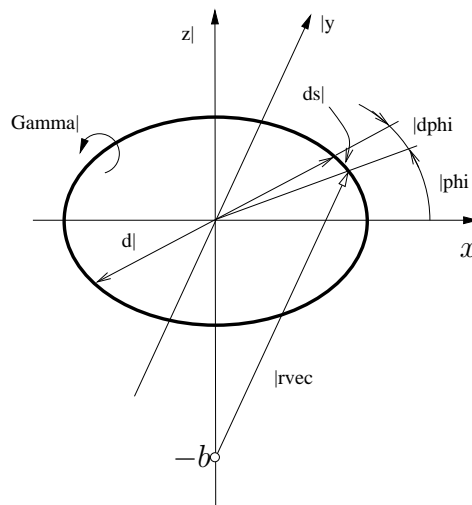
$$F(z) = u_\infty \sqrt{2C}\sqrt{z}$$

eine unsymmetrische Umströmung einer Parabel beschreibt. (Körperkontur, Geschwindigkeitskomponenten, Geschwindigkeit und Druckverteilung an der Kontur, Staupunkt,...)

9.10 Rauchring.

Man betrachte die vereinfachte Darstellung eines Rauchringes mit dem Durchmesser d (Skizze). Die geschlossene Wirbellinie habe die Zirkulation $\Gamma < 0$. Gesucht ist die auf der z -Achse im Abstand $-b$ vom Ursprung induzierte Geschwindigkeit \vec{v} (Richtung und Betrag).

Hinweis: Anwendung des Gesetzes von Biot-Savart.



9.11 Zylinderumströmung

Durch das komplexe Potential $F(z) = u_\infty \left(z + R^2/z \right)$ wird die stationäre, inkompressible und reibungsfreie Umströmung eines Zylinders mit dem Radius R beschrieben. Die ungestörte Anströmgeschwindigkeit ist u_∞ .

Man bestimme die *Strom- und Teilchenbahnlinien* für den Fall der stationären Zylinderumströmung und für die instationäre Betrachtungsweise, bei der man sich den Zylinder durch ein ruhendes Medium mit der Geschwindigkeit u_∞ in negativer x -Richtung bewegt denkt.

Kapitel 10

Ebene, kompressible Strömung

10.1 Wellige Wand.

Es sind die Geschwindigkeitsstörungen in einer Strömung über einer welligen Wand für $y \geq 0$ zu bestimmen. Die Wand sei durch die Funktion $y_w(x) = \tau \sin(2\pi x)$ gegeben, der „Dickenparameter“ τ ist klein gegen 1.

Man löse das gegebene Problem für

1. inkompressible Strömung, d.h. $M_\infty \ll 1$, durch direkte Lösung der Laplacegleichung und mit Hilfe der Profiltheorie (Singularitätenbelegung),

Hinweise:

$$\int_0^\infty \frac{x^{\beta-1} \sin(ax - \beta\pi/2)}{\gamma^2 + x^2} dx = -\frac{\pi}{2} \gamma^{\beta-2} e^{-a\gamma}, \quad a > 0, \operatorname{Re}(\gamma) > 0, 0 < \operatorname{Re}(\beta) < 2,$$

$$\int_0^\infty \frac{x^\beta \cos(ax - \beta\pi/2)}{\gamma^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2} \gamma^{\beta-1} e^{-a\gamma}, \quad a > 0, \operatorname{Re}(\gamma) > 0, |\operatorname{Re}(\beta)| < 1.$$

2. Unterschallströmung mit Kompressibilitätseinfluß, $M_\infty < 1$ (Prandtl-Glauert-Transformation),
3. Überschallströmung $M_\infty > 1$,

und diskutiere die Ergebnisse.

Wand: $y_w(x) = \tau \sin(2\pi x) = \tau h_d(x)$... Randbedingung

Potentialfunktion: $\Phi(x, y) = u_\infty x + u_\infty \tau \varphi(x, y)$, φ ... Störpotential

Grundgleichung: $\Delta\Phi = 0 \rightarrow \Delta\varphi = 0$

10.1.1 Inkompressibel: $M_\infty \ll 1$

1. Lösungsmethode: direkte Lösung durch Separationsansatz

Produktansatz $\varphi(x, y) = f(x)g(y)$ liefert in Laplacegleichung eingesetzt

$$f''g + f\ddot{g} = 0 \rightarrow \frac{f''}{f} = -\frac{\ddot{g}}{g} = -\lambda^2$$

mit der Separationskonstanten λ^2 . Die Wahl des negativen Vorzeichens ergibt für $f(x)$ eine periodische Funktion (Randbedingung!). Somit ist

$$f'' + \lambda^2 f = 0 \quad , \quad \ddot{g} - \lambda^2 g = 0 \quad , \\ f(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x, \quad g(y) = C e^{\lambda y} + D e^{-\lambda y} \quad .$$

Die Integrationskonstante C kann sofort aus der geforderten Bedingung der Beschränktheit der Lösung $\lim_{y \rightarrow \infty} \varphi_y = 0$ zu null gesetzt werden: $C = 0$. Es verbleibt

$$\varphi(x, y) = (\bar{A} \cos \lambda x + \bar{B} \sin \lambda x) e^{-\lambda y} \quad .$$

Um das gegebene Problem einer analytischen Lösung zuzuführen, muß die nichtlineare Randbedingung für die Geschwindigkeit an der Wandoberfläche linearisiert werden:

$$\varphi_y(x, 0^+) = h'_d(x) = 2\pi \cos(2\pi x) \quad .$$

Man erhält

$$\varphi_y(x, 0^+) = -\lambda (\bar{A} \cos \lambda x + \bar{B} \sin \lambda x) = 2\pi \cos(2\pi x) \quad ,$$

womit die Integrationskonstanten und der Separationsparameter mit

$$\lambda = 2\pi \quad , \quad \bar{A} = -1 \quad , \quad \bar{B} = 0$$

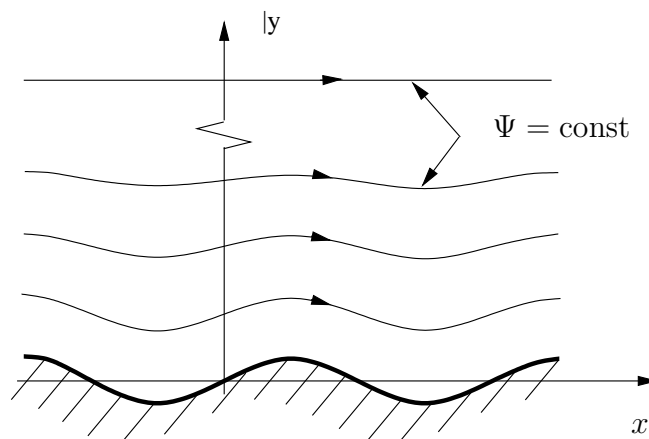
festgelegt sind. Für das Störpotential ergibt sich

$$\varphi(x, y) = -\cos(2\pi x) e^{-2\pi y} \quad ,$$

und damit für die Geschwindigkeitsstörungen in x - und y -Richtung

$$\frac{u - u_\infty}{u_\infty}(x, y) = \tau \varphi_x(x, y) = 2\pi\tau \sin(2\pi x) e^{-2\pi y} \quad , \\ \frac{v}{u_\infty}(x, y) = \tau \varphi_y(x, y) = 2\pi\tau \cos(2\pi x) e^{-2\pi y} \quad .$$

Als wesentliches Ergebnis ist hier zu erwähnen, daß die Geschwindigkeitsstörungen für kleine Anströmmachzahlen (inkompressible Strömung), welche durch die wellige Wand hervorgerufen werden, *exponentiell* für $y \rightarrow \infty$ abklingen (siehe Abbildung).



2. Lösungsmethode: Singularitätenbelegung (Profiltheorie)

Dickenverteilung: $h_d(x) = \sin(2\pi x)$

Quellbelegungsfunktion: $m(x) = 2h'_d = 4\pi \cos(2\pi x)$.

Für die Geschwindigkeitsstörung in x -Richtung ergibt sich:

$$\varphi_x(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} m(\xi) \frac{x - \xi}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x - \xi) \cos(2\pi\xi)}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi .$$

Substitution von $x - \xi = u$ und die Verwendung von $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ ergibt weiters

$$\begin{aligned} \varphi_x &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos[2\pi(x - u)]u}{u^2 + y^2} (-du) \\ &= 2 \cos(2\pi x) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2\pi u)u}{u^2 + y^2} du}_{=0 \text{ (ungerade Fkt.)}} + 2 \sin(2\pi x) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2\pi u)u}{u^2 + y^2} du \\ &= 4 \sin(2\pi x) \int_0^{\infty} \frac{\sin(2\pi u)u}{u^2 + y^2} du . \end{aligned}$$

Die Verwendung des in der Angabe bereitgestellten Integrals mit den entsprechend identifizierten Parameterwerten $a = 2\pi$, $\beta = 2$ und $\gamma = y$ ergibt schließlich

$$\varphi_x(x, y) = 2\pi \sin(2\pi x) e^{-2\pi y} ,$$

und daher in völliger Übereinstimmung mit dem Ergebnis von vorhin

$$\frac{u - u_\infty}{u_\infty}(x, y) = \tau \varphi_x = 2\pi\tau \sin(2\pi x) e^{-2\pi y} .$$

Für die Geschwindigkeitsstörung in y -Richtung erhält man in analoger Weise

$$\varphi_y(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} m(\xi) \frac{y}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi = \dots = 4y \cos(2\pi x) \int_0^{\infty} \frac{\cos(2\pi u)}{u^2 + y^2} du .$$

Mit dem Integral aus der Angabe, wobei für $\beta = 0$, $a = 2\pi$ und $\gamma = y$ zu setzen ist, ergibt sich

$$\varphi_y(x, y) = 2\pi \cos(2\pi x) e^{-2\pi y} ,$$

und daher

$$\frac{v}{u_\infty}(x, y) = \tau \varphi_y = 2\pi\tau \cos(2\pi x) e^{-2\pi y} .$$

10.1.2 Kompressibilitätseinfluß schallnaher Unterschallströmung:

Für Anströmmachzahlen, die noch im Unterschallbereich $M_\infty \leq M_{\infty \text{krit}} \lesssim 1$ liegen, aber bereits Kompressibilitätseffekte im Strömungsfeld erwarten lassen, können gesuchte Strömungskenngrößen aus der Lösung des entsprechenden *inkompressiblen* Problems mit Hilfe der *Prandtl-Glauert-Transformation* gewonnen werden. Mit der Definition des Prandtl-Faktors β ,

$$\beta = \sqrt{1 - M_\infty^2}, \quad 0 \leq \beta \leq 1$$

gilt dann beispielsweise für die Geschwindigkeitsstörungen im kompressiblen Fall

$$\begin{aligned} \frac{u - u_\infty}{u_\infty}(x, y) &= \frac{1}{\beta} \frac{u - u_\infty}{u_\infty}(x, \beta y)_i, \\ \frac{v}{u_\infty}(x, y) &= \frac{v}{u_\infty}(x, \beta y)_i, \end{aligned}$$

wobei der Index „i“ die Lösung des Problems für den inkompressiblen Fall kennzeichnet.

Die Anwendung der Prandtl-Glauert-Transformation auf das Problem der welligen Wand liefert

$$\begin{aligned} \frac{u - u_\infty}{u_\infty}(x, y) &= \frac{2\pi\tau}{\beta} \sin(2\pi x) e^{-2\pi\beta y}, \\ \frac{v}{u_\infty}(x, y) &= 2\pi\tau \cos(2\pi x) e^{-2\pi\beta y}. \end{aligned}$$

Hervorzuheben ist hier die im Vergleich zur inkompressiblen Rechnung *größere* Geschwindigkeitsstörung in x -Richtung sowie das *langsamere* Abklingen der Störungen für $y \rightarrow \infty$.

10.1.3 Überschall: $M_\infty > 1$

Für Anströmmachzahlen $M_\infty > 1$ hat die linearisierte gasdynamische Gleichung die Form der Wellengleichung (hyperbolischer Gleichungstypus). Störungen, die von einem bestimmten Raumbereich (Abhängigkeitsbereich) ausgehen, breiten sich *nicht* im gesamten Strömungsfeld aus (\rightarrow Einflußgebiet). Die allgemeine, *d'Alembertsche Lösung* dieser Gleichung in charakteristischen Variablen (ξ, η) für das Störpotential lautet

$$\varphi(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta)$$

mit

$$\begin{aligned} \xi &= x - y\sqrt{M_\infty^2 - 1} \quad (= \text{const auf l.l. Machlinien}), \\ \eta &= x + y\sqrt{M_\infty^2 - 1} \quad (= \text{const auf r.l. Machlinien}), \end{aligned}$$

und den zweimal stetig differenzierbaren, sonst beliebigen, Funktionen F und G . Im vorliegenden Beispiel breiten sich die Störungen durch die wellige Wand nur entlang linkslaufender Machlinien im Strömungsfeld aus, demnach ist $G(\eta) = 0$. Aus der

Randbedingung (Störung der Strömungsgeschwindigkeit in y -Richtung an der Wand)

$$\frac{v}{u_\infty} = \varphi_y(x, 0^+) = \tau h'_o(x), \quad h_o(x) = \sin(2\pi x)$$

folgt somit

$$\varphi(x, y) = F(x, y) = -\frac{\tau}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} h_o(x - y\sqrt{M_\infty^2 - 1}).$$

Für die Strömungsgeschwindigkeiten ergibt sich daher im gesamten Raumgebiet $y > 0$

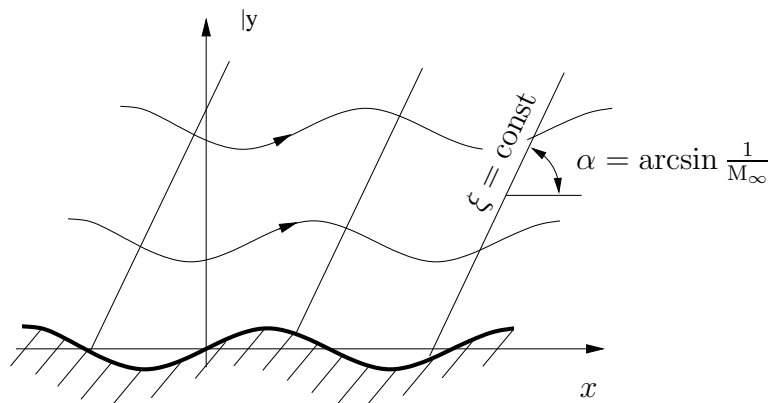
$$\begin{aligned} \frac{u - u_\infty}{u_\infty}(x, y) &= \varphi_x = \frac{2\pi\tau}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \cos \left[2\pi \left(x - y\sqrt{M_\infty^2 - 1} \right) \right], \\ \frac{v}{u_\infty}(x, y) &= \varphi_y = 2\pi\tau \cos \left[2\pi \left(x - y\sqrt{M_\infty^2 - 1} \right) \right]. \end{aligned}$$

Wie man sieht, stehen die Geschwindigkeitsstörungen über die *Ackeretsche Formel*

$$\frac{u - u_\infty}{u_\infty}(x, y) = -\frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{v}{u_\infty}(x, y)$$

miteinander in Beziehung.

Als wesentliches Ergebnis kann hier bemerkt werden, daß im Gegensatz zur (inkompressiblen sowie kompressiblen) Unterschallströmung die durch die Wand hervorgerufenen Störungen *nicht* abklingen, sondern sich längs l.l. Machlinien *ungedämpft* bis ins Unendliche ausbreiten.

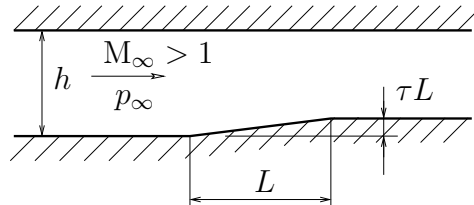


10.2 Kanal-Überschallströmung (lineare Theorie).

Gegeben ist die Situation laut Skizze. Man bestimme die Geschwindigkeits- und Druckstörungen im entstehenden Wellenmuster stromabwärts der Kanalverengung für

1. $1/\sqrt{M_\infty^2 - 1} < 2h/L$ und

2. $1/\sqrt{M_\infty^2 - 1} = 2h/L$ für $\tau \ll 1$.
3. Wie müßte die obere Kanalwand modifiziert werden, damit stromabwärts keine Druckstörungen auftreten?



Lineare Theorie – d'Alembertsche Lösung

Aus der linearisierten Gasdynamischen Gleichung folgt für die Potentialstörung $\varphi(x, y)$ die d'Alembertsche Lösung

$$\varphi(x, y) = F(x - y \cot \alpha_\infty) + G(x + y \cot \alpha_\infty) .$$

Diese hat an der undurchlässigen Wand die Randbedingung

$$\left(\frac{v}{u_\infty} \right)_{\text{Wand}} = (\varphi_y)_{\text{Wand}} = \frac{dy_{\text{Wand}}}{dx}$$

zu erfüllen. Die Geschwindigkeitsstörungen in x - und y -Richtung lauten

$$\begin{aligned} \frac{u - u_\infty}{u_\infty} &= \varphi_x = F'(x - y \cot \alpha_\infty) + G'(x + y \cot \alpha_\infty) \\ \frac{v}{u_\infty} &= \varphi_y = -\cot \alpha_\infty [F'(x - y \cot \alpha_\infty) - G'(x + y \cot \alpha_\infty)] . \end{aligned}$$

10.2.1 für $(M_\infty^2 - 1)^{-1/2} < 2h/L$

Die Störungen breiten sich entlang der Geraden (Machlinien, Charakteristiken)

$$x \pm y \cot \alpha_\infty = \text{const.}$$

aus. Daher macht sich eine Störung, die von einer Wand des Kanals an einer Stelle x_0 ausgeht, erst an der Stelle $x_1 = x_0 + h \cot \alpha_\infty > x_0$ an der gegenüberliegenden Wand bemerkbar. Dort wird die Störung reflektiert, und die reflektierte Störung erreicht bei $x_2 = x_1 + h \cot \alpha_\infty$ wieder die erste Wand. Für die Strecke $x_2 - x_0$ gilt somit

$$x_2 - x_0 = 2h \cot \alpha_\infty .$$

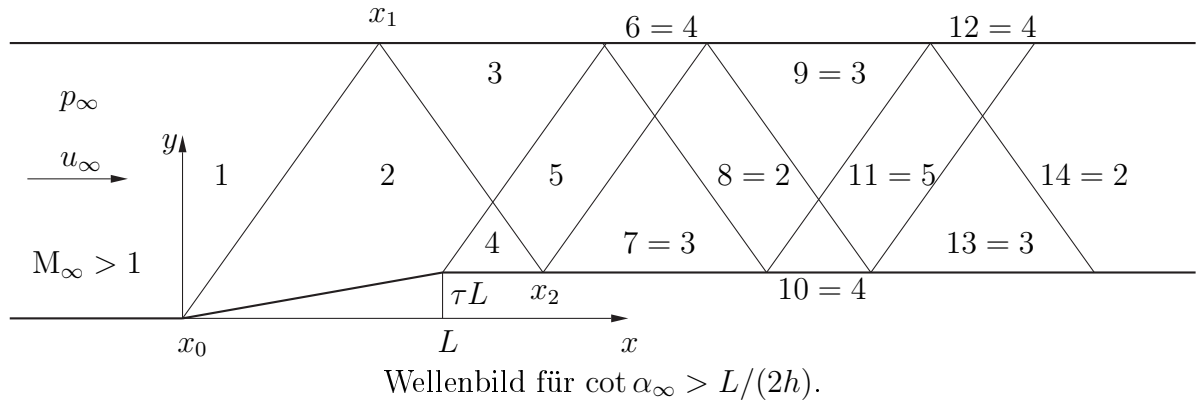
Aus der Angabe folgt

$$\cot \alpha_\infty > \frac{L}{2h}$$

und schließlich

$$x_2 - x_0 > L .$$

Das bedeutet, daß die Störung, die von der Rampe an der unteren Wand verursacht und von der oberen Wand reflektiert wird, erst stromab der Rampe wieder die untere Wand erreicht. Dort erfolgt eine nochmalige Reflexion, und das Schema läßt sich im Rahmen der linearen Theorie beliebig weit fortsetzen, sodaß man das unten gezeigte Wellenbild erhält.



Geschwindigkeits- und Druckstörung

Gebiet ①:

Im Gebiet 1 folgt aus der Anfangsbedingung $u = u_\infty$, $v = 0$ und den Randbedingungen an der Wand

$$\begin{aligned} \varphi_y(x, 0) &= -\cot \alpha_\infty [F'(x) - G'(x)] = 0, \\ \varphi_y(x, h) &= -\cot \alpha_\infty [F'(x - h \cot \alpha_\infty) - G'(x + h \cot \alpha_\infty)] = 0 \end{aligned}$$

daß $F(x) = G(x) = \text{const.}$ O.B.d.A. darf die Konstante gleich null gewählt werden, sodaß überall im Gebiet ①

$$\varphi(x, y) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{u - u_\infty}{u_\infty} = \frac{v}{u_\infty} = 0 \quad c_p = 0$$

gilt.

Bereich ②

Ab $x = x_0$ verursacht die Rampe an der unteren Wand eine Störung. Diese beeinflusst vorerst nur die Funktion $F(x - y \cot \alpha_\infty)$, da sich die Information über die Störung nur entlang der Geraden $x \pm y \cot \alpha_\infty = \text{const.}$ und nur stromab ausbreiten kann. Daher gilt im Gebiet ②

$$G(x + y \cot \alpha_\infty) = 0$$

Für $F(x - y \cot \alpha_\infty)$ lautet die Randbedingung (Bemerkung: $F(\xi_{y=0}) = F(x)$)

$$\varphi_y(x, 0^+) = -\cot \alpha_\infty F'(x) = \tau$$

Damit ergibt sich

$$F(x) = -\frac{\tau}{\cot \alpha_\infty} x$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \varphi(x, y) = -\frac{\tau}{\cot \alpha_\infty} (x - y \cot \alpha_\infty) &\rightarrow \varphi_x = \frac{u - u_\infty}{u_\infty} = -\frac{\tau}{\cot \alpha_\infty} \\ &\varphi_y = \frac{v}{u_\infty} = \tau \\ &c_p = -2 \frac{u - u_\infty}{u_\infty} = \frac{2\tau}{\cot \alpha_\infty} \end{aligned}$$

Bemerkung:

Zwischen den beiden Geschwindigkeitsstörungen besteht die Beziehung von Ackeret:

$$\varphi_x = -\frac{1}{\cot \alpha_\infty} \varphi_y.$$

Die Druckerhöhung im Bereich ② ergibt sich zu $\Delta p = \frac{\rho}{2} u_\infty^2 c_p$.

Gebiet ③

Im Gebiet ③ treffen linkslaufende Wellen aus Gebiet ② erstmals auf die obere Wand. Daher ergibt die Auswertung der Randbedingung dort

$$\begin{aligned} \varphi_y(x, h) = -\cot \alpha_\infty \left[-\frac{\tau}{\cot \alpha_\infty} - G'(x + h \cot \alpha_\infty) \right] &= 0 \\ \rightarrow G(\eta) = -\frac{\tau}{\cot \alpha_\infty} \eta = -\frac{\tau}{\cot \alpha_\infty} (x + y \cot \alpha_\infty) \end{aligned}$$

Somit gilt für die Potentialstörung

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= -\frac{\tau}{\cot \alpha_\infty} (x - y \cot \alpha_\infty) - \frac{\tau}{\cot \alpha_\infty} (x + y \cot \alpha_\infty) \\ &= -\frac{2\tau}{\cot \alpha_\infty} x \end{aligned}$$

Die Ausdrücke für die Geschwindigkeitsstörung und den Druckbeiwert lauten

$$\begin{aligned} \frac{u - u_\infty}{u_\infty} &= -\frac{2\tau}{\cot \alpha_\infty}, \\ c_p &= \frac{4\tau}{\cot \alpha_\infty}. \end{aligned}$$

Bemerkung:

$\varphi_y = 0$ bedeutet, daß im Bereich ③ wieder eine horizontale Parallelströmung herrscht.

Gebiet ④

Ähnliche Überlegungen ergeben für das Gebiet ④:

$$\varphi_y(x, 0^+) = 0 \quad \rightarrow \quad F' = G'$$

zusammen mit

$$G = 0 \quad \rightarrow \quad F = 0$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(x, y) = 0, \quad c_p = 0.$$

Gebiet ⑤

Im Gebiet ⑤ wiederum gilt

$$\varphi(x, y) = -\frac{\tau}{\cot \alpha_\infty} (x + y \cot \alpha_\infty),$$

$$c_p = \frac{2\tau}{\cot \alpha_\infty} .$$

Gebiet ⑥

Im Gebiet ⑥ wiederum gilt

$$\varphi_y(x, h) = 0 \quad \rightarrow \quad F' = G'$$

zusammen mit

$$F = 0 \quad \rightarrow \quad G = 0$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(x, y) = 0, \quad c_p = 0 .$$

\Rightarrow Gebiet ⑥=④.

Gebiet ⑦

Im Gebiet ⑦ wiederum gilt

$$\varphi_y(x, 0^+) = 0 \quad \rightarrow \quad F' = G'$$

zusammen mit

$$\begin{aligned} G' = -\frac{\tau}{\cot \alpha_\infty} &\quad \rightarrow \quad F' = -\frac{\tau}{\cot \alpha_\infty} \\ &\quad \rightarrow \quad F = -\frac{\tau}{\cot \alpha_\infty} (x - \cot \alpha_\infty y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \varphi(x, y) &= -\frac{2\tau}{\cot \alpha_\infty} x \\ \frac{u - u_\infty}{u_\infty} &= -\frac{2\tau}{\cot \alpha_\infty} \\ c_p &= \frac{4\tau}{\cot \alpha_\infty} \end{aligned}$$

\Rightarrow Gebiet ⑦=③.

Gebiet ⑧

Für das Gebiet ⑧ findet man weiters Gebiet ⑧=②.

Gebiet ⑨

Für das Gebiet ⑨ findet man weiters Gebiet ⑨=③.

Gebiet ⑩

Für das Gebiet ⑩ findet man weiters Gebiet ⑩=④.

Gebiet ⑪

Für das Gebiet ⑪ findet man weiters Gebiet ⑪=⑤.

Gebiet ⑫

Für das Gebiet ⑫ findet man weiters Gebiet ⑫=④.

Gebiet ⑬

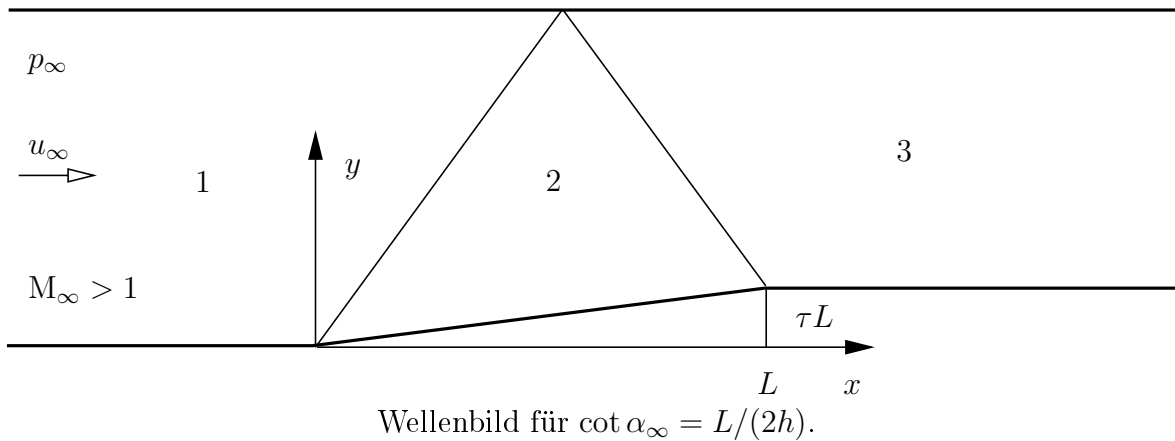
Für das Gebiet ⑬ findet man weiters Gebiet ⑬=③.

Gebiet ⑭

Für das Gebiet ⑭ findet man weiters Gebiet ⑭=②.

10.2.2 für $(M_\infty^2 - 1)^{-1/2} = 2h/L$ und $\tau \ll 1$

Für $\cot \alpha_\infty = L/(2h)$ fällt der Punkt x_2 mit dem Ende der Rampe an der unteren Kanalwand zusammen. Es ergibt sich folglich das unten gezeigte Wellenbild.



Für die einzelnen Bereiche erhält man nun die Lösungen (Berechnung wie vorher):

Gebiet ①:

$$\varphi(x, y) = 0, \quad c_p = 0.$$

Gebiet ②:

$$\varphi(x, y) = -\frac{\tau}{\cot \alpha_\infty} (x - y \cot \alpha_\infty),$$

$$c_p = \frac{2\tau}{\cot \alpha_\infty}.$$

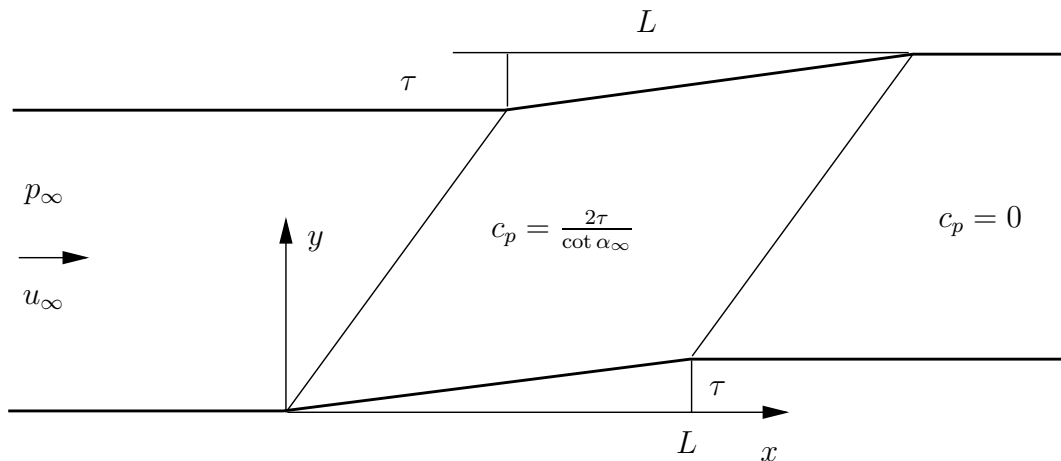
Gebiet ③:

$$\varphi(x, y) = -\frac{2\tau}{\cot \alpha_\infty} x,$$

$$c_p = \frac{4\tau}{\cot \alpha_\infty}.$$

10.2.3 Wie müßte die obere Kanalwand modifiziert werden, damit stromabwärts keine Druckstörungen auftreten?

Die Druckstörungen stromabwärts der Rampe werden durch die Reflexion an der oberen Kanalwand verursacht. Die Wand ist daher so zu modifizieren, daß die Randbedingungen durch die eintreffenden linkslaufenden Wellen allein schon erfüllt werden. Dies wird durch die unten gezeigte Anordnung erfüllt.



Modifizierter Kanal mit verschwundenen Druckstörungen stromab der Rampe.

Bereich ①

In Bereich ① gilt

$$F = G = 0,$$

d.h. ungestörte Parallelströmung. **Bereich ②**

Im Bereich ② gilt $F \neq 0$, $G = 0$.

$$\Rightarrow \varphi(x, y) = F(x - y \cot \alpha_\infty) = -\frac{\tau}{\cot \alpha_\infty} \cdot (x - y \cot \alpha_\infty)$$

$$c_p = \frac{2\tau}{\cot \alpha_\infty}$$

Obere Wand:

$$\tau \ll 1: \quad y_{\text{Wand}} = \begin{cases} \tau x & \dots y = 0, 0 \leq x \leq L \\ h + \tau(x - h \cot \alpha_\infty) & \dots y = h, h \cot \alpha_\infty \leq x \leq L + h \cot \alpha_\infty \end{cases}$$

$$\rightarrow \varphi_y(x, y = h) = -\cot \alpha_\infty (F'(x - h \cot \alpha_\infty) - G'(x + h \cot \alpha_\infty)) = \tau$$

$$\rightarrow -\cot \alpha_\infty \left(-\frac{\tau}{\cot \alpha_\infty} - G'(\eta|_{y=h}) \right) = \tau$$

$$\tau + \cot \alpha_\infty G'(\eta|_{y=h}) = \tau$$

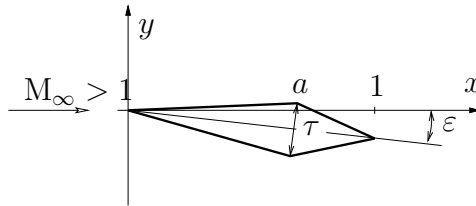
$$G'(\eta|_{y=h}) = 0 \quad \rightarrow G(\eta) = 0$$

10.3 Angestelltes Rautenprofil in Überschallströmung (lineare Theorie).

Ein dünnes Rautenprofil der Dicke $\tau \ll 1$ wird unter dem Anstellwinkel $\varepsilon \ll 1$ einer Überschallströmung $M_\infty > 1$ ausgesetzt (siehe Skizze).

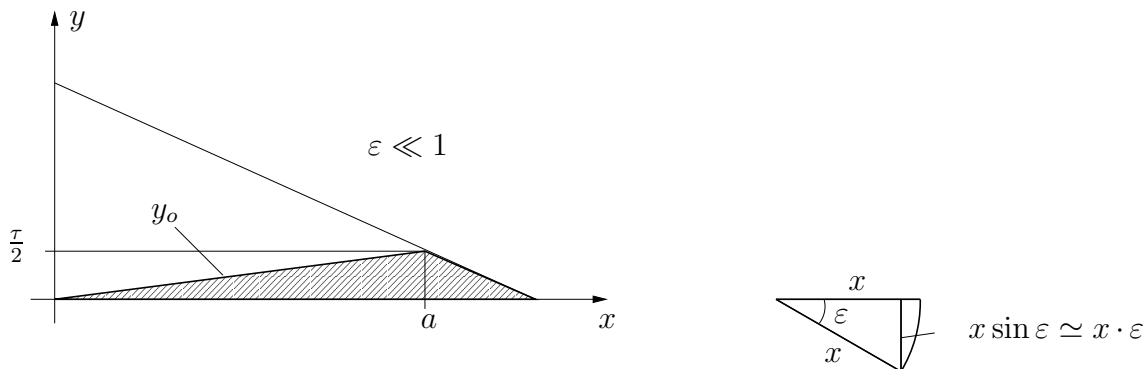
Man berechne mit Hilfe der *linearen Theorie* die Geschwindigkeitsstörungen oberhalb und unterhalb des Profils sowie den Widerstand und den Auftrieb in Form von c_w und c_a .

Bei welchem Wert von a wird der Widerstand bei gegebener Anstellung ε und Dicke τ minimal?



10.3.1 Geschwindigkeitsstörung an der Profilloberfläche

Näherung für schwache Anstellung $\varepsilon \ll 1$:



$$y_{o,u} = \begin{cases} \pm \frac{\tau}{2a}x - \varepsilon x & 0 \leq x \leq a \\ \pm \frac{\tau}{2(1-a)}(1-x) - \varepsilon x & a \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$h_o(x) = \frac{y_o}{\tau} = \begin{cases} \frac{1}{2a}x - \frac{\varepsilon}{\tau}x & 0 \leq x \leq a \\ \frac{1}{2(1-a)}(1-x) - \frac{\varepsilon}{\tau}x & a \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$h_u(x) = -\frac{y_u}{\tau} = \begin{cases} \frac{1}{2a}x + \frac{\varepsilon}{\tau}x & 0 \leq x \leq a \\ \frac{1}{2(1-a)}(1-x) + \frac{\varepsilon}{\tau}x & a \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Linearisierte Randbedingungen:

Aus der Potentialfunktion $\Phi(x, y) = u_\infty x + u_\infty \varphi(x, y)$ folgt:

$$u = \Phi_x = u_\infty + u_\infty \varphi_x$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad \varphi_x &= \frac{u - u_\infty}{u_\infty} \\ v &= \Phi_y = u_\infty \varphi_y \\ \rightarrow \quad \varphi_y &= \frac{v}{u_\infty} \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung für φ lautet ($\alpha_\infty = \arcsin \frac{1}{M_\infty}$)

$$\varphi(x, y) = F(x - y \cot \alpha_\infty) + G(x + y \cot \alpha_\infty) = \begin{cases} F(x - y \cot \alpha_\infty) & \dots \text{ Profilerseite} \\ G(x + y \cot \alpha_\infty) & \dots \text{ Profilunterseite} \end{cases}$$

mit den Randbedingungen $\varphi_y(x, 0^+) = -\cot \alpha_\infty F'(x) = \tau \frac{\partial h_o}{\partial x}$ bzw. $\varphi_y(x, 0^-) = \cot \alpha_\infty G'(x) = -\tau \frac{\partial h_u}{\partial x}$. D.h.

$$\frac{v}{u_\infty}(x, 0^\pm) = \pm \tau \frac{\partial h_{o,u}}{\partial x}$$

$$h'_o(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} - \frac{\varepsilon}{\tau} & 0 \leq x \leq a \\ -\frac{1}{2(1-a)} - \frac{\varepsilon}{\tau} & a \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$h'_u(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} + \frac{\varepsilon}{\tau} & 0 \leq x \leq a \\ -\frac{1}{2(1-a)} + \frac{\varepsilon}{\tau} & a \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad \frac{v}{u_\infty}(x, 0^+) = \begin{cases} \frac{\tau}{2a} - \varepsilon \\ -\frac{\tau}{2(1-a)} - \varepsilon \end{cases}$$

bzw.

$$\rightarrow \quad \frac{v}{u_\infty}(x, 0^-) = \begin{cases} -\frac{\tau}{2a} - \varepsilon \\ \frac{\tau}{2(1-a)} - \varepsilon \end{cases}$$

Die Beziehung von Ackeret liefert uns:

$$\frac{u - u_\infty}{u_\infty} = \mp \frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{v}{u_\infty}$$

10.3.2 Druckbeiwert c_p

$$\begin{aligned} c_p(x, 0^\pm) &= -2 \frac{u - u_\infty}{u_\infty}(x, 0^\pm) = \pm \frac{2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{v}{u_\infty}(x, 0^\pm) \\ &= \pm \frac{2(\pm \tau h'_{o,u})}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} = \frac{2\tau h'_{o,u}}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \end{aligned}$$

10.3.3 Widerstandsbeiwert c_w

Das Kontrollvolumen KV verlaufe entlang der Profilloberfläche.

$$c_w = - \oint_{\partial KV} c_p n_x d\sigma = \frac{2\tau^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \int_0^1 (h_o'^2 + h_u'^2) dx$$

$$\text{mit } n_x(x, 0^+) = -\tau \frac{dh_o}{dx}, \quad n_x(x, 0^-) = -\tau \frac{dh_u}{dx}$$

$$\begin{aligned} c_w &= \frac{2\tau^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left\{ \left[\left(\frac{1}{2a} - \frac{\varepsilon}{\tau} \right)^2 + \left(\frac{1}{2a} + \frac{\varepsilon}{\tau} \right)^2 \right] x \Big|_0^a \right. \\ &\quad \left. + \left[\left(-\frac{1}{2(1-a)} - \frac{\varepsilon}{\tau} \right)^2 + \left(-\frac{1}{2(1-a)} + \frac{\varepsilon}{\tau} \right)^2 \right] x \Big|_a^1 \right\} \\ &= \frac{2\tau^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left(\frac{1}{2a(1-a)} + \frac{2\varepsilon^2}{\tau^2} \right) \end{aligned}$$

Minimaler Widerstand bei gegebenen ε :

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_w}{\partial a} = 0 &= (1-a) + (-a) \quad \rightarrow \quad a = \frac{1}{2} \\ c_w &= \frac{4\tau^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{\tau^2} \right) \end{aligned}$$

10.3.4 Auftriebsbeiwert c_a

$$c_a = - \oint_{\partial KV} c_p n_y d\sigma = \frac{4\tau}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} h_u(1)$$

$$\text{mit } n_y(x, 0^+) = +1, \quad n_y(x, 0^-) = -1$$

Mit $h_u(1) = \frac{\varepsilon}{\tau}$ ergibt sich

$$c_a = \frac{4\varepsilon}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$

Bemerkung:

Der Auftrieb hängt nicht von der Profiform ab!

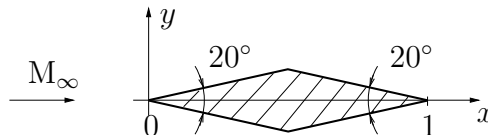
Kapitel 11

Nichtlineare Effekte bei Überschallströmungen

11.1 Rautenprofil in Überschallströmung.

Ermittle den Widerstandsbeiwert eines nichtangestellten, spiegelsymmetrischen Rautenprofils für $M_\infty = 1,6$, $p_\infty = 1 \text{ bar}$, $T_\infty = 288 \text{ K}$, $\kappa = 1,4$ und $c_p = 1005 \text{ J/kg K}$

1. mit Hilfe der *linearen* Theorie,
2. unter Berücksichtigung *nichtlinearer* Effekte.
3. Man diskutiere das sich ergebende Strömungsbild.



11.1.1 Geschwindigkeits- und Druckstörungen

Ungestörter Anströmzustand:

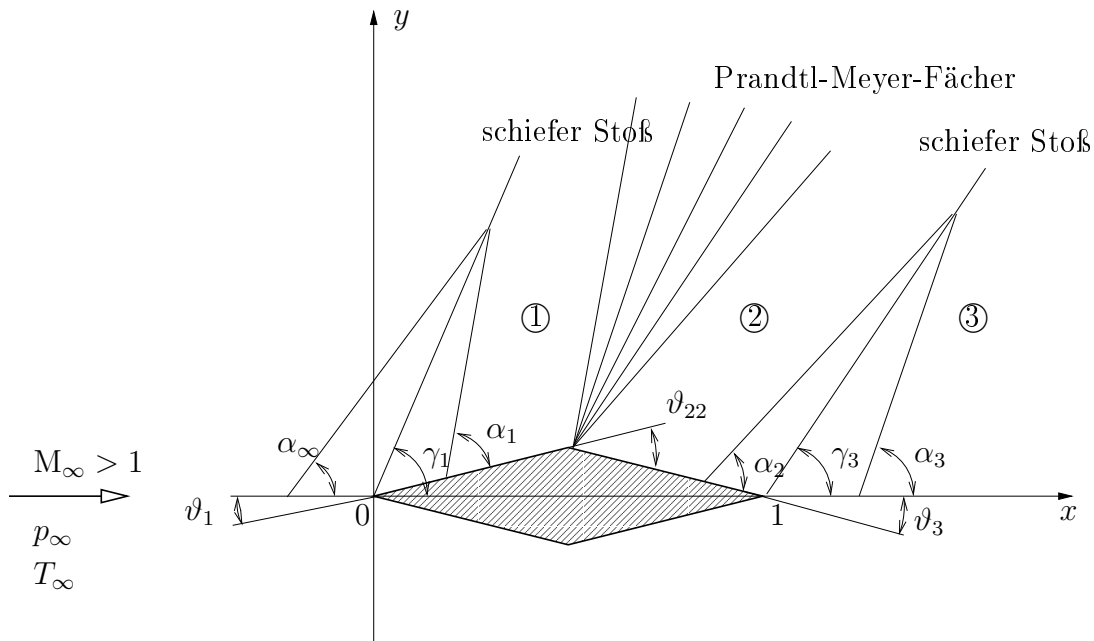
Die Werte für $p_{\infty 0}$ und M_∞^* im ungestörten Anströmzustand entnehmen wir entweder der Tabelle zum Charakteristikendiagramm für $\kappa = 1,4$ und $M_\infty = 1,6$, oder wir berechnen sie wie folgt:

$$M_\infty^* = \sqrt{\frac{M_\infty^2}{1 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1}(M_\infty^2 - 1)}} = 1,425$$

$$\frac{p_\infty}{p_{\infty 0}} = \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} M_\infty^2\right)^{-\frac{\kappa}{\kappa-1}} = 0,235 \quad \rightarrow \quad p_{\infty 0} = 4,25 \text{ bar}$$

$$\text{Machwinkel: } \sin \alpha_\infty = \frac{1}{M_\infty} \quad \rightarrow \quad \alpha_\infty = \arcsin \frac{1}{1,6} = 38,7^\circ$$

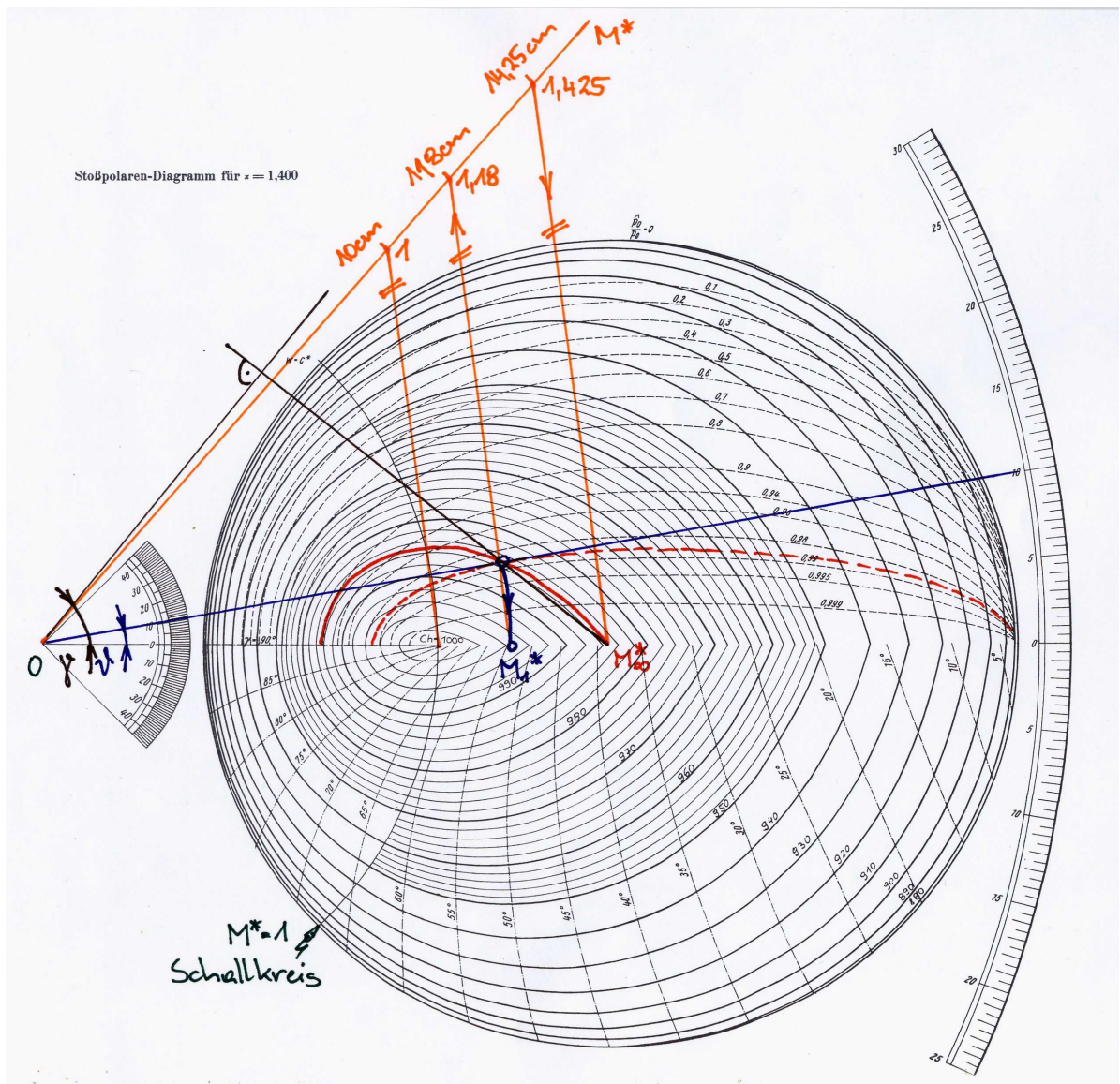
Zustand in Bereich 1



Von der Spitze des Rautenprofils breitet sich ein schiefer Verdichtungsstoß mit dem Stoßwinkel γ_1 aus. Für $\vartheta_1 = 10^\circ$ und $M_\infty = 1,6$ ergibt sich entweder aus Gleichung (5.8) des Vorlesungsskriptums

$$\cot \vartheta_1 = \tan \gamma_1 \left(\frac{\kappa + 1}{2} \frac{M_\infty^2}{M_\infty^2 \sin^2 \gamma_1 - 1} - 1 \right)$$

oder aus dem Stoßpolarendiagramm $\gamma_1 = 51,1^\circ$.



M_1^* erhält man ebenfalls aus dem Stoßpolarendiagramm oder errechnet sich wie folgt:

$$M_{\infty n} = M_{\infty} \sin \gamma_1 = 1,245 \rightarrow (\text{Isentropentabelle}) \quad M_{\infty n}^* = 1,191$$

Prandtl-Relation: $M^* \hat{M}^* = M_{\infty n}^* M_{1n}^* = 1 \rightarrow M_{1n}^* = 0,84$

$$\rightarrow (\text{Isentropentabelle}) \quad M_{1n} = 0,817$$

$$M_{1n} = M_1 \sin(\gamma_1 - \vartheta_1) \rightarrow M_1 = \frac{M_{1n}}{\sin(\gamma_1 - \vartheta_1)} = 1,240$$

$$\rightarrow (\text{Isentropentabelle}) \quad M_1^* = 1,188$$

p_1 errechnet sich:

$$M_{\infty n} \rightarrow (\text{Isentropentabelle}) \quad \frac{\hat{p}_0}{p_0} = \frac{p_{10}}{p_{\infty 0}} = 0,988$$

$$M_1 \rightarrow (\text{Isentropentabelle}) \quad \frac{p_1}{p_{10}} = 0,396$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{p_1}{p_\infty} &= \frac{p_1}{p_{10}} \cdot \frac{p_{10}}{p_{\infty 0}} \cdot \frac{p_{\infty 0}}{p_\infty} = 0,3914 \cdot 0,988 \cdot \frac{1}{0,235} = 1,665 \\ \rightarrow p_1 &= 1,643 \cdot p_\infty = 1,643 \text{ bar} \end{aligned}$$

Bemerkung:

Das Ruhedruckverhältnis $\frac{p_0}{p_0}$ kann von der strichlierten Linie im Stoßpolarendiagramm abgelesen werden.

$$\text{Machwinkel: } \sin \alpha_1 = \frac{1}{M_1} \quad \rightarrow \quad \alpha_1 = \arcsin \frac{1}{1,242} = 53,8^\circ$$

Zustand in Bereich 2

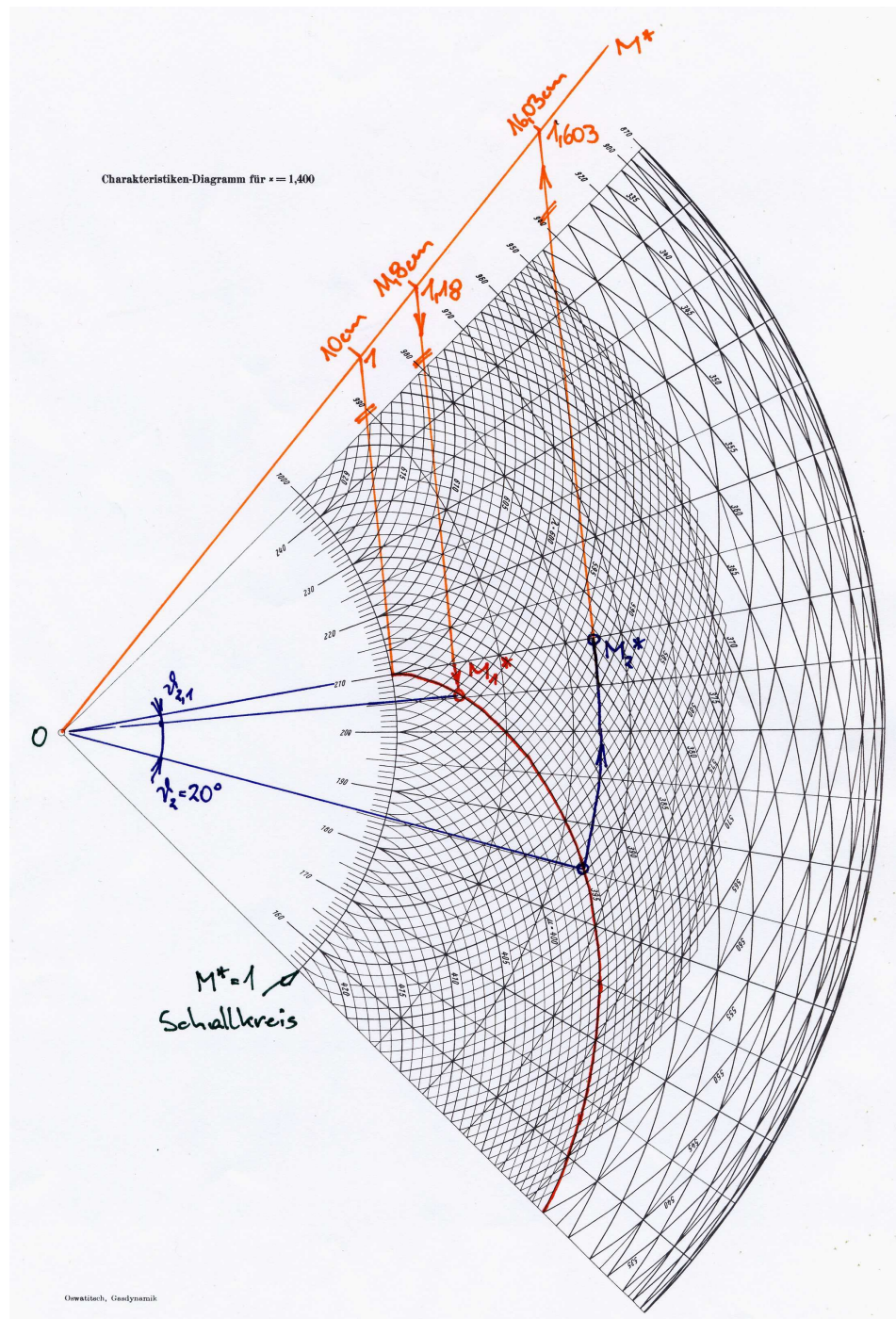
Über die Kante vom Bereich ① nach Bereich ② wird das Medium *isentrop* (verlustfrei) beschleunigt (Prandtl-Meyer-Fächer), d.h. $\frac{p_{20}}{p_{10}} = 1$.

Das Charakteristikendiagramm gilt für $M_1^* = 1$. Wir müssen also zuerst das Medium durch eine fiktive Umlenkung um ϑ_{21} auf $M_1^* = 1,188$ beschleunigen und können erst dann den Wert von M_2^* bestimmen.

Aus der Isentropentabelle lesen wir folgende Werte ab:

$$\begin{aligned} M_1^* = 1,188 &\Rightarrow \vartheta_{21} = 4,6 \quad \rightarrow \quad \vartheta_{21} + \vartheta_{22} = 24,6^\circ \\ &\rightarrow M_2^* = 1,603 \quad \rightarrow \quad M_2 = 1,936 \\ &\rightarrow \frac{p_2}{p_{20}} = 0,1412 \\ &\rightarrow \frac{p_2}{p_1} = \frac{p_2}{p_{20}} \cdot \frac{p_{20}}{p_{10}} \cdot \frac{p_{10}}{p_1} = 0,141 \cdot 1 \cdot \frac{1}{0,396} = 0,3613 \\ &\rightarrow p_2 = 0,356 \cdot p_1 = 0,356 \cdot 1,665 = 0,594 \text{ bar} \end{aligned}$$

$$\text{Machwinkel: } \sin \alpha_2 = \frac{1}{M_2} \quad \rightarrow \quad \alpha_2 = \arcsin \frac{1}{1,936} = 31,2^\circ$$



Zustand in Bereich 3

Die Berechnung erfolgt analog zum Bereich ① mit dem Umlenkwinkel $\vartheta_3 = 10^\circ$.

$$\begin{aligned} \gamma_3 &= 40,7^\circ \\ M_3 &= 1,527 \quad \rightarrow \quad M_3^* = 1,413 \\ \frac{p_{03}}{p_{02}} &= 0,986 \quad \frac{p_3}{p_{03}} = 0,2427 \quad \frac{p_3}{p_2} = 1,692 \quad \rightarrow \quad p_3 = 1,004 \text{ bar} \end{aligned}$$

11.1.2 Widerstandsbeiwert c_w

a. Lineare Theorie:

(siehe Beispiel 9.3)

Mit $\tan \vartheta = \frac{\tau/2}{1/2} = \tau \ll 1$ ergibt sich der Widerstandsbeiwert zu

$$\tau = \tan \vartheta_1 = 0,176 \quad \rightarrow \quad c_w = \frac{4\tau^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} = 0,0996$$

b. Nichtlineare Theorie:

Impulsbilanz auf der Körperoberfläche

$$0 = - \oint_{\partial KV} p \vec{n} dO + \underbrace{\vec{F}_K}_{-\vec{R}} \quad \rightarrow \quad \vec{R} = - \oint_{\partial KV} p \vec{n} dO$$

Aus Symmetriegründen ist $R_y = 0$ (d.h. der Auftriebsbeiwert $c_a = 0$)

$$R_x = - \oint_{\partial KV} p n_x dO$$

$$\text{mit } n_x = -\tau h'_{o,u} = \begin{cases} \text{Oberseite} & \dots & \begin{cases} -\tau & 0 \leq x \leq 0,5 \\ \tau & 0,5 \leq x \leq 1 \end{cases} \\ \text{Unterseite} & \dots & \begin{cases} -\tau & 0 \leq x \leq 0,5 \\ \tau & 0,5 \leq x \leq 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$- \oint_{\partial KV} p n_x dO = - \oint_{\partial KV} p n_x b ds \quad \text{mit } \begin{cases} ds \approx dx & \dots \text{Unterseite} \\ ds \approx -dx & \dots \text{Oberseite} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow R_x &= - \left\{ \int_0^{1/2} p_1(-\tau)b dx + \int_{1/2}^1 p_2\tau b dx + \int_1^{1/2} p_2\tau b(-dx) + \int_{1/2}^0 p_1(-\tau)b(-dx) \right\} \\ &= (p_1 - p_2)\tau b \end{aligned}$$

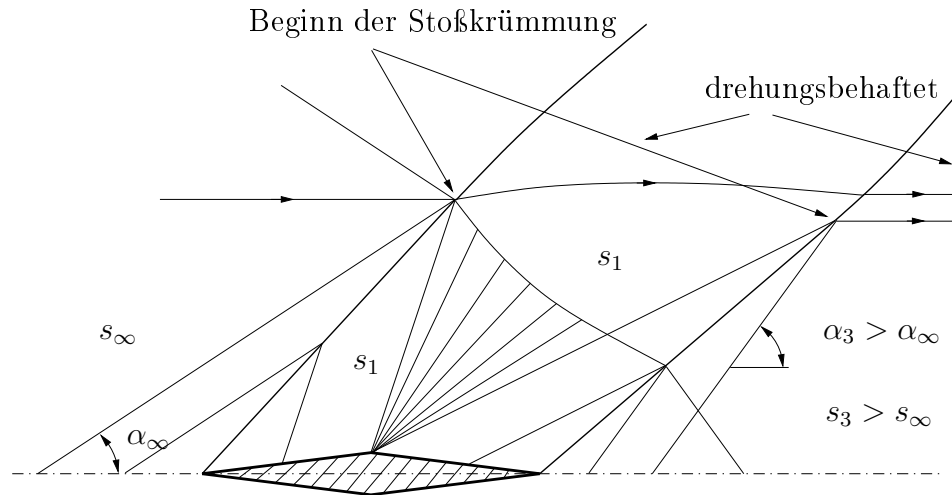
$$\Rightarrow c_w = \frac{F_W}{\frac{\rho_\infty}{2} u_\infty^2 A} = \frac{R_x}{\frac{\rho_\infty}{2} u_\infty^2 1b} = \frac{p_1 - p_2}{\frac{\rho_\infty}{2} u_\infty^2} \tau$$

mit $\tan \frac{\phi}{2} = \tau$:

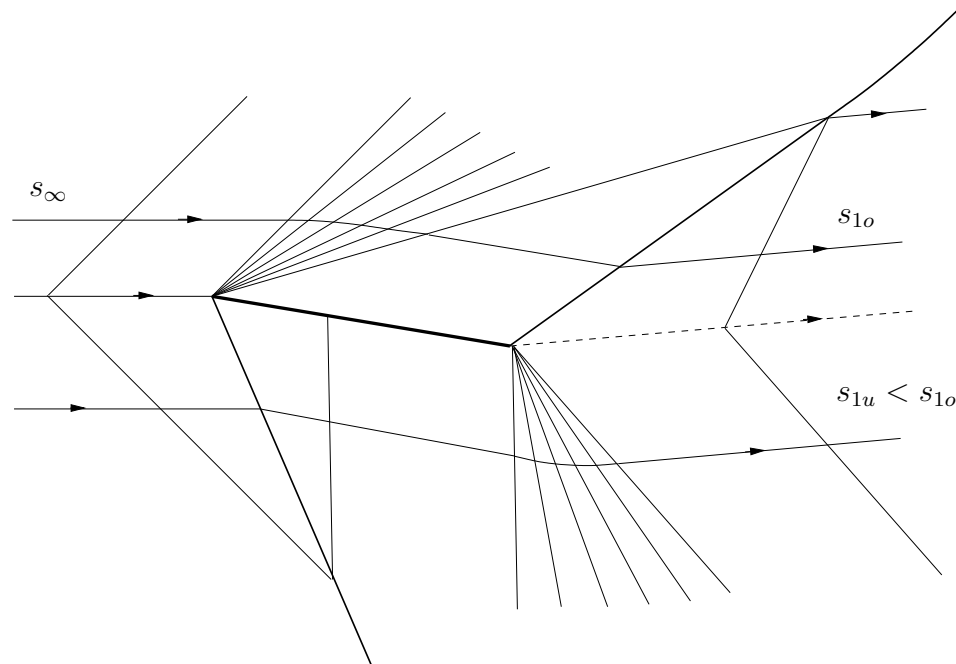
$$c_w = 0,1032$$

11.1.3 Stromlinienbild

Stromlinienbild eines symmetrisch angestellten Rautenprofils in Überschallströmung:



Stromlinienbild einer angestellten Platte in Überschallströmung:



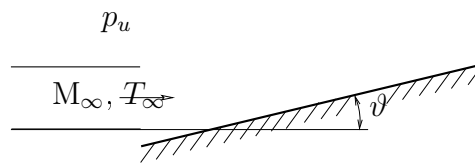
11.2 Umlenkung eines Überschallfreistrahls.

Ein Überschallparallelstrahl eines idealen Gases mit $\kappa = 1,4$ und $c_p = 1005 \text{ J/kg K}$ mit $M_\infty = 2$ und $T_\infty = 293 \text{ K}$ trifft auf eine unter einem Winkel $\vartheta = 10^\circ$ geneigte Platte. Der nach dem schiefen Verdichtungsstoß entstehende Überdruck muß am Strahlaußenrand

durch eine Prandtl-Meyer Expansion auf Umgebungsdruck $p_u = 1$ bar entspannt werden (am Strahlaußenrand ist immer $p = p_u$).

Man bestimme

1. den Druck p_∞ , die Geschwindigkeit u_∞ und die Schallgeschwindigkeit c_∞ im ungestörten Parallelstrahl,
2. die sich ergebenden Strömungsverhältnisse im reflektierten Strahl nach der *linearen* Theorie (Drücke und Geschwindigkeiten im entstehenden Wellenmuster),
3. das sich nach der *nichtlinearen* Theorie ergebende Strömungsbild und den Druck p_1 , die Machzahl M_1 und die Geschwindigkeit u_1 nach dem schiefen Verdichtungsstoß sowie
4. den Druck p_2 , die Machzahl M_2 , die Geschwindigkeit u_2 und den Umlenkwinkel ε am Strahlaußenrand nach der Expansion.

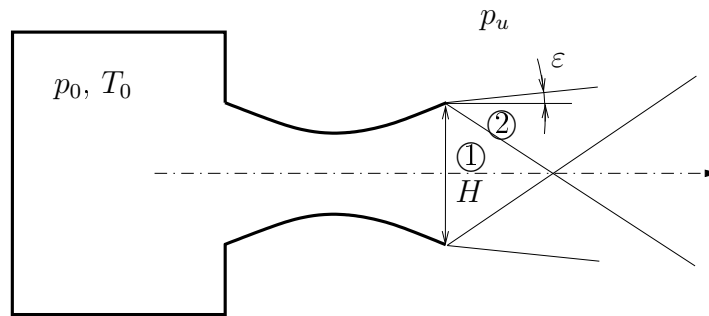


11.3 Schwingender Freistrahler.

Ein ideales Gas mit $\kappa = 1,4$ und $c_p = 1005$ J/kg K strömt als Überschallparallelstrahl aus einer Düse gegen den Umgebungsdruck $p_u = 1$ bar aus. Der Ruhedruck im Kessel ist $p_0 = 10$ bar, die Ruhetemperatur $T_0 = 560$ K und die Machzahl im Mündungsquerschnitt $H \cdot t$ ($t \dots$ Tiefeneinheit) ist mit $M_1 = 2$ gegeben.

Man bestimme

1. den Druck p_1 , die Geschwindigkeit u_1 und die Schallgeschwindigkeit c_1 im Gebiet ①,
2. mit Hilfe der *linearen* Theorie den Expansionswinkel ε , die Geschwindigkeit u_2 und die Machzahl M_2 im Gebiet ②, *Hinweis:* Am Strahlrand muß jeweils Umgebungsdruck herrschen.
3. die Werte von ε , u_2 und M_2 aus der *nichtlinearen* Theorie.
4. Man vervollständige das Wellenmuster des Freistrahles weiter stromab und gebe die Wellenlänge des periodischen Musters bei gegebenem H und kleinem ε an.
5. Wie ändern sich die Strömungsverhältnisse, wenn der Überschallstrahl gegen Überdruck austritt? ($p_1 < p_u$).

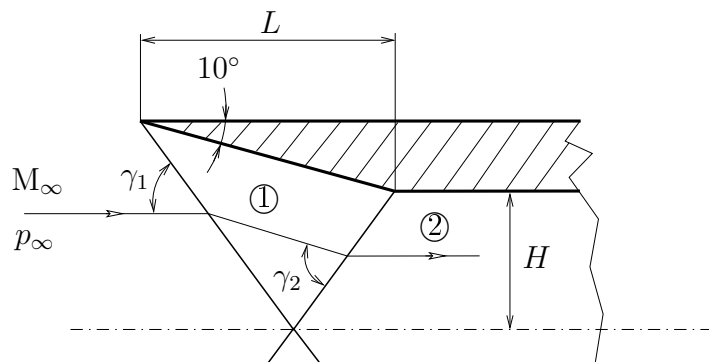


11.4 Kanaleinlauf.

Am Einlauf eines ebenen, symmetrischen Kanals entsteht das skizzierte Strömungsmuster, wenn der Kanal mit Luft (ideales Gas $\kappa = 1,4$, $R = 287 \text{ J/kg K}$) unter $M_\infty = 3$ und $p_\infty = 1 \text{ bar}$, $T_\infty = 288 \text{ K}$ angeströmt wird. Die schiefen Verdichtungsstöße sollen nach dem Auftreffen auf das Ende des konvergenten Teiles des Kanals nicht reflektiert werden. Man berechne

1. die Machzahlen, Drücke, Ruhedrucke, Dichten, Temperaturen, Schallgeschwindigkeiten und Winkeln in den Gebieten ① und ②,
2. die Gesamtentropieerhöhung,
3. das Verhältnis L/H , damit das skizzierte Strömungsbild realisiert werden kann.

Hinweis: Trifft der zweite Verdichtungsstoß nicht auf die Kanalkante, so ist eine Skizze des entstehenden Wellenmusters nach der *linearen* Theorie für die Berechnung hilfreich.



Kapitel 12

Dünne Reibungsschichten

12.1 Laminare, selbstähnliche Grenzschichten (ebenes Problem).

Ausgehend von der reibungsfreien Potentialströmung soll durch Übergang auf reale, reibungsbehaftete Strömungen, welche die Haftbedingung an einer Körperoberfläche erfüllen, die Größenordnung der sich ausbildenden Reibungsgrenzschicht ermittelt werden. Durch Einführung geeigneter dimensionsloser Größen ermittle man aus den Grundgleichungen (inkompressibel) im Grenzfall $Re \rightarrow \infty$ die Grenzschichtgleichungen mit dementsprechenden Randbedingungen. Unter welchen Bedingungen sind die Grenzschichtprofile selbstähnlich? Für selbstähnliche Grenzschichten bestimme man die Verdrängungsdicke δ^* und den lokalen Reibungsbeiwert c_f' und spezialisiere die Ergebnisse für die einseitige Plattenströmung.

12.1.1 Grundgleichungen

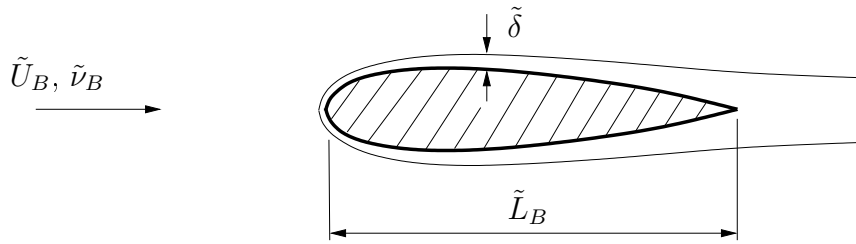
Voraussetzungen: konstante Stoffwerte, ebene, inkompressible Strömung.

Grundgleichungen

($\tilde{}$ bedeutet dimensionsbehaftete Größe)

$$\begin{aligned} \text{MB} \quad \dots \quad & \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0, \\ \text{IB},x \quad \dots \quad & \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{\nu} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \tilde{\nu} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \\ \text{IB},y \quad \dots \quad & \tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} + \tilde{\nu} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} + \tilde{\nu} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2}. \end{aligned}$$

Abschätzen der Grenzschichtdicke $\tilde{\delta}$ aus Dimensionsbetrachtungen



• charakteristische molekulare Impulstransportgeschwindigkeit $\sim \frac{\tilde{\nu}_B}{\tilde{\delta}}$

• typische Teilchenverweilzeit $\sim \frac{\tilde{L}_B}{\tilde{U}_B}$,

→ Grenzschichtdicke: $\tilde{\delta} \sim \frac{\tilde{\nu}_B}{\tilde{\delta}} \cdot \frac{\tilde{L}_B}{\tilde{U}_B}$ bzw. $\frac{\tilde{\delta}}{\tilde{L}_B} \sim \sqrt{\frac{\tilde{\nu}_B}{\tilde{U}_B \tilde{L}_B}} = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}}$

→ Quergeschwindigkeit aus MB: $\tilde{v} \sim \tilde{\delta} \frac{\tilde{U}_B}{\tilde{L}_B}$ bzw. $\frac{\tilde{v}}{\tilde{U}_B} \sim \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}}$ **Grenzschichtkoordinaten**

Nach dem Einführung der dimensionslosen Größen „Grenzschichtkoordinaten“

$$x = \frac{\tilde{x}}{\tilde{L}_B}, \quad y = \frac{\tilde{y}}{\tilde{L}_B} \sqrt{\text{Re}}, \quad u = \frac{\tilde{u}}{\tilde{U}_B}, \quad v = \frac{\tilde{v}}{\tilde{U}_B} \sqrt{\text{Re}},$$

$$\nu = \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{\nu}_B} = 1, \quad \rho = \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\rho}_B} = 1, \quad p = \frac{\tilde{p} - \tilde{p}_B}{\tilde{\rho}_B \tilde{U}_B^2},$$

wobei mit \tilde{L}_B eine charakteristische Bezugsgröße, $\text{Re} = \frac{\tilde{U}_B \tilde{L}_B}{\tilde{\nu}_B}$ die Reynoldszahl, \tilde{U}_B eine geeignete Bezugsgeschwindigkeit, $\tilde{\rho}$ die Dichte, $\tilde{\nu} = \tilde{\mu}/\tilde{\rho}$ die kinematische Zähigkeit, \tilde{p} der Druck und mit dem Index 'B' Bezugsgrößen bezeichnet werden, ergeben sich die Grundgleichungen zu

$$\begin{aligned} \text{MB} \quad \dots \quad & \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ \text{IB,x} \quad \dots \quad & u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + O\left(\frac{1}{\text{Re}}\right), \\ \text{IB,y} \quad \dots \quad & \frac{1}{\text{Re}} \left[u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right] = -\frac{dp}{dy} + O\left(\frac{1}{\text{Re}}\right). \end{aligned}$$

Unter Grenzschichtnäherung erster Ordnung versteht man nun den Übergang $\text{Re} \rightarrow \infty$. Die sich daraus ergebenden *Grenzschichtgleichungen* lauten

$$\begin{aligned} \text{MB} \quad \dots \quad & \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ \text{IB,x} \quad \dots \quad & u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \text{IB,y} \quad \dots \quad & 0 = \frac{\partial p}{\partial y} \rightarrow p = p(x). \end{aligned}$$

Die zugehörigen Randbedingungen sind die *Haftbedingung* an der Wand

$$y = 0 : \quad u = v = 0,$$

und die *Anpassungsbedingung* am Grenzschichttrand an die reibungsfreie Außenströmung

$$\lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = \lim_{Y \rightarrow 0} U(x, Y) = U_w(x) .$$

Dabei wird mit $U(x, Y)$ die Geschwindigkeitsverteilung der reibungsfreien Außenströmung um den betrachteten Körper, mit $U_w(x)$ der daraus resultierenden Wandgeschwindigkeit an der Körperoberfläche $Y = 0$ und mit Y die ungestreckte Koordinate senkrecht zur Körperoberfläche bezeichnet. Die dimensionslose Form der Bernoulli-Gleichung liefert den Zusammenhang zwischen dem der Grenzschicht aufgeprägten Druckgradienten und der Wandgeschwindigkeit

$$\frac{U_w^2(x)}{2} + p(x) = \text{const} \quad \left| \frac{d}{dx} \right. \quad \rightarrow \quad \frac{dp}{dx} = -U_w \frac{dU_w}{dx} .$$

Stromfunktion

Die dimensionsbehaftete Stromfunktion $\tilde{\psi}(\tilde{x}, \tilde{y})$ hat die bekannte Eigenschaft

$$\tilde{\psi}_{\tilde{x}} = -\tilde{v} , \quad \tilde{\psi}_{\tilde{y}} = \tilde{u} .$$

Schreibt man für die dimensionslose Form

$$\psi = \frac{\sqrt{\text{Re}}}{\tilde{L}_B \tilde{U}_B} \tilde{\psi} ,$$

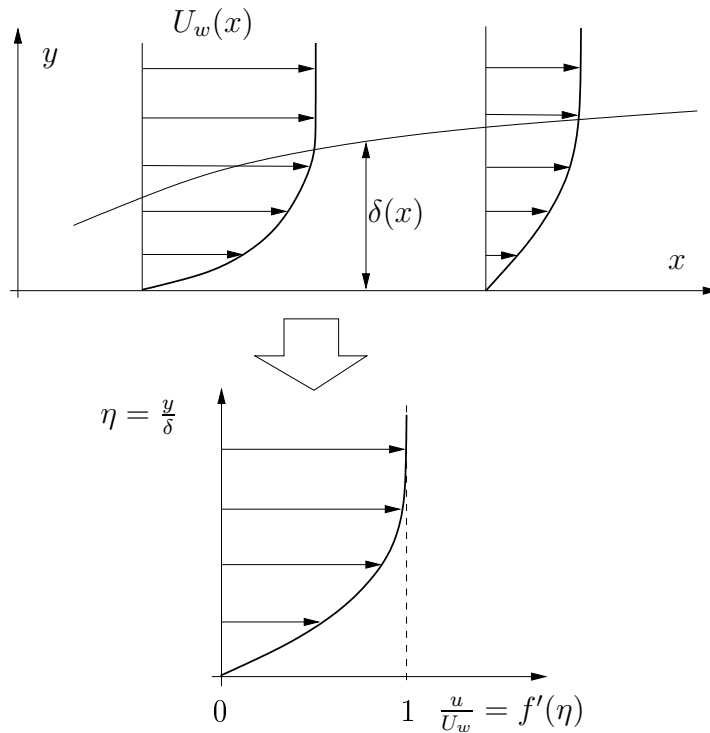
so gilt

$$\psi_x = -v , \quad \psi_y = u .$$

Das Einführen der Stromfunktion in die Grenzschichtgleichungen liefert

$$\begin{array}{ll} \text{MB} & \dots \quad \psi_{yx} - \psi_{xy} = 0 , \\ \text{IB,x} & \dots \quad \psi_y \psi_{yx} - \psi_x \psi_{yy} - U_w \frac{dU_w}{dx} - \psi_{yyy} = 0 . \end{array}$$

Im folgenden wird der Frage nachgegangen, unter welchen Bedingungen die Geschwindigkeitsprofile in der Grenzschicht *geometrisch ähnlich* sind.



Ähnlichkeitslösung

Mit dem Ansatz

$$\eta = \frac{y}{\delta(x)}, \quad f(\eta) = \frac{\psi(x, y)}{\delta(x)U_w(x)},$$

wobei mit $\eta(x, y)$ die sog. *Ähnlichkeitsvariable* und $\delta(x)$ die *Grenzschichtdicke* bezeichnet werden und $f(\eta)$ die Rolle der Stromfunktion übernimmt, wird

$$u = \psi_y = \delta U_w \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \eta}}_{1/\delta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = U_w f_\eta,$$

$$v = -\psi_x = -\frac{\partial}{\partial x}(\delta U_w) f + U_w \frac{\partial \delta}{\partial x} \eta f_\eta,$$

$$\psi_{yx} = \dots, \quad \psi_{yy} = \dots, \quad \psi_{yyy} = \dots \quad (\text{selbst rechnen!}).$$

Für die Impulsbilanz in Strömungsrichtung ergibt sich damit

$$\text{IB, x} \quad f_{\eta\eta\eta} + \underbrace{f f_{\eta\eta}}_A \left(U_w \delta \frac{\partial \delta}{\partial x} + \delta^2 \frac{\partial U_w}{\partial x} \right) + (1 - f_\eta^2) \underbrace{\delta^2 \frac{\partial U_w}{\partial x}}_B = 0.$$

Selbstähnlichkeit liegt nur dann vor, wenn $A = \text{const}$ und $B = \text{const}$ gilt. Die Stromfunktion f ist dann, wie gewünscht, ausschließlich eine Funktion der Ähnlichkeitsvariablen η , und die Impulsbilanz reduziert sich auf eine *gewöhnliche Differentialgleichung*. **Keilströmung**

Was bedeuten die Bedingungen $A = \text{const}$ und $B = \text{const}$ für die mögliche Form der Wandgeschwindigkeit $U_w(x)$ und der Grenzschichtdicke $\delta(x)$?

Eine wichtige Lösungsklasse sind die sog. *Keilströmungen*, für sie gilt folgender Ansatz

$$U_w(x) = x^m, \quad \delta(x) = C_n x^n, \quad C_n = \text{const.}$$

Damit gilt

$$B = \text{const} : C_n^2 x^{2n} m x^{m-1} = \text{const} \quad \rightarrow \quad 2n + m - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad n = \frac{1-m}{2},$$

$$A = \text{const} : x^{m+2n-1} C_n^2 (n+m) = \text{const} = 1 \quad \text{gewählt} \quad \rightarrow \quad C_n = \sqrt{\frac{2}{m+1}},$$

d.h. falls die Wandgeschwindigkeit aus der Potentialtheorie durch eine Potenzfunktion $U_w(x) = x^m$ beschrieben wird, ergibt sich die entsprechende Reibungsgrenzschichtdicke zu

$$\delta(x) = \sqrt{\frac{2}{m+1}} x^{\frac{1-m}{2}}.$$

Die Impulsgleichung reduziert sich auf die *Falkner-Skan-Gleichung*

$$f''' + f f'' + \beta(1 - f'^2) = 0, \quad \beta = \frac{2m}{1+m},$$

mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} \eta = 0 : \quad f(0) = f'(0) = 0 & \quad (\text{Haftbedingung}), \\ \eta \rightarrow \infty : \quad f'(\infty) = 1 & \quad (\text{Anpassungsbedingung}). \end{aligned}$$

Für praktische Rechnungen sind die *Verdrängungsdicke* δ^* und der *lokale Reibungsbeiwert* c'_f von Bedeutung. Es ist

$$\delta^*(x) = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U_w}\right) dy = \delta(x) \int_0^\infty [1 - f'(\eta)] d\eta = \delta(x) \beta_1,$$

die dimensionsbehaftete Verdrängungsdicke ergibt sich daher zu

$$\tilde{\delta}^*(x) = \frac{\delta^*(x) \tilde{L}_B}{\sqrt{\text{Re}}} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{\delta}^*(\tilde{x}) = \frac{\delta^*(\frac{\tilde{x}}{\tilde{L}_B}) \tilde{L}_B}{\sqrt{\text{Re}}}.$$

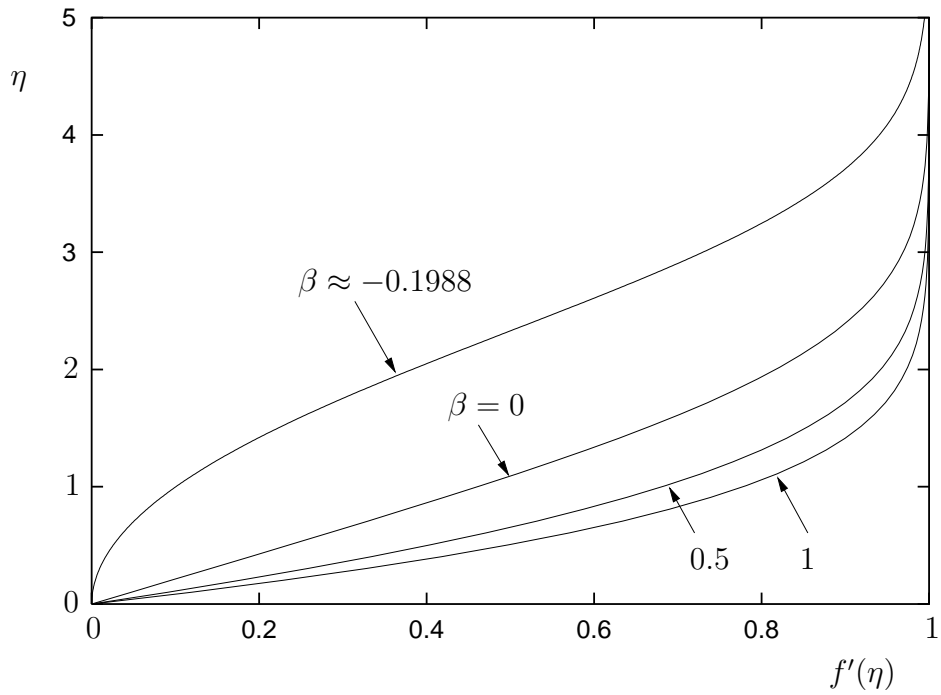
Die *Wandschubspannung* $\tilde{\tau}_w$ errechnet sich aus

$$\tilde{\tau}_w(\tilde{x}) = \tilde{\mu} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \Big|_{\tilde{y}=0} = \tilde{\mu} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} \frac{\sqrt{\text{Re}}}{\tilde{L}_B} \tilde{U}_B,$$

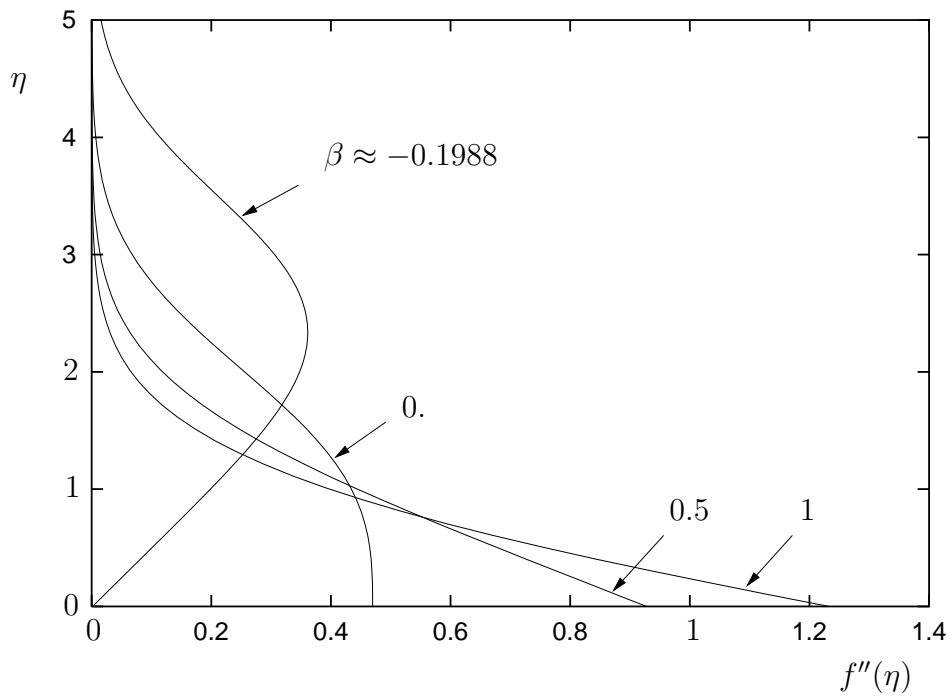
und der lokale Reibungsbeiwert daraus zu

$$c'_f(x) = \frac{\tilde{\tau}_w(x)}{\tilde{\rho}_B \tilde{U}_B^2 / 2} = \frac{2}{\sqrt{\text{Re}}} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0}}_{\psi_{yy} = \frac{U_w}{\delta} f''(\eta)} = \frac{2U_w(x) f''(0)}{\delta(x) \sqrt{\text{Re}}}.$$

Die Verdrängungsdicke wird z.B. für die Korrektur der reibungsfreien Außenströmung benötigt (hierarchisches Konzept der Grenzschichtrechnung, Grenzschichttheorie höherer Ordnung) und der Reibungsbeiwert zur Berechnung des Reibungswiderstandes, den der betrachtete Körper in der Strömung erfährt.



Geschwindigkeitsprofile einiger Falkner-Skan-ähnlichkeitslösungen.



Schubspannungsverteilung einiger Falkner-Skan-ähnlichkeitslösungen.

Strömungstyp	β	m	$f''(0)$	β_1
Ablöseprofil	-0.1988	-0.090	0	2.3586
ebene Platte	0	0	0.4696	1.2168
Keilströmung	0.1	1/19	0.5870	1.0803
”	0.2	1/9	0.6867	0.9842
”	0.3	3/17	0.7748	0.9110
”	0.4	1/4	0.8544	0.8526
”	0.5	1/3	0.9277	0.8045
”	0.6	3/7	0.9958	0.7640
”	0.7	7/13	1.0598	0.7291
”	0.8	2/3	1.1203	0.6987
”	0.9	9/11	1.1777	0.6718
Staupunkt	1	1	1.2326	0.6479

Zusammenstellung einiger Daten für Falkner-Skan Ähnlichkeitsströmungen.

Plattengrenzschicht:

$$\tilde{U}_w = \tilde{U}_B = \text{const.} \quad \rightarrow \quad U_w = 1 \quad \rightarrow \quad m = 0, \beta = 0$$

$$\delta(x) = \sqrt{2x}, \quad \delta^* = \sqrt{2x} \cdot 1.2168 = 1.7207\sqrt{x} \quad \rightarrow \quad \tilde{\delta}^* = \frac{1.7208}{\sqrt{\text{Re}_{\tilde{x}}}} \tilde{x}, \quad \text{Re}_{\tilde{x}} = \frac{\tilde{U}_B \tilde{x}}{\tilde{\nu}_B}$$

$$c'_f = \frac{2 \cdot 0.4696}{\sqrt{2x} \sqrt{\text{Re}}} = \frac{0.664}{\sqrt{x} \sqrt{\text{Re}}} = \frac{0.664}{\sqrt{\text{Re}_{\tilde{x}}}}$$

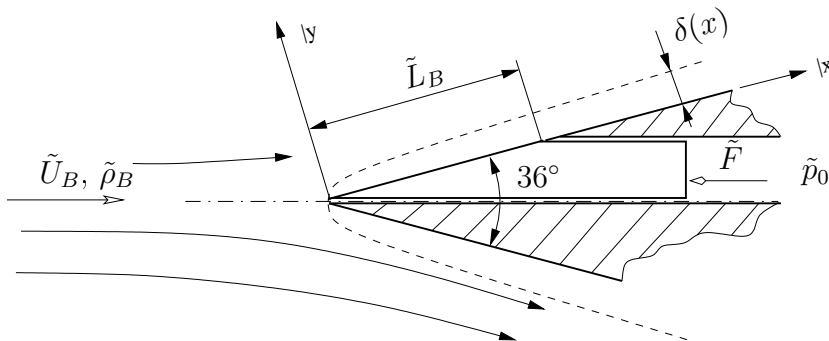
12.2 Reibungsbehaftete, ebene Keilumströmung hoher Re-Zahl.

Ein Keil mit dem Keilwinkel von 36° wird parallel zur Symmetrieachse angeströmt. Das unschraffierte, reibungsfrei gelagerte Gleitstück (Bezugslänge \tilde{L}_B) wird in der gezeichneten Lage (Haltekraft \tilde{F}) gehalten (kennzeichnet dimensionsbehaftete Größen).

Man bestimme

1. die Wandgeschwindigkeit $U_w(x)$ der reibungsfreien Außenströmung,
2. die dimensionsbehaftete Dicke der sich ausbildenden Reibungsgrenzschicht $\tilde{\delta}(x)$,
3. den Reibungsbeiwert $c'_f(x)$ und den Anteil der Haltekraft \tilde{F}_R , der sich aufgrund der Wandreibung am Gleitstück (Breite \tilde{b}) ergibt (die Bezugsgeschwindigkeit sei \tilde{U}_B),

4. den Anteil \tilde{F}_p der Haltekraft \tilde{F} , der sich aufgrund der Druckverteilung am Gleitstück ergibt. Auf der Hinterseite des Gleitstückes herrscht der Druck \tilde{p}_0 , an der Keilvorderkante der Staudruck $\tilde{p}_w(0)$.



12.2.1 Wandgeschwindigkeit $U_w(x)$ der reibungsfreien Anströmung

Aus dem Keilwinkel $\vartheta = 36^\circ$ erhalten wir (siehe Tabelle Bsp. 11.1)

$$\beta\pi = 36^\circ = \frac{2\pi}{10} \quad \rightarrow \quad \beta = \frac{2}{10} = 0,2 \quad \Rightarrow \quad \text{aus Tabelle: } m = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow \quad U_w(x) = x^{\frac{1}{9}}$$

Bemerkung:

Außenströmung mittels Potentialtheorie:

$$F(z) = z^n = r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)) \quad \Rightarrow \quad \Phi = r^n \cos(n\varphi), \quad \Psi = r^n \sin(n\varphi)$$

Auf der Keiloberfläche gilt $\Psi = 0$.

$$\Psi(r, \varphi = \pi - \frac{\pi}{10}) = r^n \sin(n \frac{9\pi}{10}) = 0 \quad \rightarrow \quad n = \frac{10}{9}$$

$$\Rightarrow \quad U_W(r) = u(r, 0) = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{\varphi=0} = nr^{n-1} \cos(n\varphi) \Big|_{\varphi=0} = nr^{n-1} = \frac{10}{9} r^{\frac{1}{9}}$$

$$\rightarrow \quad U_W(r) \sim r^{\frac{1}{9}} \quad \rightarrow \quad m = \frac{1}{9}$$

12.2.2 Grenzschichtdicke

Für die dimensionslose Grenzschichtdicke bedeutet das

$$\delta(x) = \sqrt{\frac{2}{m+1}} x^{\frac{1-m}{2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9}{10}} x^{\frac{8}{2 \cdot 9}} = \sqrt{\frac{9}{5}} x^{\frac{4}{9}}$$

Umrechnung auf dimensionsbehaftete Größen

$$\tilde{\delta}(x) = \delta(x) \frac{\tilde{L}_B}{\sqrt{\text{Re}}} = \sqrt{\frac{9}{5}} \frac{\tilde{L}_B}{\sqrt{\text{Re}}} x^{\frac{4}{9}}$$

$$\text{bzw. } \tilde{\delta}(\tilde{x}) = \sqrt{\frac{9}{5}} \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}} \frac{\tilde{L}_B}{\tilde{L}_B^{\frac{4}{9}}} \tilde{x}^{\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{9}{5}} \frac{\tilde{L}_B^{\frac{5}{9}}}{\sqrt{\text{Re}}} \tilde{x}^{\frac{4}{9}}$$

12.2.3 Reibungsbeiwert c'_f

Der Reibungsbeiwert c'_f ergibt sich mit $f''(0) = 0,6867$ (Tabelle) zu

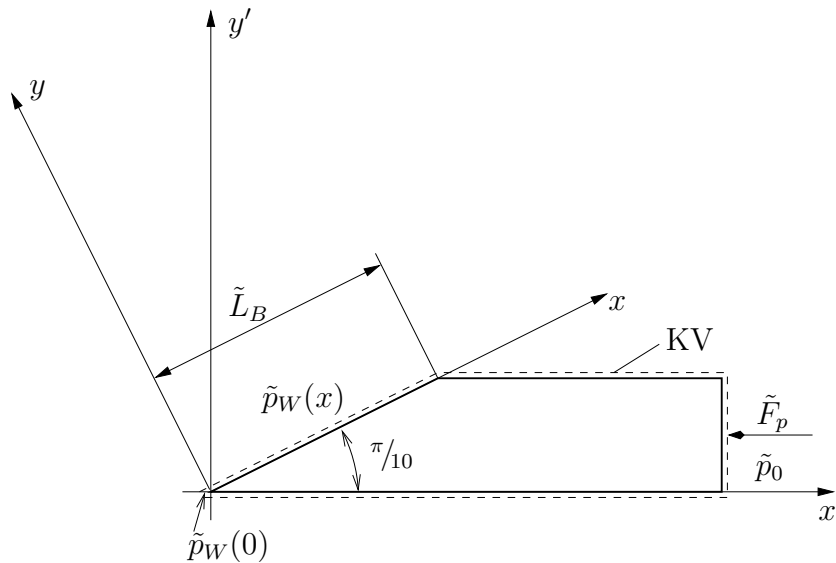
$$\begin{aligned} c'_f(x) &= \frac{2U_w(x)f''(0)}{\delta(x)\sqrt{\text{Re}}} \\ &= \frac{2 \cdot x^{\frac{1}{9}} \cdot 0,6867 \cdot \sqrt{\frac{5}{9}}}{x^{\frac{4}{9}} \sqrt{\text{Re}}} \\ &= \frac{1,024}{\sqrt{\text{Re}}} x^{-\frac{3}{9}} \end{aligned}$$

12.2.4 Haltekraft $\tilde{F} = \tilde{F}_R + \tilde{F}_P$

\tilde{F}_R – Anteil der Haltekraft, der sich aufgrund der Wandreibung am Gleitstück ergibt:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{Rx} &= \int_0^{\tilde{L}_B} \tilde{\tau}_w(\tilde{x}) \, d\tilde{x} \tilde{b} \\ &= \frac{\tilde{\rho}_B \tilde{U}_B^2 \tilde{b}}{2} \int_0^{\tilde{L}_B} c'_f(x) \, d\tilde{x} \\ &= \frac{\tilde{\rho}_B \tilde{U}_B^2 \tilde{b} \tilde{L}_B}{2} \frac{1,024}{\sqrt{\text{Re}}} \underbrace{\int_0^1 x^{-\frac{3}{9}} \, dx}_{\frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} \Big|_0^1 = \frac{3}{2}} \\ &= \frac{\tilde{\rho}_B \tilde{U}_B^2 \tilde{b} \tilde{L}_B}{2} \frac{1,536}{\sqrt{\text{Re}}} \\ \Rightarrow \tilde{F}_R &= \tilde{F}_{Rx} \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \end{aligned}$$

\tilde{F}_P – Anteil der Haltekraft, der sich aufgrund der Druckverteilung am Gleitstück ergibt:



Druckanteil in x' -Richtung:

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}_P &= \oint_{\partial \text{KV}} \tilde{p} \vec{n} \, d\tilde{O} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \left[\tilde{b} \int_0^{\tilde{L}_B} \tilde{\rho}_w(x) \, d\tilde{x} \left(-\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= -\tilde{b} \tilde{L}_B \sin\left(\frac{\pi}{10}\right) \int_0^1 \underbrace{\left(\tilde{p}(0) - \tilde{\rho}_B \frac{\tilde{U}_B^2}{2} x^{\frac{2}{9}} \right)}_{\tilde{p}_w(0) - \tilde{\rho}_B \frac{\tilde{U}_B^2}{2} \frac{9}{11}} \, dx + \tilde{b} \tilde{L}_B \sin\left(\frac{\pi}{10}\right) \tilde{p}_0 \\
 &= \tilde{b} \tilde{L}_B \sin\left(\frac{\pi}{10}\right) \left[\tilde{p}_0 + \frac{9}{11} \tilde{\rho}_B \frac{\tilde{U}_B^2}{2} - \tilde{p}_w(0) \right]
 \end{aligned}$$

12.3 Lokale, ebene Staupunktströmung.

Die Strömung in der Nähe eines Staupunkts kann im reibungsfreien Fall durch das komplexe Potential $F(z) = z^2/2$ beschrieben werden. Daraus berechne man die Geschwindigkeit an der Körperwand und prüfe, ob die Voraussetzung für die Einfügung einer selbstähnlichen Grenzschicht gegeben ist. Ist das der Fall, gebe man mit Hilfe der Ergebnisse von Einführungsbeispiels die Verdrängungsdicke und den lokalen Reibungsbeiwert an.

12.4 Schmierspalttheorie.

Man betrachte die skizzierte Situation einer Kunststoffplattenherstellung: Zwei Endlosmetallbänder werden über Reibrollen mit der Umlaufgeschwindigkeit u_0 angetrieben. Über eine entsprechende Anordnung wird von links flüssiger Kunststoff in den Spalt

(=„Schmierspalt“) zwischen den Bändern zugeführt. Durch die entsprechende Formgebung des Spaltes (Höhe $2h(x)$) wird der Kunststoff verdichtet. Am Ende des Spaltes ist das Material durch Wärmeentzug so weit abgekühlt, daß es „erstarrt“ ist und in Form einer Endlosplatte mit der Umfangsgeschwindigkeit der Metallbänder, u_0 , gegen den Umgebungsdruck p_0 abgezogen wird.

1. Für den stationären Betrieb und der Annahme konstanter Stoffwerte bestimme man unter Beachtung der Randbedingungen für Geschwindigkeit und Druck mit Hilfe der Schmierspalttheorie den Geschwindigkeitsverlauf $u(x, y)$ und den Volumenstrom \dot{V} sowie den Druckverlauf $p(x)$ in Abhängigkeit der halben Spalthöhe $h(x)$.
2. Man werte die erhaltenen Ergebnisse für folgenden (linearen) Spalthöhenverlauf (s. Skizze) aus:

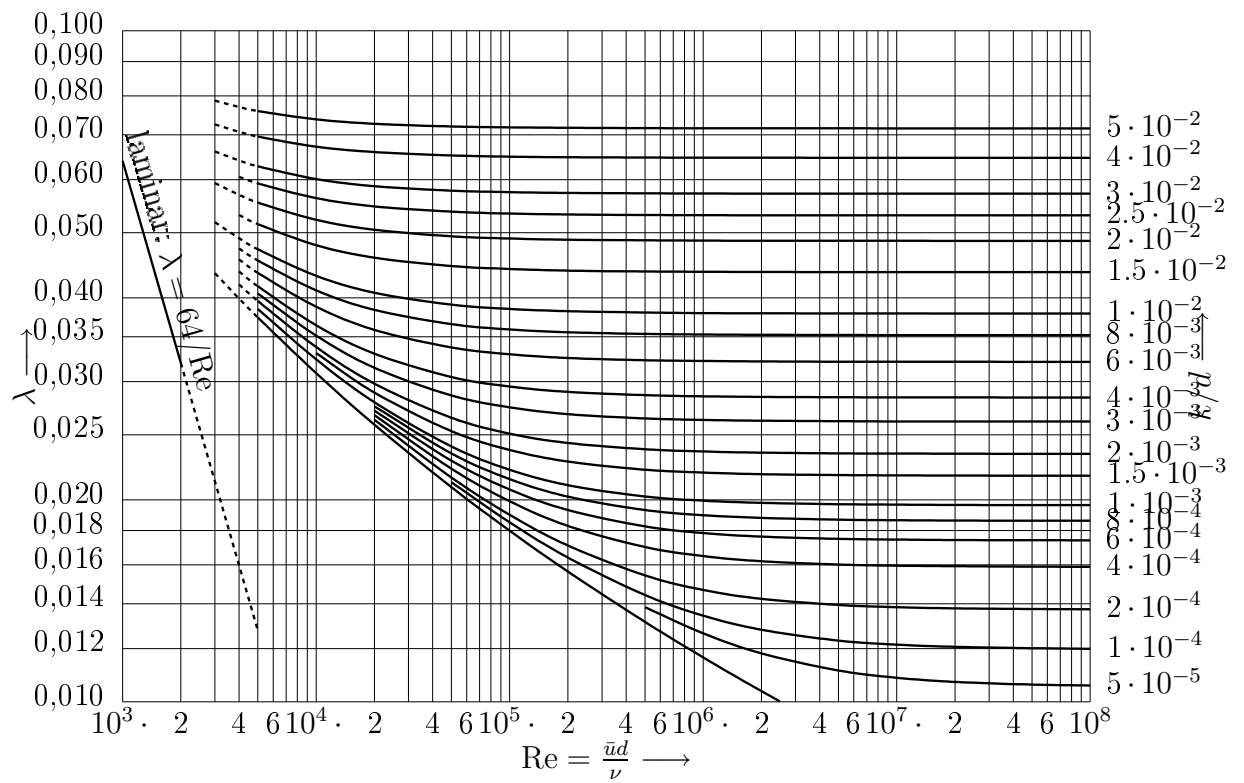
$$h(x) = \begin{cases} h_0 - \frac{x}{L_1}(h_0 - h_1) & 0 \leq x \leq L_1, \\ \frac{h_L - h_1}{L - L_1}(x - L) + h_L & L_1 \leq x \leq L. \end{cases}$$

Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit dem Diagramm für den Druckverlauf unter den gegebenen Größen: $L = 50$ m, $L_1 = 40$ m, $h_0 = 5$ mm, $h_1 = 1,5$ mm und $h_L = 2,5$ mm. (Die eingezeichneten Geschwindigkeitsprofile sind auf die jeweilige Spalthöhe bezogen.)

Kapitel 13

Anhang

13.1 Colebrook-Diagramm.



13.2 Zustands- und Geschwindigkeitsgrößen im Stromfaden bei isentroper, stationärer Strömung ($\kappa = 1,4$)

Unterschalltabelle

M	M*	$\frac{p}{p_0}$	$\frac{\rho}{\rho_0}$	$\frac{T}{T_0}$	$\frac{\rho v}{\rho^* c^*}$	$\beta = \sqrt{1 - M^2}$
0,05	0,055	0,998	0,999	1,000	0,086	0,999
0,1	0,109	0,993	0,995	0,998	0,172	0,995
0,15	0,164	0,984	0,989	0,996	0,256	0,989
0,2	0,218	0,973	0,980	0,992	0,337	0,980
0,25	0,272	0,958	0,969	0,988	0,416	0,968
0,3	0,326	0,939	0,956	0,982	0,491	0,954
0,35	0,379	0,919	0,941	0,976	0,562	0,937
0,4	0,431	0,896	0,924	0,969	0,629	0,917
0,45	0,483	0,870	0,906	0,961	0,690	0,893
0,5	0,535	0,843	0,885	0,952	0,746	0,866
0,55	0,585	0,814	0,863	0,943	0,797	0,835
0,6	0,635	0,784	0,840	0,933	0,842	0,800
0,65	0,684	0,753	0,816	0,922	0,881	0,760
0,7	0,732	0,721	0,792	0,911	0,914	0,714
0,75	0,779	0,689	0,766	0,899	0,941	0,661
0,8	0,825	0,656	0,740	0,887	0,963	0,600
0,85	0,870	0,623	0,714	0,874	0,980	0,527
0,9	0,915	0,591	0,687	0,861	0,991	0,436
0,95	0,958	0,559	0,660	0,847	0,998	0,312
1,0	1,000	0,528	0,634	0,833	1,000	0,000

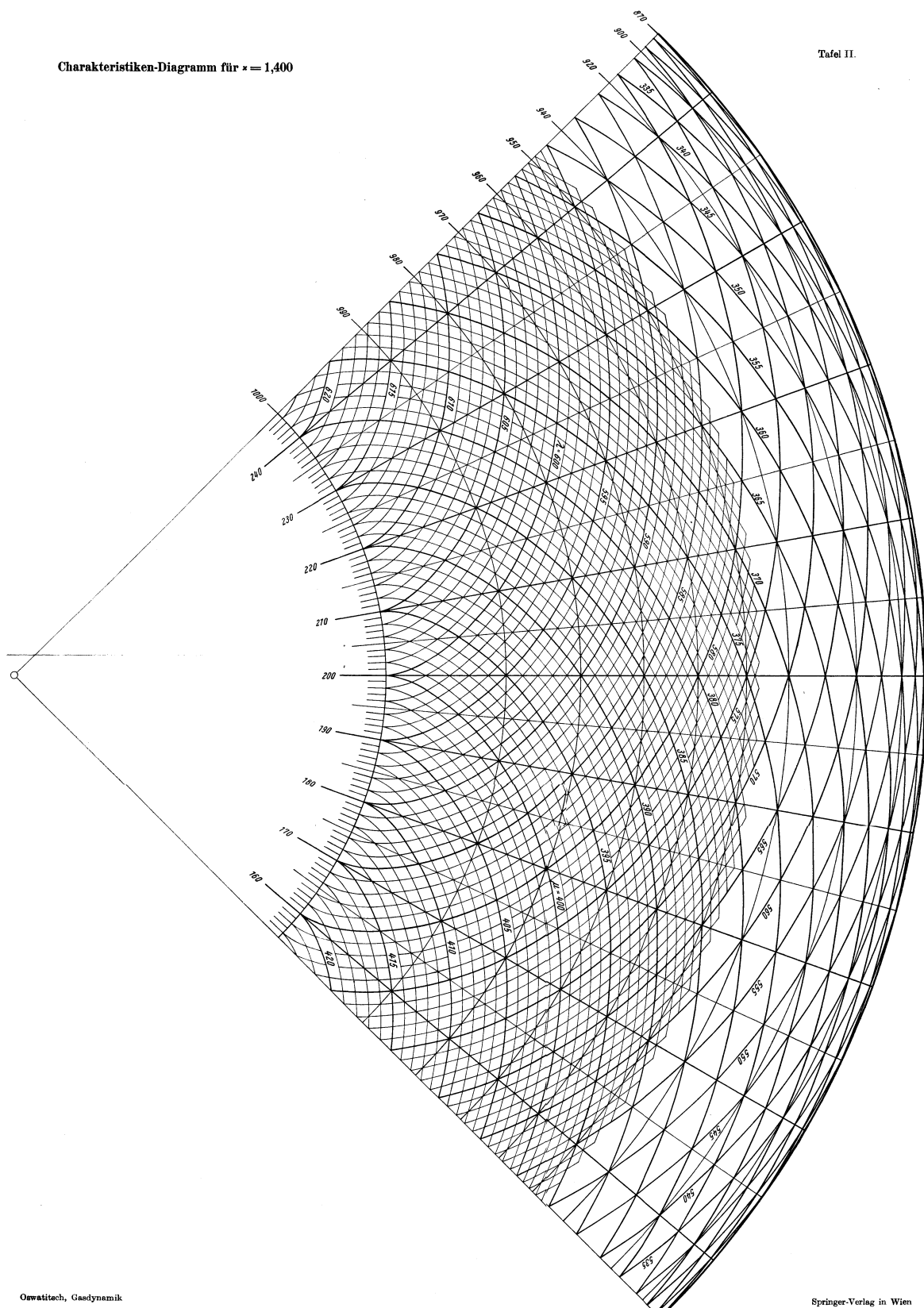
Überschalltabelle

M	M*	$\frac{p}{p_0}$	$\frac{\rho}{\rho_0}$	$\frac{T}{T_0}$	$\frac{\rho v}{\rho^* c^*}$	$\frac{\hat{p}_0}{p_0}$
1,0	1,000	0,528	0,634	0,833	1,000	1,000
1,05	1,041	0,498	0,608	0,819	0,998	1,000
1,1	1,082	0,468	0,582	0,805	0,992	0,999
1,2	1,158	0,412	0,531	0,776	0,970	0,993
1,3	1,231	0,361	0,483	0,747	0,938	0,979
1,4	1,300	0,314	0,437	0,718	0,897	0,958
1,5	1,365	0,272	0,395	0,690	0,850	0,930
1,6	1,425	0,235	0,356	0,661	0,800	0,895
1,7	1,483	0,203	0,320	0,634	0,748	0,856
1,8	1,536	0,174	0,287	0,607	0,695	0,813
1,9	1,586	0,149	0,257	0,581	0,643	0,767
2,0	1,633	0,128	0,230	0,556	0,593	0,721
2,5	1,826	0,059	0,132	0,444	0,379	0,499
3,0	1,964	0,027	0,0762	0,357	0,236	0,328
3,5	2,064	0,0131	0,0452	0,290	0,147	0,213
4,0	2,138	0,00659	0,0277	0,238	0,0933	0,139
4,5	2,194	0,00346	0,0174	0,198	0,0604	0,0917
5,0	2,236	0,00189	0,0113	0,167	0,0400	0,0618
6,0	2,295	0,000633	0,00519	0,122	0,0188	0,0297
7,0	2,333	0,000242	0,00261	0,0926	0,00960	0,0153
8,0	2,359	0,000102	0,00141	0,0725	0,00526	0,00849
9,0	2,377	0,0000474	0,000815	0,0581	0,00306	0,00496
10	2,391	0,0000236	0,000495	0,0476	0,00187	0,00304
20	2,435	0,00000209	0,0000170	0,0123	0,0000651	0,000108
∞	2,4495	0	0	0	0	0

13.3 Charakteristikendiagramm

Charakteristiken-Diagramm für $\kappa = 1,400$

Tafel II.



13.4 Tabelle zum Charakteristikendiagramm für Luft ($\kappa = 1,4$)

Ch	ϑ	M	M*	α	$\frac{p}{p_0}$	$\frac{\rho}{\rho_0}$	$\frac{T}{T_0}$	$\frac{\rho v}{\rho^* c^*}$
1000	0	1.000	1.000	90.00	0.5283	0.6339	0.8333	1.0000
999	1	1.082	1.067	67.55	0.4789	0.5910	0.8103	0.9947
998	2	1.133	1.107	61.97	0.4496	0.5649	0.7957	0.9864
997	3	1.177	1.141	58.17	0.4249	0.5426	0.7830	0.9765
996	4	1.218	1.171	55.18	0.4028	0.5223	0.7712	0.9654
995	5	1.256	1.200	52.77	0.3830	0.5038	0.7602	0.9534
994	6	1.293	1.227	50.67	0.3644	0.4862	0.7494	0.9404
993	7	1.330	1.252	48.75	0.3464	0.4690	0.7389	0.9263
992	8	1.365	1.276	47.10	0.3300	0.4530	0.7285	0.9120
991	9	1.400	1.300	45.58	0.3142	0.4374	0.7184	0.8970
990	10	1.435	1.323	44.18	0.2990	0.4222	0.7083	0.8811
989	11	1.469	1.341	42.90	0.2847	0.4077	0.6986	0.8651
988	12	1.502	1.366	41.75	0.2711	0.3937	0.6888	0.8487
987	13	1.537	1.387	40.58	0.2580	0.3800	0.6792	0.8318
986	14	1.570	1.409	39.57	0.2456	0.3669	0.6696	0.8148
985	15	1.604	1.429	38.57	0.2337	0.3541	0.6601	0.7975
984	16	1.638	1.448	37.62	0.2221	0.3415	0.6506	0.7797
983	17	1.673	1.467	36.70	0.2111	0.3294	0.6412	0.7621
982	18	1.707	1.486	35.87	0.2006	0.3175	0.6319	0.7441
981	19	1.741	1.505	35.05	0.1905	0.3060	0.6226	0.7262
980	20	1.775	1.523	34.28	0.1808	0.2948	0.6134	0.7081
979	21	1.809	1.541	33.57	0.1715	0.2839	0.6043	0.6899
978	22	1.844	1.559	32.83	0.1627	0.2733	0.5951	0.6718
977	23	1.879	1.576	32.15	0.1510	0.2629	0.5860	0.6536
976	24	1.915	1.693	31.48	0.1459	0.2529	0.5769	0.6355
975	25	1.950	1.610	30.85	0.1380	0.2430	0.5679	0.6174
974	26	1.986	1.627	30.23	0.1306	0.2335	0.5590	0.5995
973	27	2.023	1.643	29.62	0.1234	0.2243	0.5499	0.5815
972	28	2.060	1.659	29.03	0.1166	0.2153	0.5411	0.5637
971	29	2.096	1.675	28.50	0.1099	0.2066	0.5322	0.5461
970	30	2.134	1.691	27.95	0.1037	0.1982	0.5233	0.5286
969	31	2.172	1.706	27.42	0.09770	0.1899	0.5146	0.5113
968	32	2.211	1.722	26.88	0.09200	0.1819	0.5058	0.4942
967	33	2.249	1.738	26.40	0.08656	0.1741	0.4971	0.4773
966	34	2.289	1.753	25.90	0.08137	0.1666	0.4884	0.4107
965	35	2.329	1.767	25.43	0.07644	0.1593	0.4798	0.4442
964	36	2.369	1.782	24.97	0.07174	0.1522	0.4711	0.4280
963	37	2.411	1.796	24.50	0.06726	0.1454	0.4626	0.4121
962	38	2.453	1.810	24.07	0.06301	0.1389	0.4640	0.3964
961	39	2.495	1.824	23.63	0.05898	0.1325	0.4455	0.3811
960	40	2.538	1.838	23.20	0.05517	0.1263	0.4370	0.3660
959	41	2.581	1.852	22.78	0.05153	0.1203	0.4286	0.3513
958	42	2.626	1.865	22.38	0.04811	0.1145	0.4203	0.3368
957	43	2.671	1.878	21.98	0.04488	0.1089	0.4121	0.3228
956	44	2.718	1.891	21.58	0.04181	0.1035	0.4038	0.3090
955	45	2.764	1.904	21.22	0.03890	0.09835	0.3955	0.2955
954	46	2.812	1.917	20.83	0.03616	0.09336	0.3873	0.2824
953	47	2.861	1.931	20.45	0.03357	0.08853	0.3792	0.2695
952	48	2.911	1.943	20.08	0.03114	0.08391	0.3712	0.2571
951	49	2.961	1.955	19.73	0.02886	0.07946	0.3632	0.2451
950	50	3.013	1.967	19.38	0.02670	0.07518	0.3552	0.2333
949	51	3.066	1.979	19.03	0.02467	0.07106	0.3472	0.2218
948	52	3.119	1.991	18.70	0.02277	0.06711	0.3394	0.2108
947	53	3.174	2.003	18.37	0.02101	0.06334	0.3317	0.2001
946	54	3.230	2.014	18.03	0.01935	0.05973	0.3240	0.1898
945	55	3.287	2.025	17.72	0.01781	0.05628	0.3163	0.1798
940	60	3.594	2.080	16.15	0.01148	0.04114	0.2790	0.1349
936	65	3.941	2.131	14.70	0.007131	0.02926	0.2435	0.09835
930	70	4.339	2.177	13.33	0.004233	0.02017	0.2098	0.06929
925	75	4.802	2.221	12.02	0.002391	0.01341	0.1782	0.04697
920	80	5.348	2.260	10.78	0.001271	0.008541	0.1488	0.03045
915	85	6.007	2.296	9.58	0.0006291	0.005169	0.1217	0.01863
910	90	6.820	2.328	8.43	0.0002849	0.002935	0.09706	0.01078
905	95	7.852	2.356	7.32	0.0001156	0.001541	0.07505	0.005732
900	100	9.210	2.380	6.23	0.00004069	0.0007310	0.05566	0.002745
895	105	11.095	2.401	5.17	0.00001175	0.0003010	0.03903	0.001140
890	110	13.87	2.4183	4.13	0.000002587	0.0001021	0.02533	0.0003896
885	115	18.435	2.4317	3.10	0.0000003670	0.00002531	0.01450	0.00009710
880	120	27.35	2.4413	2.10	0.00000002385	0.000003593	0.006640	0.00001384
875	125	52.48	2.4473	1.10	0.000000002746	0.0000001481	0.001812	0.0000005397
869.55	130.45	∞	2.4495	0.00	0	0	0	0

13.5 Stoßpolarendiagramm

