



# Rechenübung Strömungslehre 322.014

Institut für Strömungsmechanik und Wärmeübertragung  
E322

Christian Hauser

9. März 2007



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Hydrostatik</b>	<b>1</b>
1.1	Flüssigkeitsdruck auf zylindrisch gekrümmte Wand. . . . .	1
1.2	Hydraulische Presse. . . . .	2
1.3	Druckkraft auf Kreiszylinder. . . . .	2
<b>2</b>	<b>Bernoulli-Gleichung</b>	<b>3</b>
2.1	Fallrohr. . . . .	3
2.2	Austrittsdiffusor. . . . .	4
<b>3</b>	<b>Rotierende Flüssigkeit</b>	<b>5</b>
3.1	Rotierende Flüssigkeit. . . . .	5
<b>4</b>	<b>Impulssatz</b>	<b>7</b>
4.1	Rohrkrümmer. . . . .	7
4.2	Düse. . . . .	7
4.3	Schaufelgitter. . . . .	8
4.4	Düse. . . . .	9
4.5	Ausströmvorgang. . . . .	10
4.6	Propeller. . . . .	10
4.7	Teilung eines Wasserstrahls. . . . .	11
4.8	Turbinenschaufel. . . . .	11
4.9	Freistrahл trifft Platte . . . . .	12
<b>5</b>	<b>Drehimpulssatz</b>	<b>15</b>
5.1	Rasensprenger. . . . .	15
5.2	Segnersches Wasserrad. . . . .	15
<b>6</b>	<b>Instationäre Bernoulli-Gleichung</b>	<b>17</b>
6.1	Druckleitung eines Stausees. . . . .	17
6.2	Heberleitung. . . . .	18
<b>7</b>	<b>Kompressible Strömung</b>	<b>19</b>
7.1	Ausströmen aus einem Kessel. . . . .	19
7.2	Pitotrohr. . . . .	20
7.3	Lavaldüse. . . . .	20

7.4	Lavaldüse. . . . .	21
7.5	Lavaldüse. . . . .	22
7.6	Intermittierender Windkanal. . . . .	23
<b>8</b>	<b>Reibungsbehaftete Strömung</b>	<b>25</b>
8.1	Druckabfall in einer Gasleitung . . . . .	25
8.2	Heizölleitung. . . . .	25
8.3	Ausfluß aus einem Gefäß. . . . .	26
8.4	Carnotscher Stoßverlust. . . . .	27
8.5	Hintereinanderschaltung von Widerständen. . . . .	27
8.6	Parallelschaltung von Widerständen. . . . .	28
8.7	Beliebige Schaltung von Widerständen. . . . .	28
<b>9</b>	<b>Potentialtheorie</b>	<b>29</b>
9.1	Rankine Körper. . . . .	29
9.2	Potentialwirbel über Ebene. . . . .	30
9.3	Unsymmetrisches, angestelltes Parabelbogenzweieck. . . . .	31
9.4	Bewegte Quelle. . . . .	32
9.5	Doppelquellenanordnung (ebenes Problem). . . . .	32
9.6	Quelle vor einer Wand (ebenes Problem). . . . .	33
9.7	Halbkörper. . . . .	33
9.8	Ebene Parabelumströmung. . . . .	34
9.9	Unsymmetrische, ebene Parabelumströmung. . . . .	34
9.10	Rauchring. . . . .	34
9.11	Zylinderumströmung . . . . .	35
<b>10</b>	<b>Ebene, kompressible Strömung</b>	<b>37</b>
10.1	Wellige Wand. . . . .	37
10.2	Kanal-Überschallströmung (lineare Theorie). . . . .	38
10.3	angestelltes Rautenprofil . . . . .	38
<b>11</b>	<b>Nichtlineare Theorie f. Überschallströmung</b>	<b>39</b>
11.1	Rautenprofil in Überschallströmung. . . . .	39
11.2	Umlenkung eines Überschallfreistrahls. . . . .	39
11.3	Schwingender Freistrah. . . . .	40
11.4	Kanaleinlauf. . . . .	41
<b>12</b>	<b>Dünne Reibungsschichten</b>	<b>43</b>
12.1	Laminare selbstähnliche Grenzschichten . . . . .	43
12.2	Grenzschichttheorie Keilströmung . . . . .	44
12.3	Lokale, ebene Staupunktströmung. . . . .	44
12.4	Schmierspalttheorie. . . . .	45

<b>13 Anhang</b>	<b>47</b>
13.1 Colebrook-Diagramm. . . . .	47
13.2 Isentropentabelle . . . . .	48
13.3 Charakteristikendiagramm . . . . .	49
13.4 Tabelle zum Charakteristikendiagramm für Luft ( $\kappa = 1,4$ ) . . . . .	50
13.5 Stoßpolarendiagramm . . . . .	51

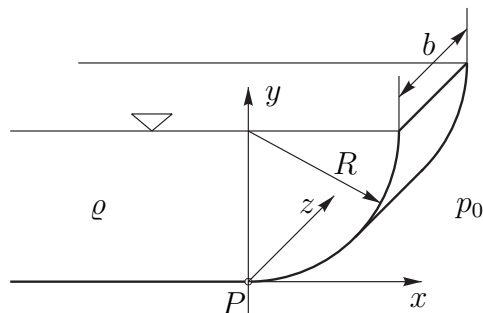
# Kapitel 1

## Hydrostatik

### 1.1 Flüssigkeitsdruck auf zylindrisch gekrümmte Wand.

Eine gekrümmte Wand trennt, wie in der Skizze gezeigt, eine Flüssigkeit der Dichte  $\rho$  von der umgebenden Luft (Druck  $p_0$ ).

Berechnen Sie den Betrag und den Angriffspunkt der von der Flüssigkeit auf die Wand wirkenden Kraft  $\vec{F}_{Fl}$ .



zur Kontrolle:

$$\vec{F}_K = \rho g b \frac{R^2}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = -\vec{F}_{Fl}$$
$$\varphi_D = 57.5^\circ$$

## 1.2 Hydraulische Presse.

Ein hydraulischer Wagenheber besteht im Prinzip aus zwei miteinander verbundenen, flüssigkeitsgefüllten Röhren unterschiedlicher Querschnittsfläche. Nach oben ist die Flüssigkeit von je einem, dicht mit der Wand des jeweiligen Rohres abschließenden Kolben begrenzt.

Man berechne für die gegebenen Kolbenflächen  $A_1$ ,  $A_2$  die Kraft  $F_1$  auf Kolben 1, die nötig ist, um einer Kraft  $F_2$  auf Kolben 2 die Waage zu halten.

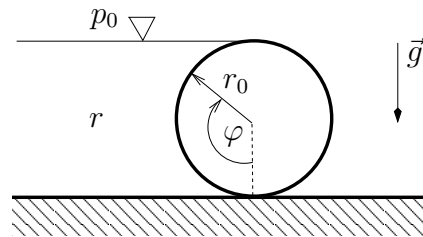
zur Kontrolle:

$$F_1 = \frac{F_2 A_2 + \rho g (h_2 - h_1) A_1}{A_1}$$

## 1.3 Druckkraft auf Kreiszyylinder.

Für das skizzierte kreiszylindrische Wehr vom Radius  $r_0$  und der Breite  $b$  (senkrecht zur Zeichenebene) ist die resultierende Druckkraft nach Betrag und Richtung gesucht. Bestimmen Sie die Kraft durch Integration über die Druckverteilung.

Durch welchen Punkt führt die Wirkungslinie der resultierenden Kraft?



zur Kontrolle:

$$\vec{F} = \rho g b r_0^2 \left( \frac{2}{\pi} \right)$$

Die Wirkungslinie der Kraft geht durch den Kreismittelpunkt.

# Kapitel 2

## Bernoulli-Gleichung

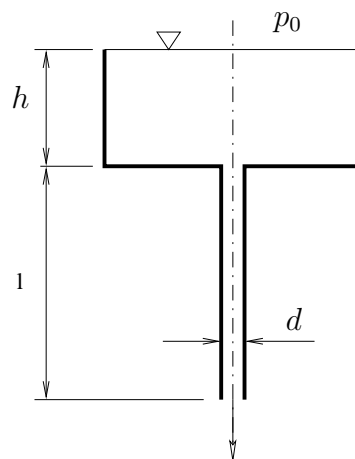
### 2.1 Fallrohr.

In einem Behälter von sehr großem Querschnitt befindet sich bis zur Höhe  $h$  Wasser der Dichte  $\rho$ . Zur Vermeidung von Dampfbildung (Dampfdruck  $p_D$ ) am Rohreinlauf muß die Rohrlänge  $l$  begrenzt bleiben.

Wie groß kann die Länge  $l$  maximal ausgeführt werden, wenn

1. der Rohrdurchmesser  $d$  konstant ist?
2. am Rohrende eine Düse den Rohrdurchmesser von  $d$  auf  $d/2$  verringert?

Berechnen Sie das Ergebnis zunächst allgemein und sodann für die Zahlenwerte  $d = 100$  mm,  $\rho = 1000$  kg/m<sup>3</sup>,  $h = 5$  m und Umgebungsdruck  $p_0 = 1$  bar.



zur Kontrolle:

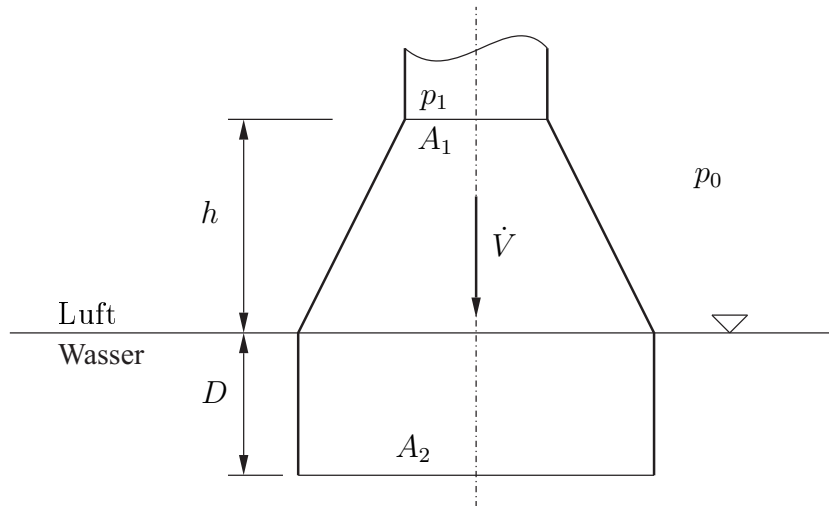
1.	$l \leq 10,2$ m	$u_1 = 17,3$ m/s	$u_2 = 17,3$ m/s
2.	$l \leq 238$ m	$u_1 = 17,3$ m/s	$u_2 = 69$ m/s



## 2.2 Austrittsdiffusor.

Der Austrittsdiffusor einer Turbine erweitere sich von der Eintrittsfläche  $A_1$  auf die Austrittsfläche  $A_2$ . Der Diffusoreintritt liege um die Höhe  $h$  über dem Wasserspiegel.

Für die Werte  $h = 2\text{ m}$ ,  $A_1 = 5\text{ m}^2$ ,  $A_2 = 25\text{ m}^2$ ,  $\rho = 1 \cdot 10^3\text{ kg/m}^3$ ,  $p_0 = 1\text{ bar}$  bestimme man den maximalen Volumenstrom  $\dot{V}$ , sodaß der Druck  $p_1$  im Diffusoreintritt den Dampfdruck  $p_D \approx 0\text{ bar}$  des Wassers gerade nicht unterschreitet.



zur Kontrolle:

$$\dot{V} \leq 64.7\text{ m}^3/\text{s}$$

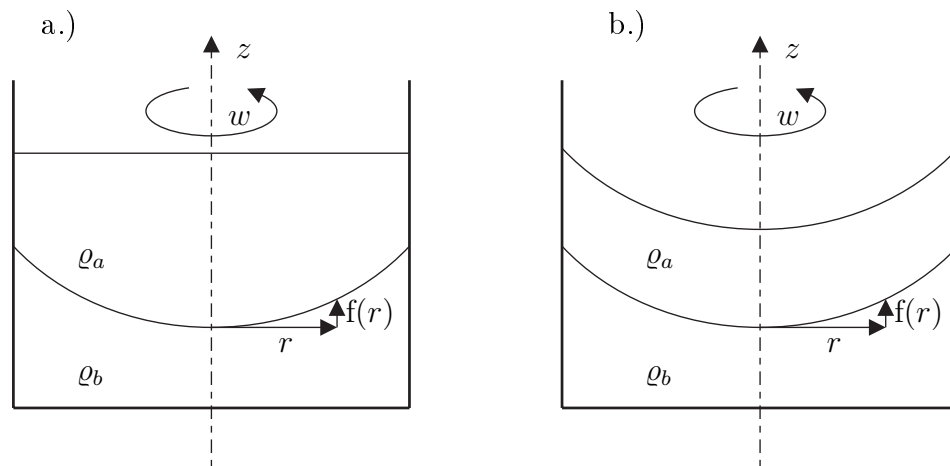
# Kapitel 3

## Rotierende Flüssigkeit

### 3.1 Rotierende Flüssigkeit.

Ein kreiszylindrischer Behälter ist mit zwei übereinander geschichteten Flüssigkeiten der Dichten  $\varrho_a$  und  $\varrho_b$  gefüllt, wobei  $\varrho_a < \varrho_b$  gilt. Welcher Gleichung  $z = f(r)$  genügt die Trennlinie zwischen den beiden Flüssigkeiten, wenn

1. die untere Flüssigkeit mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  rotiert, während die obere Flüssigkeit ruht?
2. beide Flüssigkeiten mit der Geschwindigkeit  $\omega$  rotieren?



zur Kontrolle:

1. 
$$f(r) = \frac{\omega^2 r^2}{2g} \frac{\varrho_b}{\varrho_b - \varrho_a}$$
2. 
$$f(r) = \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$



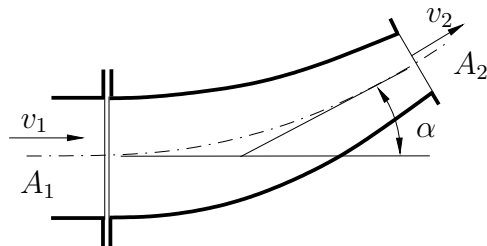
# Kapitel 4

## Impulssatz

### 4.1 Rohrkrümmer.

Gegeben ist ein Rohrkrümmer (Skizze) mit Eintrittsquerschnitt  $A_1$  und Austrittsquerschnitt  $A_2$ . Die Geschwindigkeit  $v_1$  im Eintrittsquerschnitt sowie der Außendruck  $p_2$  seien ebenfalls bekannt. Der Krümmer lenkt die Strömung um einen Winkel  $\alpha$  um.

Berechnen Sie die Haltekraft  $\vec{H}$ , die in der Flanschverbindung übertragen wird, sowie die Kraft  $\vec{R}$ , die von der Flüssigkeit auf die Innenwand des Krümmers ausgeübt wird.



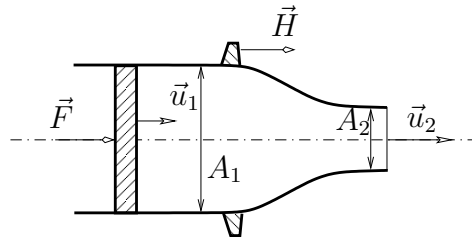
zur Kontrolle:

$$\vec{H} = \rho v_1^2 A_1 \left[ -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{A_1}{A_2} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \right] - (p_1 - p_2) A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\vec{R} = -\rho v_1^2 A_1 \left[ -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{A_1}{A_2} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \right] + p_1 A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - p_2 A_2 \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$

### 4.2 Düse.

Ein mit Flüssigkeit der Dichte  $\rho$  gefülltes Rohr der Querschnittsfläche  $A_1$  mündet in eine Düse der Querschnittsfläche  $A_2$  und wird dadurch geleert, daß ein Kolben mit der konstanten Geschwindigkeit  $u_1$  durch das Rohr geschoben wird.

Berechnen Sie die Kraft  $F$ , mit welcher man den Kolben verschieben muß, sowie die Haltekraft  $H$ .



zur Kontrolle:

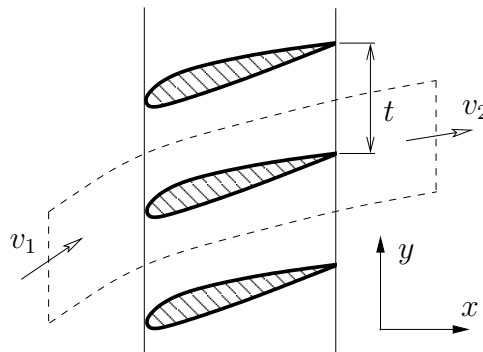
$$\vec{F} = \frac{\rho}{2} u_1^2 \left[ \left( \frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right] A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{H} = -\vec{F} + \rho u_1^2 \left( \frac{A_1}{A_2} - 1 \right) A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

### 4.3 Schaufelgitter.

Eine Parallelströmung strömt ein ebenes Schaufelgitter unter dem Winkel  $\beta_1 = \pi/6$  an, die Abströmung erfolgt unter dem Winkel  $\beta_2 = 0$ . Die Anströmgeschwindigkeit betrage  $v_1 = 5$  m/s, der Eintrittsquerschnitt eines Schaufelkanals sei  $A_e = 0,2$  m<sup>2</sup>.

Man bestimme die auf eine Einzelschaukel wirkenden Kräfte unter der Annahme, daß es sich beim strömenden Medium um Wasser handelt ( $\rho = 1 \cdot 10^3$  kg/m<sup>3</sup>) und die Reibungskräfte vernachlässigt werden können.



zur Kontrolle:

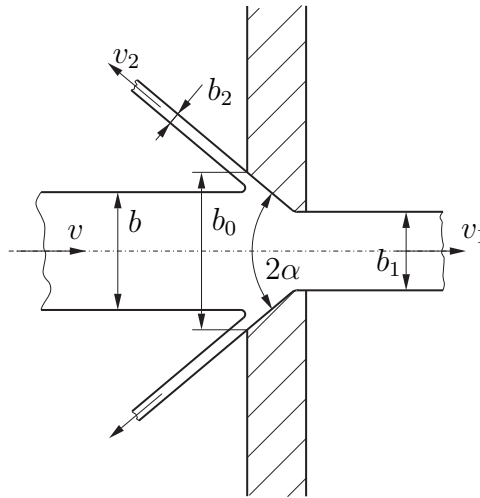
$$\vec{F} = \rho v_1^2 \sin \beta_1 A_e \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \sin \beta_1 \\ \cos \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -625 \\ 2165 \end{pmatrix} \text{ N}$$

## 4.4 Düse.

Ein ebener Strahl der Breite  $b$  strömt mit der Geschwindigkeit  $v$  auf eine konvergente Düse Schlitzdüse (Eintrittsbreite  $b_0 > b$ , Austrittsbreite  $b_1 < b$ ). Der Öffnungswinkel der Düse beim Eintrittsquerschnitt ist  $2\alpha$ . Der Umgebungsdruck vor und hinter der Düse ist mit  $p_0$  gegeben, die Dichte sei  $\varrho$ .

Man berechne aus den gegebenen Größen unter Annahme einer inkompressiblen, reibungsfreien Strömung

1. die Geschwindigkeiten  $v_1$  und  $v_2$  des durchtretenden und des reflektierten Strahls
2. den Breite  $b_2$  eines reflektierten Strahls
3. sowie die Kraft  $\vec{F}$  (bezogen auf die Tiefeneinheit) auf die Düse.



zur Kontrolle:

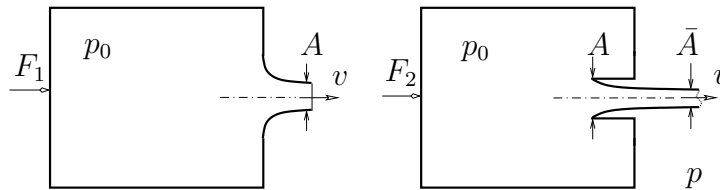
$$\begin{aligned}
 v_1 &= v_2 = v \\
 b_2 &= \frac{b - b_1}{2} \\
 \frac{\vec{F}}{t} &= \varrho v^2 (b_1 - b) (1 + \cos \alpha) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

## 4.5 Ausströmvorgang.

Eine inkompressible, reibungsfreie Flüssigkeit ströme aus einem Gefäß mit konstantem Innendruck  $p_0$  durch eine Öffnung der Fläche  $A$  in die umgebende Luft (Druck  $p$ ).

Man berechne die Haltekraft  $F$  und die Endquerschnittsfläche  $\bar{A}$  des Strahles für

1. eine abgerundete Ausflußöffnung (keine Strahlkontraktion,  $A = \bar{A}$ )
2. eine *Bordamündung*: Die Ausflußöffnung  $A$  ist durch ein angesetztes Rohr weit in das Innere des Behälters gezogen. Der austretende Freistrahle kontrahiert sich.



zur Kontrolle:

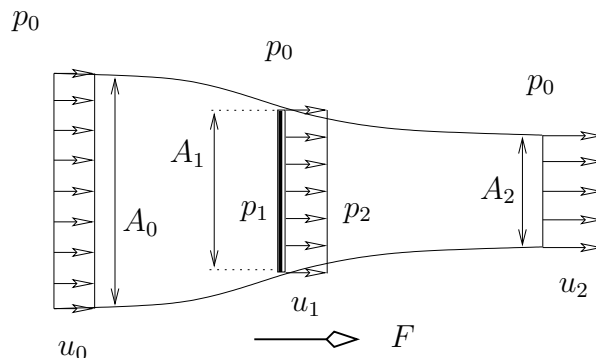
$$\vec{F}_1 = 2(p_0 - p) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_2 = (p_0 - p) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## 4.6 Propeller.

Ein Propeller (Kreisfläche  $A_1$ ) bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit  $u_0$  durch ruhende Luft, auf die er die Schubkraft  $F$  ausübt. Die Skizze zeigt den für einen mit dem Propeller bewegten Beobachter stationären Strömungsvorgang. Die den Propellerkreis durchsetzende Luft strömt mit der Fluggeschwindigkeit  $u_0$  in einem Strahl der Querschnittsfläche  $A_0$  gegen den Propeller an und strömt in einiger Entfernung dahinter als Strahl der Querschnittsfläche  $A_2$  mit der Geschwindigkeit  $u_2 > u_1$  ab.

Ermitteln Sie eine Formel für die vom Propeller aufzubringende Leistung  $P$  und werten Sie sie für  $u_0 = 40$  m/s,  $A_1 = 3$  m<sup>2</sup>,  $\rho = 1,3$  kg/m<sup>3</sup> und  $F = 2$  kN aus.



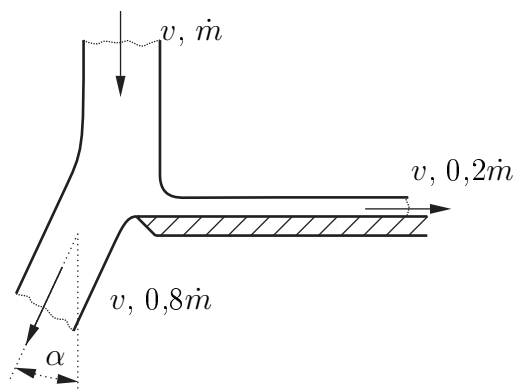
zur Kontrolle:

$$P = F \frac{u_0 + u_2}{2} \approx 91 \text{ kW}$$

## 4.7 Teilung eines Wasserstrahls.

Ein Wasserstrahl der Menge  $\dot{m} = 500 \text{ kg/s}$  strömt mit der Geschwindigkeit  $v = 5 \text{ m/s}$  gegen eine Schneide und wird dort abgelenkt, wobei  $1/5$  der Wassermenge nach rechts abströmt. Die Reibung sei wie die Schwerkraft vernachlässigbar (z.B. horizontale Strömung).

Berechnen Sie den Winkel  $\alpha$ , um den der größere Teilstrahl von der ursprünglichen Strahlrichtung abgelenkt wird, sowie die Haltekraft der Schneide.



zur Kontrolle:

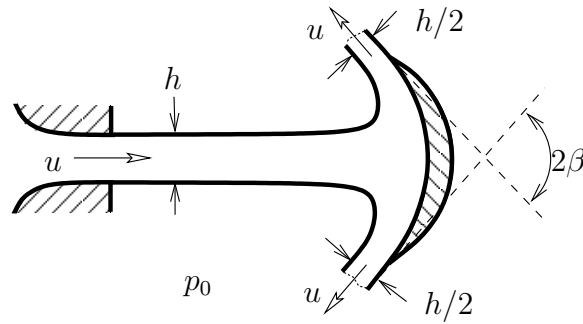
$$\alpha \approx 14,5^\circ$$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 563 \text{ N} \end{pmatrix}$$

## 4.8 Turbinenschaufel.

Ein Wasserstrahl der Breite  $h$  und der Tiefe  $b$  trifft mit der Geschwindigkeit  $u$  auf die Schaufel eines Turbinenrades, die den Strahl symmetrisch nach zwei Seiten um den Winkel  $\pi - \beta$  umlenkt.





Man berechne:

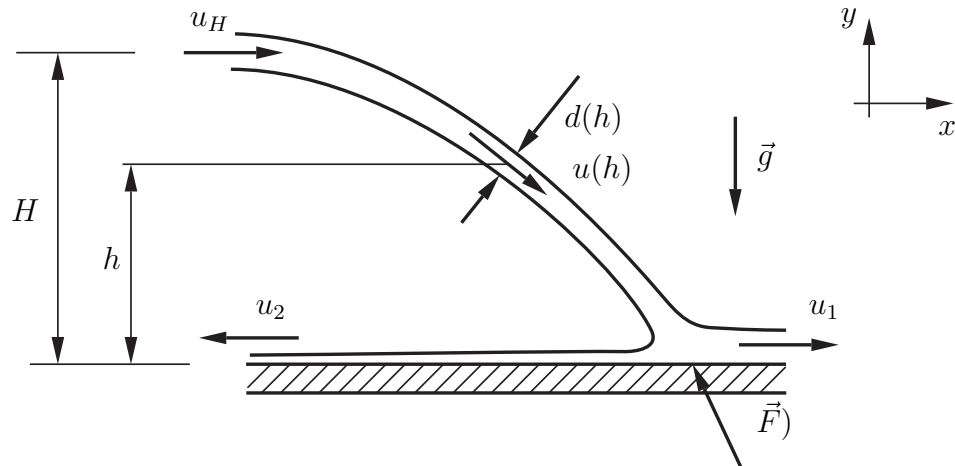
1. Die Schaufelkraft  $F_S$  bei stillstehender Schaufel,
2. die Schaufelkraft  $F_S$ , wenn sich die Schaufel mit der Geschwindigkeit  $u_0$  bewegt,
3. die Leistung  $P$  und den Wirkungsgrad  $\eta$ .

zur Kontrolle:

$$\begin{aligned} \vec{F}_S(u_s = 0) &= \rho u^2 h b \begin{pmatrix} 1 + \cos \beta \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{F}_S(u_s = u_0) &= \rho (u - u_0)^2 h b \begin{pmatrix} 1 + \cos \beta \\ 0 \end{pmatrix} \\ P(u_s = 0) &= 0 \\ \eta(u_s = 0) &= 0 \\ P(u_s = u_0) &= \rho u_0 (u - u_0)^2 h b (1 + \cos \beta) \\ \eta(u_s = u_0) &= \frac{2u_0 (u - u_0)^2 (1 + \cos \beta)}{u^3} \end{aligned}$$

## 4.9 Haltekraft einer von einem Flüssigkeitsstrahl getroffenen ebenen Platte.

Ein ebener Flüssigkeitsstrahl der Dichte  $\rho$  tritt waagrecht mit der Geschwindigkeit  $u_H$  und der Dicke  $d_H$  aus einer Düse und trifft nach der Fallhöhe  $H$  auf eine ebene Platte.



Man berechne für *reibungsfreie* Strömung

1. den Auftreffwinkel des Strahls,
2. die Dicke  $d(h)$  des Freistrahls,
3. sowie die Dicken der abgehenden Flüssigkeitsschichten.
4. die Kraft pro Tiefeneinheit  $b$ , mit der die Platte gehalten werden muß (die Gewichtskraft des Strahles ist zu vernachlässigen),

zur Kontrolle:

$$\alpha = \arctan \frac{-\sqrt{2gH}}{u_H}$$

$$d(h) = \frac{d_H u_H}{\sqrt{u_H^2 + 2g(H-h)}}$$

$$h_2 = \frac{u_H d_H}{2} \left( \frac{\sqrt{u_H^2 + 2gH} - u_H}{u_H^2 + 2gH} \right)$$

$$h_1 = \frac{u_H d_H}{2} \left( \frac{\sqrt{u_H^2 + 2gH} + u_H}{u_H^2 + 2gH} \right)$$

$$\frac{\vec{F}_K}{b} = \rho u_H \sqrt{2gH} d_H \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

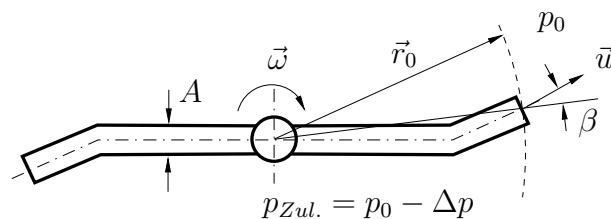


# Kapitel 5

## Drehimpulssatz

### 5.1 Rasensprenger.

Ein zweiarmiger Rasensprenger mit vertikaler Achse muss bei stationärer Drehung ein Reibungsmoment  $\vec{M}_r$  überwinden. Der Wasserdruck in der Zuleitung unmittelbar vor Eintritt in die beiden Arme beträgt  $p_0 - \Delta p$  mit dem Atmosphärendruck  $p_0$ . Die Querschnittsfläche jedes Armes ist  $A$  und die Querschnittsfläche der Zuleitung  $A_1 = 2A$ . Weiters sind auch  $r_0, \beta$  und  $\rho$  bekannt.



Bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$ , mit welcher der Rasensprenger rotiert, sowie den Volumenstrom  $\dot{V}$ .

zur Kontrolle:

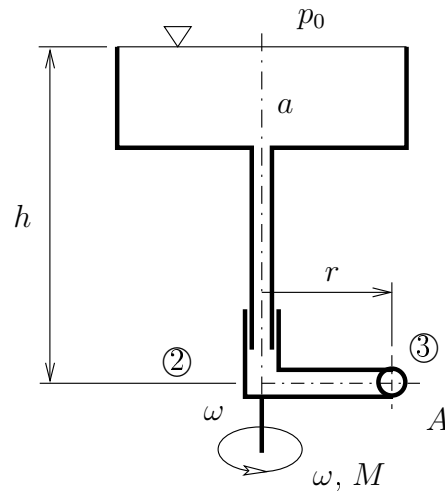
$$\dot{V} = \frac{Ar_0\omega}{\sin \beta} + \sqrt{\left(\frac{Ar_0\omega}{\sin \beta}\right)^2 + \frac{2AM_r}{\rho r_0 \sin \beta}}$$
$$\omega = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho r_0^2}}$$

### 5.2 Segnersches Wasserrad.

Aus einem Behälter strömt Flüssigkeit durch ein vertikales Rohr einem an den Stellen ② und ③ abgewinkelten Rohr zu, das sich reibungsfrei um die Achse  $a$  dreht. An das

drehbare Rohr ist eine Welle  $w$  angesetzt, durch die ein Drehmoment  $M$  an einen Verbraucher abgegeben wird. Das Rohr rotiere mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  und habe die Querschnittsfläche  $A$ .

Man berechne das Moment  $M$ . Wie groß ist der Massenstrom  $\dot{m}$ ?



zur Kontrolle:

$$M = \rho (u - r\omega)^2 r A$$

$$\dot{m} = \rho A \sqrt{r^2 \omega^2 + 2gh}.$$

# Kapitel 6

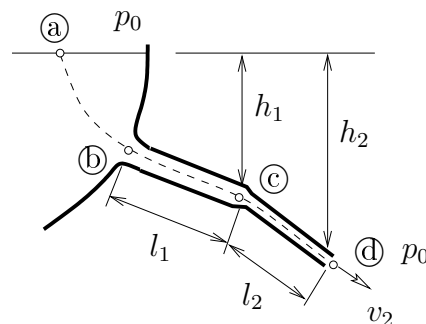
## Instationäre Bernoulli-Gleichung

### 6.1 Druckleitung eines Stausees.

Aus einem Stausee führt eine Rohrleitung, die zunächst durch einen Schieber verschlossen ist. Der Schieber wird zur Zeit  $t = 0$  plötzlich geöffnet.

Für die Werte  $h_1 = 70$  m,  $h_2 = 100$  m,  $l_1 = 250$  m,  $l_2 = 50$  m,  $d_1 = 3,5$  m,  $d_2 = 0,7$  m und  $\rho = 1 \cdot 10^3$  kg/m<sup>3</sup> berechne man

1. die in den beiden Teilleitungen 1 und 2 unmittelbar nach Öffnen des Schiebers herrschenden Beschleunigungen  $a_{01}$  und  $a_{02}$ .
2. den Überdruck  $p_C - p_0$ , der unmittelbar nach Öffnen des Schiebers im Punkt C herrscht.
3. die Ausströmgeschwindigkeit  $v_2$  als Funktion der Zeit,  $v_2 = v_2(t)$ .

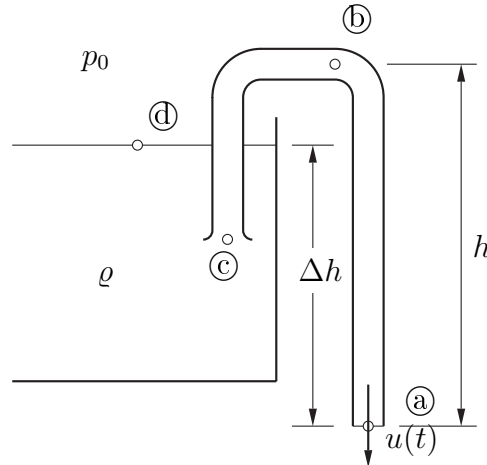


zur Kontrolle:

$$a_{01} = \frac{d_2^2}{d_1^2} \frac{gh_2}{L} \qquad a_{02} = \frac{gh_2}{L}$$
$$p_{\text{C}} - p_0 = \rho (gh_1 - a_{01}l_1) \qquad \frac{v_2(t)}{\sqrt{2gh_2}} = \tanh\left(\frac{\sqrt{2gh_2}}{2L}t\right)$$

## 6.2 Heberleitung.

Eine Heberleitung der Länge  $l$  und konstanten Querschnitts taucht in einen großen Flüssigkeitsbehälter ein. Die Leitung ist zunächst am unteren Ende verschlossen und vollständig mit Flüssigkeit gefüllt. Die Ausflußöffnung liegt um  $\Delta h$  unter dem Flüssigkeitsspiegel im Behälter.



Bestimmen Sie

1. die Beschleunigung  $a_0$  im Rohr zum Zeitpunkt  $t = 0$ , an dem die Heberleitung plötzlich geöffnet wird,
2. den Druck  $p_b$ , der unmittelbar nach Öffnen der Leitung bzw. für große Zeiten im Punkt  $\textcircled{b}$  herrscht.
3. die Ausströmgeschwindigkeit  $u(t)$  als Funktion der Zeit und die Geschwindigkeit  $u_\infty$ , die sich für große Zeiten einstellt,

Skizzieren Sie den Druckverlauf für  $t = 0$  und  $t \rightarrow \infty$ .

zur Kontrolle:

$$a_0 = \frac{g\Delta h}{l}$$

$$p_b(t = 0) = p_0 - \rho g h$$

$$\frac{u(t)}{\sqrt{2g\Delta h}} = \tanh\left(\frac{\sqrt{2g\Delta h}}{2l} t\right)$$

$$u(t \rightarrow \infty) = \sqrt{2g\Delta h}$$

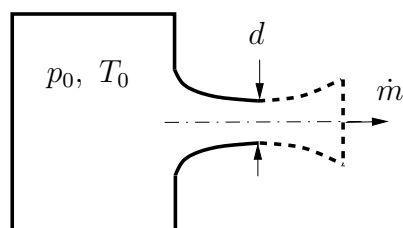
# Kapitel 7

## Kompressible Strömung

### 7.1 Ausströmen aus einem Kessel.

Aus einem Kessel (Ruhedruck  $p_0 = 8$  bar, Ruhetemperatur  $T_0 = 350$  K) strömt durch eine Öffnung Luft aus. Der Außendruck ist  $p_a = 1$  bar, der minimale Durchmesser ist  $d = 50$  mm.  $c_p = 1005$  J/kg/K,  $\kappa = 1,4$ . Man berechne:

1. die Ausströmgeschwindigkeit  $u$  und den Massenstrom  $\dot{m}$  für den Fall, daß der kleinste Querschnitt der Austrittsquerschnitt ist.
2. die Ausströmgeschwindigkeit  $u_e$  im Endquerschnitt,  $\dot{m}$  und Austrittsquerschnitt  $A_e$  für den Fall, daß die Öffnung eine ideale Lavaldüse darstellt (Überschall,  $p_e = p_a = 1$  bar).
3. die in den Punkten 1. und 2. gesuchten Größen für  $p_0 = 1,5$  bar, wobei aber für die zweite Aufgabenstellung der in 2. berechnete Endquerschnitt der Lavaldüse zu verwenden ist (Lavaldüse mit Stoß).



zur Kontrolle:

1.	$u_e = 342.42$ m/s	$\dot{m} = 3.39$ kg/s	
2.	$u_e = 560.88$ m/s	$\dot{m} = 3.39$ kg/s	$d_e = 65.5$ mm
3.1	$u_e = 277.36$ m/s	$\dot{m} = 0.61$ kg/s	
3.2	$u_e = 183.18$ m/s	$\dot{m} = 0.635$ kg/s	



## 7.2 Pitotrohr.

In Unterschallströmungen läßt sich durch Messung der Druckdifferenz  $\Delta p$  zwischen Staupunktdruck  $p_S$  und statischem Druck  $p_\infty$  die Strömungsgeschwindigkeit bestimmen. Es sei  $p_\infty = 1$  bar, die Temperatur des strömenden Mediums  $T_\infty = 288$  K.

Man berechne die Strömungsgeschwindigkeit  $v$

1. bei inkompressibler Strömung,
2. für ein ideales Gas konstanter spezifischer Wärmen ( $c_p = 1005$  J/kg K,  $\kappa = 1,4$ )
3. und bestimme die relative Abweichung der Ergebnisse für inkompressible von jenen für kompressible Strömung für die Druckdifferenzen  $\Delta p_1 = 0.3$  Pa,  $\Delta p_2 = 250$  Pa und  $\Delta p_3 = 4000$  Pa.

zur Kontrolle:

$$u_i = \sqrt{2c_p T_\infty \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{\Delta p}{p_\infty}}$$

$$u_k = \sqrt{2c_p T_\infty \left[ \left( \frac{p_\infty}{p_\infty + \Delta p} \right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} - 1 \right]}$$

$\Delta p$	$u_i$	$u_k$	$f$
0.3 Pa	0.7044024823 ...	0.7044021049 ...	$-5.36e - 7$
250 Pa	20.334348140 ...	20.325281231 ...	$-4.46e - 4$
4000 Pa	81.337392560 ...	80.767343115	$-7.06e - 3$

## 7.3 Lavaldüse.

Eine Lavaldüse habe einen minimalen Durchmesser  $A_{min} = 5$  cm<sup>2</sup> und einen doppelt so großen Endquerschnitt,  $A_e = 2A_{min}$ . Ruhedruck und Ruhetemperatur vor der Düse sind durch  $p_0 = 3$  bar und  $T_0 = 300$  K gegeben, beim strömenden Medium handle es sich um ein ideales Gas mit  $\kappa = 1,4$  und  $c_p = 1005$  J/kg K. In der Düse stehe ein senkrechter Verdichtungsstoß am Querschnitt  $A_s = 6,25$  cm<sup>2</sup>.

Berechnen Sie mit Hilfe der Isentropentabelle den Druck  $p_e$  und die Machzahl  $M_e$  im Endquerschnitt.

zur Kontrolle:

$$p_e \approx 2.47 \text{ bar}$$

$$M_e \approx 0.348$$

## 7.4 Lavaldüse.

Gegeben ist eine Lavaldüse mit minimalem Querschnitt  $A_{min} = 10 \text{ cm}^2$ . Der Ruhezustand vor der Düse ist durch  $p_0 = 4.9 \text{ bar}$  und  $T_0 = 300 \text{ K}$  gegeben, der Umgebungsdruck am Ende der Düse ist  $p_e = 1 \text{ bar}$ .

1. Bestimmen Sie den Endquerschnitt  $A_e$  und den Massenstrom  $\dot{m}$  durch die Düse für den Fall, daß es sich um eine ideale Lavaldüse im Überschallbetrieb handelt.
2. Erhöht man den Umgebungsdruck am Düsenende auf den Wert  $p'_e = 4 \text{ bar}$ , so bildet sich in der Düse ein senkrechter Verdichtungsstoß aus. Bestimmen Sie den Stoßquerschnitt  $A_s$ .
3. Welcher Umgebungsdruck  $p''_e$  ist nötig, damit der Massenstrom  $\dot{m}_c = 0.7\dot{m}_{max}$  durch die Düse strömt?

*zur Kontrolle:*

$$\begin{aligned}A_e &= 13.34 \text{ cm}^2 \\ \dot{m} &= 1.144 \text{ kg/s} \\ A_s &= 10.6 \text{ cm}^2 \\ p''_e &= 4.55 \text{ bar}\end{aligned}$$

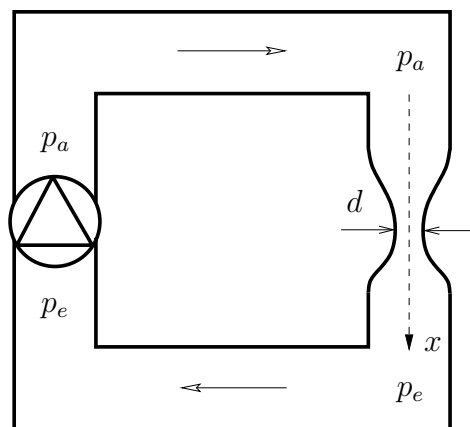
## 7.5 Lavaldüse.

Eine Lavaldüse, deren Querschnittsverlauf gegeben ist, wird in einem geschlossenen Kreislauf durch einen Kompressor betrieben. Das Druckverhältnis des Kompressors  $\frac{p_a}{p_e}$  sei 2.

Berechnen Sie die Stoßlage, füllen Sie die unten stehende Tabelle aus und skizzieren Sie den Druckverlauf. Beachten Sie, daß nach dem Stoß  $\frac{A^*}{A}$  wie auch  $\frac{p}{p_0}$  nicht mehr sinnvoll sind und statt dessen besser eine andere Größe eingetragen wird. Welche? ( $\kappa = 1,4$ ,  $c_p = 1005 \text{ J/kg/K}$ )

Hinweis:  $\frac{\hat{p}_0}{p_0} \approx \frac{p_e}{p_a}$

$x/d_{min}$	-3	-2	-1	0	2	4	6	8
$d/d_{min}$	3	2.1	1.4	1	1.5	2.0	2.6	8
$A^*/A$								
$p/p_0$								



zur Kontrolle:

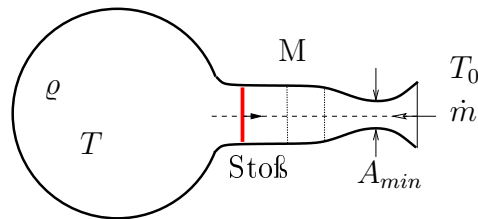
$$\frac{x_s}{d_{min}} \approx 2.489 \dots$$

$x/d_{min}$	-3	-2	-1	0	2	4	6	8
$d/d_{min}$	3	2.1	1.4	1	1.5	2.0	2.6	8
$A^*/A$	0.111	0.227	0.510	1	0.444	0.5	0.2959	0.03125
$p/p_0$	0.9965	0.98797	0.9336	0.528	0.0801	0.4682	0.4893	0.500

## 7.6 Intermittierender Windkanal.

Ein Kessel, der anfänglich zu 90% evakuiert ist, betreibt eine Lavaldüse bei einer Machzahl  $M = 3$ . Durch den Unterdruck im Kessel strömt Luft aus der Umgebung in den Kessel. Der Querschnitt der Meßstrecke, die sich zwischen Lavaldüse und Kessel befindet, beträgt  $100 \text{ cm}^2$ . Die maximale Meßzeit (d.h. die Zeitspanne, in der die Strömung in der Meßstrecke als stationär angesehen werden kann) betrage 20 s. Der Umgebungsdruck ist mit  $p_0 = 1 \text{ bar}$  gegeben.

Unter der vereinfachenden Annahme, daß die Ruhetemperatur im Kessel gleich der Außentemperatur ( $15 \text{ }^\circ\text{C}$ ) sei, berechne man das mindestens notwendige Kesselvolumen.



zur Kontrolle:

$$V = 40.76 \text{ m}^3$$



# Kapitel 8

## Reibungsbehaftete Strömung

### 8.1 Druckabfall in einer Gasleitung

In einer Gasleitung ( $\rho_{Gas} = 1,18 \text{ kg/m}^3$ ,  $\nu_{Gas} = 15 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ) von 0,2 km Länge und 150 mm Durchmesser strömt das Gas mit einer Geschwindigkeit von 20 m/s. Die Rauigkeit  $k$  sei 0,075 mm (geschweißte Stahlrohre).

Man berechne den Druckabfall  $\Delta p$ . Die Strömung kann als inkompressibel angenommen werden.

*zur Kontrolle:*

$$\Delta p = 5.82 \cdot 10^{-2} \text{ bar}$$

### 8.2 Heizölleitung.

Durch eine gerade, horizontale Rohrleitung fließt der Volumenstrom  $\dot{V}$  an Heizöl. Der reibungsbedingte Druckabfall  $\Delta p$  wird durch eine Ölpumpe ausgeglichen. Die Rohrleitung hat die Länge  $l$ , den Durchmesser  $d_0$  und die relative Rauigkeit  $k/d_0$ . Für die Werte  $d_0 = 100 \text{ mm}$ ,  $k/d_0 = 2 \cdot 10^{-3}$ ,  $l = 750 \text{ m}$ ,  $\dot{V} = 108 \frac{\text{m}^3}{\text{h}}$ ,  $\nu = 8 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$  und  $\rho = 860 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  berechne man:

1. den Druckabfall  $\Delta p$  in der Rohrleitung,
2. die Antriebsleistung  $P$ , die der Pumpe zugeführt werden muß, wenn ihr Wirkungsgrad  $\eta_P = 0.7$  beträgt.
3. den Durchmesser  $d_1$ , auf den unter sonst gleichen Verhältnissen die Leitung erweitert werden müßte, wollte man mit der halben Antriebsleistung auskommen.

*zur Kontrolle:*

$$\Delta p = 12.5 \text{ bar}$$

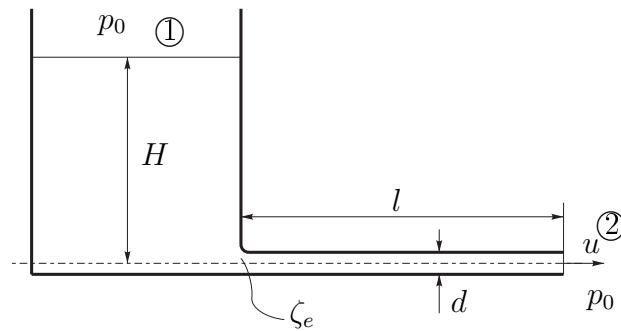
$$P = 53.4\text{kW}$$

$$d_1 = 0.115\text{m}$$

### 8.3 Ausfluß aus einem Gefäß.

Aus einem Gefäß mit großer Querschnittsfläche, das bis zur Höhe  $H = 20\text{m}$  gefüllt ist, strömt durch eine horizontale Rohrleitung (Länge  $l = 5\text{m}$ , Durchmesser  $d = 5\text{mm}$ , relative Rauigkeit  $k/d = 2 \cdot 10^{-3}$ ) Flüssigkeit der Dichte  $\rho = 1000\text{kgm}^{-3}$  und dynamischen Viskosität  $\mu = 2 \cdot 10^{-3}\text{Nsm}^{-3}$  aus. Am Einlauf des Behälters in das Rohr tritt ein Einlaufverlust auf ( $\zeta_e = 0.5$ ).

Man bestimme die Strömungsgeschwindigkeit mit Hilfe des Colebrook-Diagramms.



zur Kontrolle:

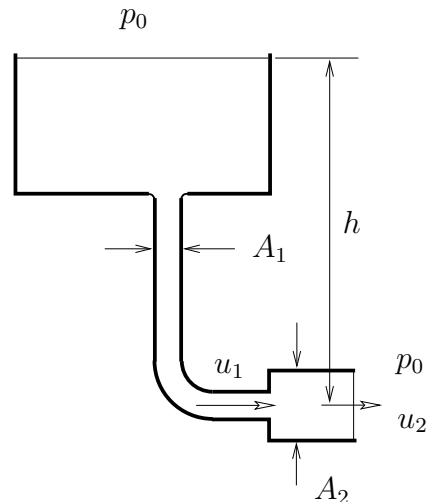
$$u = 3.23\text{m/s}$$

## 8.4 Carnotscher Stoßverlust.

Aus einem Behälter strömt Flüssigkeit durch ein Fallrohr aus, das sich unstetig von der Querschnittsfläche  $A_1$  auf die Querschnittsfläche  $A_2$  erweitert. Schwerebeschleunigung  $g$ , Höhendifferenz  $h$ ,  $A_1$  und Dichte  $\rho$  seien bekannt.

Berechnen Sie

1. den Wert des Flächenverhältnisses  $A_1/A_2$ , für den die Strömungsgeschwindigkeit  $u_1$  maximal wird,
2.  $u_1$  und  $u_2$  für diesen Fall,
3. den Carnot'schen Stoßverlust  $\Delta p_{VC}$  und  $\zeta_C$  für diesen Fall,
4. die mechanische Energie  $P_V$ , die der Strömung pro Zeiteinheit entzogen und in Wärme umgewandelt wird.



zur Kontrolle:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{1}{2} \quad u_1 = 2\sqrt{gh} \quad u_2 = \sqrt{gh}$$

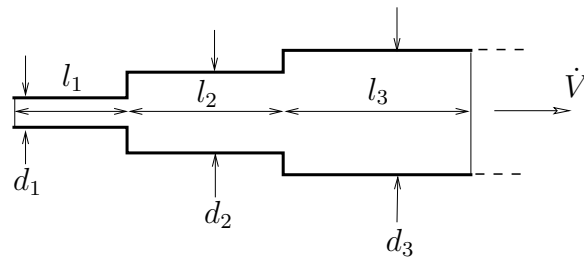
$$\zeta_C = \frac{1}{4} \quad \Delta p_{VC} = \frac{\rho}{2}gh \quad P_V = 2\dot{V}\rho gh$$

## 8.5 Hintereinanderschaltung von Widerständen.

In einem Anlagensystem sind  $n$  Rohrleitungen mit unterschiedlichem Durchmesser und unterschiedlicher Länge aneinandergesetzt.

Man bestimme den Druckverlust  $\Delta p$  in Abhängigkeit vom Volumenstrom  $\dot{V}$  für beliebige Rohrelemente.





*Hinweis:* Zur übersichtlicheren Beschreibung genügt es, die Verlustbeiwerte  $\zeta$  zu verwenden.

zur Kontrolle:

$$\Delta p_v = \frac{\rho}{2} \dot{V}^2 \left[ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{A_i^2} \left( \sum_j \zeta_j + \zeta_{i,i+1} \right) + \frac{1}{A_n^2} \sum_j \zeta_j \right]$$

## 8.6 Parallelschaltung von Widerständen.

In einem Anlagensystem sind  $n$  Rohrleitungen mit unterschiedlichem Durchmesser und unterschiedlicher Länge parallel angeordnet.

Man bestimme den Druckverlust  $\Delta p$  in Abhängigkeit vom Volumenstrom  $\dot{V}$  für beliebige Rohrelemente.

*Hinweis:* Zur übersichtlicheren Beschreibung genügt es, die Verlustbeiwerte  $\zeta$  zu verwenden.

## 8.7 Beliebige Schaltung von Widerständen.

In einem Anlagensystem sind Rohrleitungen mit unterschiedlichem Durchmesser und unterschiedlicher Länge parallel und hintereinander angeordnet.

Man bestimme den Druckverlust  $\Delta p$  in Abhängigkeit vom Volumenstrom  $\dot{V}$ .

# Kapitel 9

## Potentialtheorie

### 9.1 Rankine Körper.

Man untersuche die ebene, stationäre und inkompressible Umströmung eines Rankine-Körpers durch Überlagerung einer Quelle im Ursprung und einer Parallelströmung in  $x$ -Richtung.

Gesucht sind:

1. Potentialfunktion  $\phi$  und Stromfunktion  $\psi$ ,
2. die Geschwindigkeitskomponenten  $u$  und  $v$ ,
3. die Koordinaten des Staupunkts  $S$ ,
4. die Gleichung der Stromlinie durch den Staupunkt  $S$ ,
5. die Dicke  $b$  des Körpers für  $x \rightarrow +\infty$ ,
6. die Druckverteilung am Rankine-Körper in Form des Druckbeiwertes  $c_p$ ,
7. die Kraft  $\vec{F}_Q$ , mit der die Quelle gehalten werden müßte,
8. die Kraft  $\vec{F}_H$ , mit der ein materiell ausgeführter Körper zu halten wäre.

zur Kontrolle:

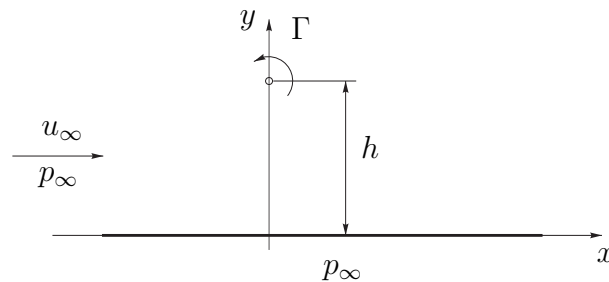
$$\begin{aligned}\Phi(r, \varphi) &= u_\infty r \cos \varphi + \frac{q}{2\pi} \ln r & \Psi(r, \varphi) &= u_\infty r \sin \varphi + \frac{q}{2\pi} (\varphi + 2\pi n) \\ u(r, \varphi) &= u_\infty + \frac{q}{2\pi r} \cos \varphi & v(r, \varphi) &= \frac{q}{2\pi r} \sin \varphi \\ x_S &= -\frac{q}{2\pi u_\infty} & y_S &= 0 \\ b &= \frac{q}{u_\infty} & r_K(\varphi) &= \frac{q}{2\pi u_\infty} \frac{\pi - \varphi}{\sin \varphi} = r_S \frac{\pi - \varphi}{\sin \varphi} \\ \frac{\vec{F}_Q}{t} &= \rho u_\infty^2 b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & c_{pK} &= -\frac{\sin(2\varphi)}{\pi - \varphi} - \left( \frac{\sin \varphi}{\pi - \varphi} \right)^2 \\ & & \frac{F_{Hx}}{t} &= p_\infty b\end{aligned}$$

## 9.2 Potentialwirbel über Ebene.

Ein zweidimensionaler Potentialwirbel der Stärke  $\Gamma$  befindet sich im Abstand  $h$  oberhalb einer Ebene. Im Unendlichen sei der Druck  $p_\infty$  und die Geschwindigkeit  $u_\infty$  parallel zur Ebene. Die Flüssigkeit sei inkompressibel und reibungsfrei. (Anwendung des Spiegelungsprinzipes)

Gesucht sind:

1. Stromfunktion und Geschwindigkeitspotential für diese Anordnung,
2. die Geschwindigkeitskomponenten,
3. der Druckbeiwert  $c_p(x, 0)$  an der Ebene,
4. die Kraft pro Tiefeneinheit, die auf die Ebene wirkt, wenn auf der Unterseite der Druck  $p_\infty$  herrscht – zu welcher Beziehung vereinfacht sich der Ausdruck für die Kraft für  $h \gg 1$  ?
5. Diskussion des Stromlinienbildes.
6. Wie schnell müssen sich zwei gleichstarke, gegendrehende parallele Wirbelfäden bewegen, damit sie auf zur  $x$ -Achse parallelen Bahnen laufen?



zur Kontrolle:

$$\Phi(r, \varphi) = u_\infty r \cos \varphi + \frac{\Gamma}{2\pi} (\varphi_1 - \varphi_2) \quad \Psi(r, \varphi) = u_\infty r \sin \varphi - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

$$u(x, y) = u_\infty - \frac{\Gamma}{2\pi} \left( \frac{y-h}{x^2 + (y-h)^2} + \frac{y+h}{x^2 + (y+h)^2} \right)$$

$$v(x, y) = \frac{\Gamma}{2\pi} \left( \frac{x}{x^2 + (y-h)^2} - \frac{x}{x^2 + (y+h)^2} \right)$$

$$c_p(x, 0) = -\frac{2\Gamma}{\pi u_\infty} \frac{h}{x^2 + h^2} - \frac{\Gamma^2}{\pi^2 u_\infty^2} \frac{h^2}{(x^2 + h^2)^2}$$

$$\vec{F}_W = \rho u_\infty \Gamma + \frac{\rho \Gamma^2}{4\pi h} \quad u_\infty = -\frac{\Gamma}{4\pi h}$$

### 9.3 Unsymmetrisches, angestelltes Parabelbogenzweieck.

Gegeben sei ein dünnes Profil mit den Koordinatenfunktionen  $y_o(x) = 16\tau x(1-x)/3$  und  $y_u(x) = -8\tau x(1-x)/3$  für die Ober- und Unterseite, der Dickenparameter  $\tau$  sei  $\ll 1$ . Das Profil wird mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}_\infty$  unter dem Winkel  $\varepsilon \ll 1$  angeströmt.

Gesucht sind die Geschwindigkeitsstörungen und der Druckbeiwert  $c_p$  an der Proflober- und -unterseite, sowie der Auftriebsbeiwert  $c_A$ .

*Hinweise:*

$$\oint_0^1 \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}} d\xi = \frac{\pi}{2} \qquad \oint_0^1 \xi \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}} d\xi = \frac{3\pi}{8}$$

$$\int_0^1 \sqrt{x(1-x)} x = \frac{\pi}{8} \qquad \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}} x = \frac{\pi}{2}$$

$$\oint_0^1 \frac{\sqrt{\xi(1-\xi)}}{\xi-x} d\xi = -\frac{\pi}{2} (2x-1)$$

$$\oint_0^1 \frac{\xi \sqrt{\xi(1-\xi)}}{\xi-x} d\xi = -\frac{3\pi}{8} \left[ 1 - 4(1-x) + \frac{8}{3}(1-x)^2 \right]$$

zur Kontrolle:

$$\frac{u-u_\infty}{u_\infty}(x, 0^\pm) = \frac{4\tau}{\pi} \left( 2 + (2x-1) \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| \right) \pm \frac{8\tau}{3} \sqrt{x(1-x)} \pm \varepsilon \sqrt{\frac{1-x}{x}}$$

$$c_p(x, 0^\pm) = -2 \frac{u-u_\infty}{u_\infty}(x, 0^\pm)$$

$$c_A = \frac{4\pi\tau}{3} + 2\pi\varepsilon$$

## 9.4 Bewegte Quelle.

Die stationäre Quellumströmung wird durch das komplexe Potential

$$F(z) = u_\infty z + \frac{q}{2\pi} \ln z$$

beschrieben. Man bestimme daraus Strom- und Bahnlinien für den Fall, daß die Quelle durch ein ruhendes Medium mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}_R = -u_\infty \vec{e}_x$  bewegt wird.

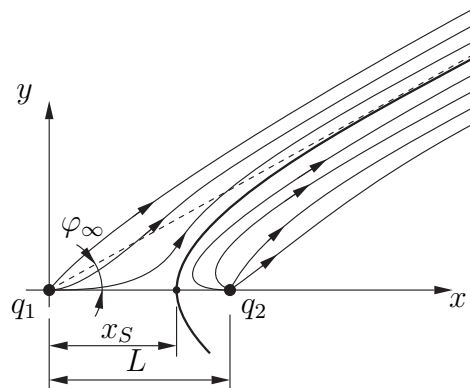
*Hinweis:*

$$\int \frac{\cos^n x}{\sin^m x} dx = \frac{-1}{m-1} \frac{\cos^{n-1} x}{\sin^{m-1} x} - \frac{n-1}{m-1} \int \frac{\cos^{n-2} x}{\sin^{m-2} x} dx, \quad m \neq 1$$

## 9.5 Doppelquellenanordnung (ebenes Problem).

Man betrachte zwei Quellen im Abstand  $L$  mit den Quellstärken  $q_1$  und  $q_2$  ( $q_1 > q_2$ ).

1. Ermitteln Sie Strom- und Potentialfunktion und daraus die Geschwindigkeitskomponenten für dieses Problem (inkompressibel, reibungsfrei).
2. Wo liegt der Staupunkt, wie lautet die Gleichung für die Trennstromlinie (Polarkoordinaten  $r, \varphi$ )?
3. Man gebe die Parameterdarstellung  $r(\varphi)$  der Trennstromlinie an und bestimme den Öffnungswinkel des entstehenden Halbkörpers für  $r \rightarrow \infty$ .



zur Kontrolle:

$$\begin{aligned} \Phi(r, \varphi) &= \frac{q_1}{2\pi} \ln r_1 + \frac{q_2}{2\pi} \ln r_2 \\ \Psi(r, \varphi) &= \frac{q_1}{2\pi} (\varphi_1 + 2\pi n) + \frac{q_2}{2\pi} (\varphi_2 + 2\pi n) \\ u &= \frac{q_1}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{q_2}{2\pi} \frac{x-L}{(x-L)^2 + y^2} \\ v &= \frac{q_1}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{q_2}{2\pi} \frac{y}{(x-L)^2 + y^2} \end{aligned}$$

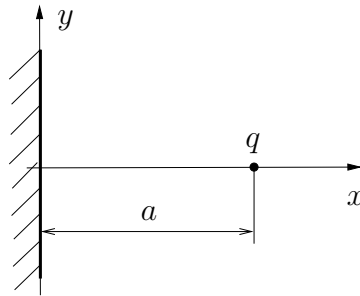
$$\begin{aligned}
 x_S &= \frac{Lq_1}{q_1 + q_2} & y_S &= 0 \\
 q_1 \arctan \frac{y}{x} &= -q_2 \arctan \frac{y}{x-L} \\
 r &= \frac{L \tan\left(\frac{q_1}{q_2}\varphi\right)}{\cos\varphi \tan\left(\frac{q_1}{q_2}\varphi\right) + \sin\varphi} \\
 \varphi_\infty &= \frac{q_2\pi}{2q_1}
 \end{aligned}$$

## 9.6 Quelle vor einer Wand (ebenes Problem).

Gegeben ist eine Quelle der Quellstärke  $q$  im Abstand  $a$  vor einer Wand. Man bestimme mit Hilfe der Spiegelungsmethode die Potential- und Stromfunktion für diese Anordnung und daraus die Geschwindigkeits- und Druckverteilung im gesamten Halbraum (die Strömung sei inkompressibel und reibungsfrei). Wie sieht die Geschwindigkeits- und Druckverteilung an der Wand bzw. im Unendlichen aus? Weiters ermittle man die Haltekraft der Quelle durch geeignete Wahl eines Kontrollvolumens.

*Hinweis:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

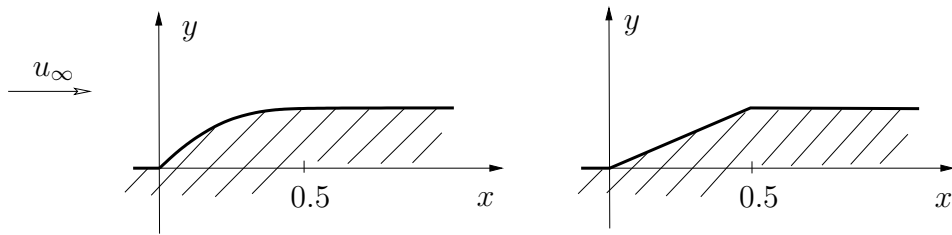


## 9.7 Halbkörper.

Gesucht sind die Geschwindigkeitsstörungen und der Druckbeiwert an den Oberflächen folgender Profile:

1. Parabelhalbkörper:  $h_d(x) = (0, 2x(1-x), 0.5)$  für  $(x < 0, 0 \leq x \leq 0.5, x > 0.5)$ ,
2. Keilhalbkörper:  $h_d(x) = (0, x, 0.5)$  für  $(x < 0, 0 \leq x \leq 0.5, x > 0.5)$ .

Skizzieren Sie die Ergebnisse!



## 9.8 Ebene Parabelumströmung.

Man zeige, daß das komplexe Potential

$$F(z) = u_\infty \left( z \mp i\sqrt{2R}\sqrt{z} \right), \quad y \lesseqgtr 0$$

die symmetrische Umströmung einer Parabel beschreibt, deren Scheitelkrümmungskreis den Radius  $R$  hat. (Körperkontur, Geschwindigkeitskomponenten, Geschwindigkeit und Druckverteilung an der Kontur, Staupunkt, ...)

*Hinweis:* Zur Bestimmung der Stromfunktion benutze man die Exponentialdarstellung von  $\sqrt{z} = \sqrt{r} e^{i\varphi/2}$  und Halbwinkelsätze der trigonometrischen Funktionen.

## 9.9 Unsymmetrische, ebene Parabelumströmung.

Man zeige, daß die Superposition des komplexen Potentials

$$F(z) = u_\infty \left( z \mp i\sqrt{2R}\sqrt{z} \right), \quad y \lesseqgtr 0$$

und einer Kantenumströmung der Form

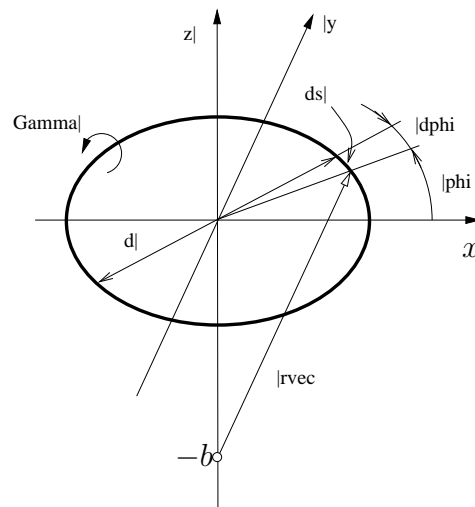
$$F(z) = u_\infty \sqrt{2C}\sqrt{z}$$

eine unsymmetrische Umströmung einer Parabel beschreibt. (Körperkontur, Geschwindigkeitskomponenten, Geschwindigkeit und Druckverteilung an der Kontur, Staupunkt, ...)

## 9.10 Rauchring.

Man betrachte die vereinfachte Darstellung eines Rauchringes mit dem Durchmesser  $d$  (Skizze). Die geschlossene Wirbellinie habe die Zirkulation  $\Gamma < 0$ . Gesucht ist die auf der  $z$ -Achse im Abstand  $-b$  vom Ursprung induzierte Geschwindigkeit  $\vec{v}$  (Richtung und Betrag).

*Hinweis:* Anwendung des Gesetzes von Biot-Savart.



## 9.11 Zylinderumströmung

Durch das komplexe Potential  $F(z) = u_\infty (z + R^2/z)$  wird die stationäre, inkompressible und reibungsfreie Umströmung eines Zylinders mit dem Radius  $R$  beschrieben. Die ungestörte Anströmgeschwindigkeit ist  $u_\infty$ .

Man bestimme die *Strom- und Teilchenbahnlinien* für den Fall der stationären Zylinderumströmung und für die instationäre Betrachtungsweise, bei der man sich den Zylinder durch ein ruhendes Medium mit der Geschwindigkeit  $u_\infty$  in negativer  $x$ -Richtung bewegt denkt.





# Kapitel 10

## Ebene, kompressible Strömung

### 10.1 Wellige Wand.

Es sind die Geschwindigkeitsstörungen in einer Strömung über einer welligen Wand für  $y \geq 0$  zu bestimmen. Die Wand sei durch die Funktion  $y_w(x) = \tau \sin(2\pi x)$  gegeben, der „Dickenparameter“  $\tau$  ist klein gegen 1.

Man löse das gegebene Problem für

1. inkompressible Strömung, d.h.  $M_\infty \ll 1$ , durch direkte Lösung der Laplacegleichung und mit Hilfe der Profiltheorie (Singularitätenbelegung),

*Hinweise:*

$$\int_0^\infty \frac{x^{\beta-1} \sin(ax - \beta\pi/2)}{\gamma^2 + x^2} dx = -\frac{\pi}{2} \gamma^{\beta-2} e^{-a\gamma}, \quad a > 0, \operatorname{Re}(\gamma) > 0, 0 < \operatorname{Re}(\beta) < 2,$$

$$\int_0^\infty \frac{x^\beta \cos(ax - \beta\pi/2)}{\gamma^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2} \gamma^{\beta-1} e^{-a\gamma}, \quad a > 0, \operatorname{Re}(\gamma) > 0, |\operatorname{Re}(\beta)| < 1.$$

2. Unterschallströmung mit Kompressibilitätseinfluß,  $M_\infty < 1$  (Prandtl-Glauert-Transformation),

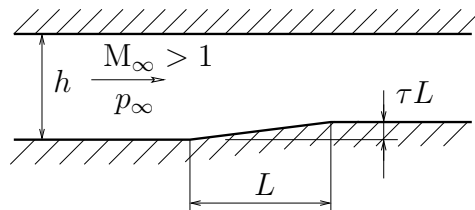
3. Überschallströmung  $M_\infty > 1$ ,

und diskutiere die Ergebnisse.

## 10.2 Kanal-Überschallströmung (lineare Theorie).

Gegeben ist die Situation laut Skizze. Man bestimme die Geschwindigkeits- und Druckstörungen im entstehenden Wellenmuster stromabwärts der Kanalverengung für

1.  $1/\sqrt{M_\infty^2 - 1} < 2h/L$  und
2.  $1/\sqrt{M_\infty^2 - 1} = 2h/L$  für  $\tau \ll 1$ .
3. Wie müßte die obere Kanalwand modifiziert werden, damit stromabwärts keine Druckstörungen auftreten?

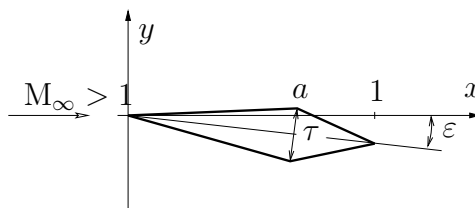


## 10.3 Angestelltes Rautenprofil in Überschallströmung (lineare Theorie).

Ein dünnes Rautenprofil der Dicke  $\tau \ll 1$  wird unter dem Anstellwinkel  $\varepsilon \ll 1$  einer Überschallströmung  $M_\infty > 1$  ausgesetzt (siehe Skizze).

Man berechne mit Hilfe der *linearen Theorie* die Geschwindigkeitsstörungen oberhalb und unterhalb des Profils sowie den Widerstand und den Auftrieb in Form von  $c_w$  und  $c_a$ .

Bei welchem Wert von  $a$  wird der Widerstand bei gegebener Anstellung  $\varepsilon$  und Dicke  $\tau$  minimal?



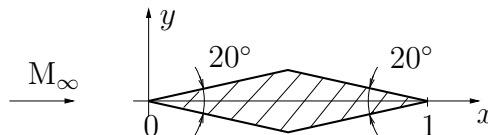
# Kapitel 11

## Nichtlineare Effekte bei Überschallströmungen

### 11.1 Rautenprofil in Überschallströmung.

Ermittle den Widerstandsbeiwert eines nichtangestellten, spiegelsymmetrischen Rautenprofils für  $M_\infty = 1,6$ ,  $p_\infty = 1 \text{ bar}$ ,  $T_\infty = 288 \text{ K}$ ,  $\kappa = 1,4$  und  $c_p = 1005 \text{ J/kg K}$

1. mit Hilfe der *linearen* Theorie,
2. unter Berücksichtigung *nichtlinearer* Effekte.
3. Man diskutiere das sich ergebende Strömungsbild.



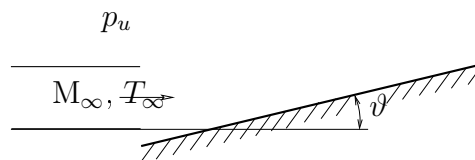
### 11.2 Umlenkung eines Überschallfreistrahls.

Ein Überschallparallelstrahl eines idealen Gases mit  $\kappa = 1,4$  und  $c_p = 1005 \text{ J/kg K}$  mit  $M_\infty = 2$  und  $T_\infty = 293 \text{ K}$  trifft auf eine unter einem Winkel  $\vartheta = 10^\circ$  geneigte Platte. Der nach dem schiefen Verdichtungsstoß entstehende Überdruck muß am Strahlaußenrand durch eine Prandtl-Meyer Expansion auf Umgebungsdruck  $p_u = 1 \text{ bar}$  entspannt werden (am Strahlaußenrand ist immer  $p = p_u$ ).

Man bestimme

1. den Druck  $p_\infty$ , die Geschwindigkeit  $u_\infty$  und die Schallgeschwindigkeit  $c_\infty$  im ungestörten Parallelstrahl,
2. die sich ergebenden Strömungsverhältnisse im reflektierten Strahl nach der *linearen* Theorie (Drücke und Geschwindigkeiten im entstehenden Wellenmuster),

3. das sich nach der *nichtlinearen* Theorie ergebende Strömungsbild und den Druck  $p_1$ , die Machzahl  $M_1$  und die Geschwindigkeit  $u_1$  nach dem schiefen Verdichtungsstoß sowie
4. den Druck  $p_2$ , die Machzahl  $M_2$ , die Geschwindigkeit  $u_2$  und den Umlenkwinkel  $\varepsilon$  am Strahlaußenrand nach der Expansion.

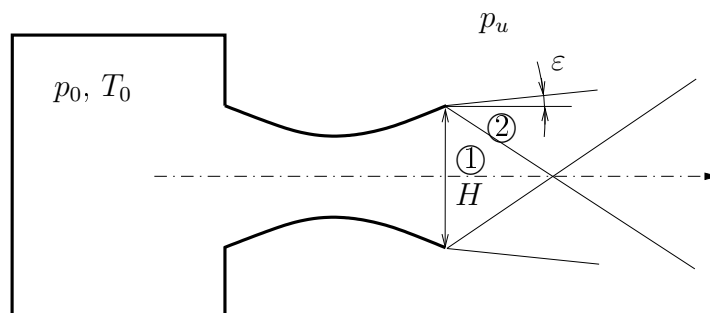


### 11.3 Schwingender Freistrah.

Ein ideales Gas mit  $\kappa = 1,4$  und  $c_p = 1005 \text{ J/kg K}$  strömt als Überschallparallelstrahl aus einer Düse gegen den Umgebungsdruck  $p_u = 1 \text{ bar}$  aus. Der Ruhedruck im Kessel ist  $p_0 = 10 \text{ bar}$ , die Ruhetemperatur  $T_0 = 560 \text{ K}$  und die Machzahl im Mündungsquerschnitt  $H \cdot t$  ( $t \dots$  Tiefeneinheit) ist mit  $M_1 = 2$  gegeben.

Man bestimme

1. den Druck  $p_1$ , die Geschwindigkeit  $u_1$  und die Schallgeschwindigkeit  $c_1$  im Gebiet ①,
2. mit Hilfe der *linearen* Theorie den Expansionswinkel  $\varepsilon$ , die Geschwindigkeit  $u_2$  und die Machzahl  $M_2$  im Gebiet ②, *Hinweis:* Am Strahlrand muß jeweils Umgebungsdruck herrschen.
3. die Werte von  $\varepsilon$ ,  $u_2$  und  $M_2$  aus der *nichtlinearen* Theorie.
4. Man vervollständige das Wellenmuster des Freistrahles weiter stromab und gebe die Wellenlänge des periodischen Musters bei gegebenem  $H$  und kleinem  $\varepsilon$  an.
5. Wie ändern sich die Strömungsverhältnisse, wenn der Überschallstrahl gegen Überdruck austritt? ( $p_1 < p_u$ ).

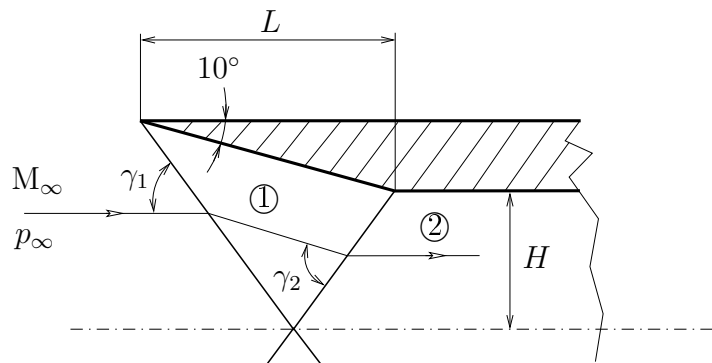


## 11.4 Kanaleinlauf.

Am Einlauf eines ebenen, symmetrischen Kanals entsteht das skizzierte Strömungsmuster, wenn der Kanal mit Luft (ideales Gas  $\kappa = 1,4$ ,  $R = 287 \text{ J/kg K}$ ) unter  $M_\infty = 3$  und  $p_\infty = 1 \text{ bar}$ ,  $T_\infty = 288 \text{ K}$  angeströmt wird. Die schiefen Verdichtungsstöße sollen nach dem Auftreffen auf das Ende des konvergenten Teiles des Kanals nicht reflektiert werden. Man berechne

1. die Machzahlen, Drücke, Ruhedrucke, Dichten, Temperaturen, Schallgeschwindigkeiten und Winkeln in den Gebieten ① und ②,
2. die Gesamtentropieerhöhung,
3. das Verhältnis  $L/H$ , damit das skizzierte Strömungsbild realisiert werden kann.

*Hinweis:* Trifft der zweite Verdichtungsstoß nicht auf die Kanalkante, so ist eine Skizze des entstehenden Wellenmusters nach der *linearen* Theorie für die Berechnung hilfreich.





# Kapitel 12

## Dünne Reibungsschichten

### 12.1 Laminare, selbstähnliche Grenzschichten (ebenes Problem).

Ausgehend von der reibungsfreien Potentialströmung soll durch Übergang auf reale, reibungsbehaftete Strömungen, welche die Haftbedingung an einer Körperoberfläche erfüllen, die Größenordnung der sich ausbildenden Reibungsgrenzschicht ermittelt werden. Durch Einführung geeigneter dimensionsloser Größen ermittle man aus den Grundgleichungen (inkompressibel) im Grenzfall  $Re \rightarrow \infty$  die Grenzschichtgleichungen mit dementsprechenden Randbedingungen. Unter welchen Bedingungen sind die Grenzschichtprofile selbstähnlich? Für selbstähnliche Grenzschichten bestimme man die Verdrängungsdicke  $\delta^*$  und den lokalen Reibungsbeiwert  $c'_f$  und spezialisiere die Ergebnisse für die einseitige Plattenströmung.

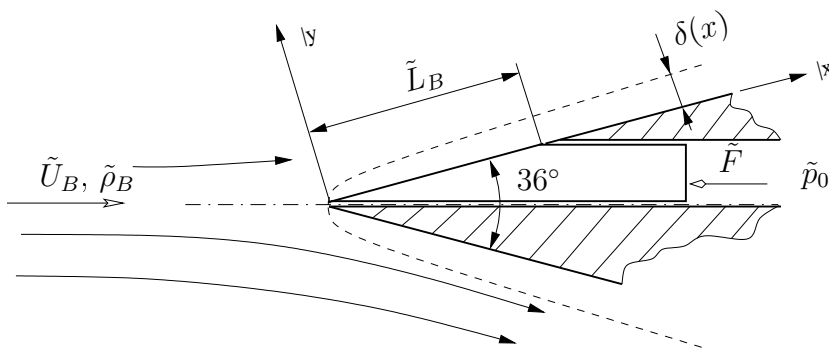


## 12.2 Reibungsbehaftete, ebene Keilumströmung hoher Re-Zahl.

Ein Keil mit dem Keilwinkel von  $36^\circ$  wird parallel zur Symmetrieachse angeströmt. Das unschraffierte, reibungsfrei gelagerte Gleitstück (Bezugslänge  $\tilde{L}_B$ ) wird in der gezeichneten Lage (Haltekraft  $\tilde{F}$ ) gehalten (kennzeichnet dimensionsbehaftete Größen).

Man bestimme

1. die Wandgeschwindigkeit  $U_w(x)$  der reibungsfreien Außenströmung,
2. die dimensionsbehaftete Dicke der sich ausbildenden Reibungsgrenzschicht  $\tilde{\delta}(x)$ ,
3. den Reibungsbeiwert  $c'_f(x)$  und den Anteil der Haltekraft  $\tilde{F}_R$ , der sich aufgrund der Wandreibung am Gleitstück (Breite  $\tilde{b}$ ) ergibt (die Bezugsgeschwindigkeit sei  $\tilde{U}_B$ ),
4. den Anteil  $\tilde{F}_p$  der Haltekraft  $\tilde{F}$ , der sich aufgrund der Druckverteilung am Gleitstück ergibt. Auf der Hinterseite des Gleitstückes herrscht der Druck  $\tilde{p}_0$ , an der Keilvorderkante der Staudruck  $\tilde{p}_w(0)$ .



## 12.3 Lokale, ebene Staupunktströmung.

Die Strömung in der Nähe eines Staupunkts kann im reibungsfreien Fall durch das komplexe Potential  $F(z) = z^2/2$  beschrieben werden. Daraus berechne man die Geschwindigkeit an der Körperwand und prüfe, ob die Voraussetzung für die Einfügung einer selbstständigen Grenzschicht gegeben ist. Ist das der Fall, gebe man mit Hilfe der Ergebnisse von Einführungsbeispielen die Verdrängungsdicke und den lokalen Reibungsbeiwert an.

## 12.4 Schmierspalttheorie.

Man betrachte die skizzierte Situation einer Kunststoffplattenherstellung: Zwei Endlosmetallbänder werden über Reibrollen mit der Umlaufgeschwindigkeit  $u_0$  angetrieben. Über eine entsprechende Anordnung wird von links flüssiger Kunststoff in den Spalt (=„Schmierspalt“) zwischen den Bändern zugeführt. Durch die entsprechende Formgebung des Spaltes (Höhe  $2h(x)$ ) wird der Kunststoff verdichtet. Am Ende des Spaltes ist das Material durch Wärmeentzug so weit abgekühlt, daß es „erstarrt“ ist und in Form einer Endlosplatte mit der Umfangsgeschwindigkeit der Metallbänder,  $u_0$ , gegen den Umgebungsdruck  $p_0$  abgezogen wird.

1. Für den stationären Betrieb und der Annahme konstanter Stoffwerte bestimme man unter Beachtung der Randbedingungen für Geschwindigkeit und Druck mit Hilfe der Schmierspalttheorie den Geschwindigkeitsverlauf  $u(x, y)$  und den Volumenstrom  $\dot{V}$  sowie den Druckverlauf  $p(x)$  in Abhängigkeit der halben Spalthöhe  $h(x)$ .
2. Man werte die erhaltenen Ergebnisse für folgenden (linearen) Spalthöhenverlauf (s. Skizze) aus:

$$h(x) = \begin{cases} h_0 - \frac{x}{L_1}(h_0 - h_1) & 0 \leq x \leq L_1, \\ \frac{h_L - h_1}{L - L_1}(x - L) + h_L & L_1 \leq x \leq L. \end{cases}$$

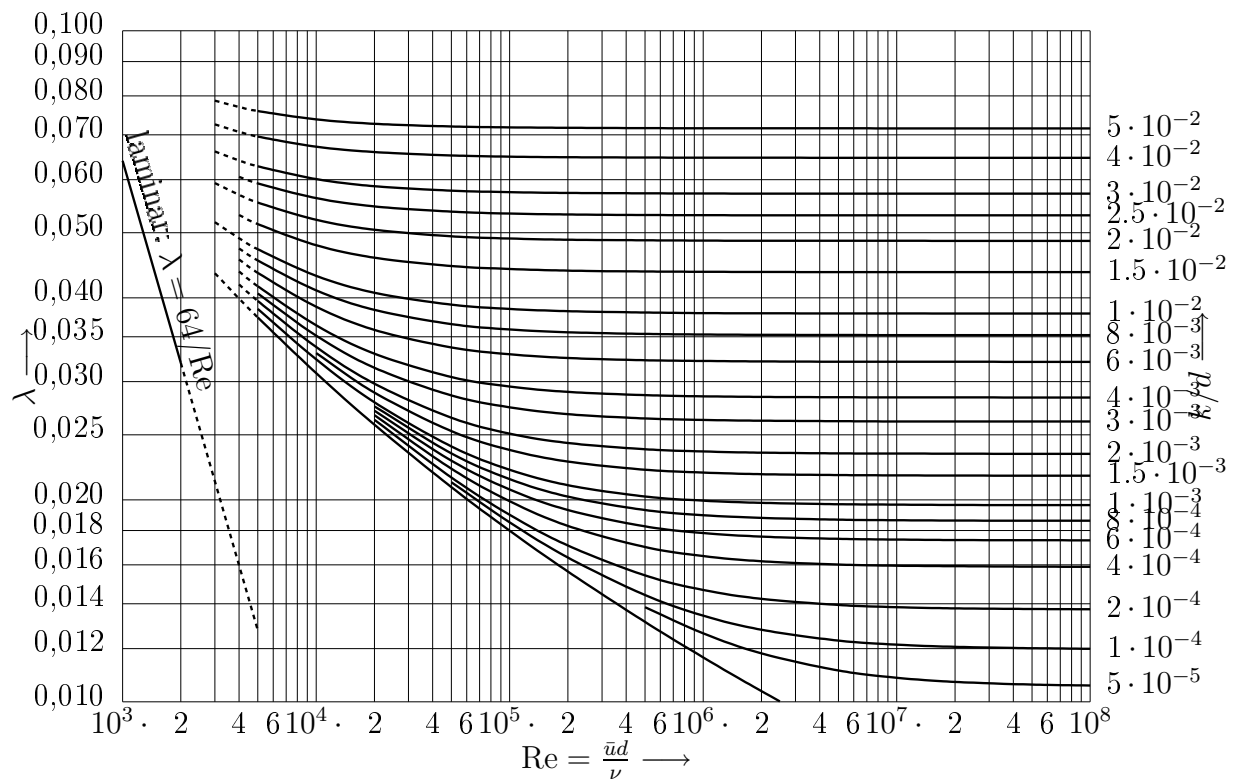
Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit dem Diagramm für den Druckverlauf unter den gegebenen Größen:  $L = 50$  m,  $L_1 = 40$  m,  $h_0 = 5$  mm,  $h_1 = 1,5$  mm und  $h_L = 2,5$  mm. (Die eingezeichneten Geschwindigkeitsprofile sind auf die jeweilige Spalthöhe bezogen.)



# Kapitel 13

## Anhang

### 13.1 Colebrook-Diagramm.



## 13.2 Zustands- und Geschwindigkeitsgrößen im Stromfaden bei isentroper, stationärer Strömung ( $\kappa = 1,4$ )

Unterschalltabelle

M	M*	$\frac{p}{p_0}$	$\frac{\rho}{\rho_0}$	$\frac{T}{T_0}$	$\frac{\rho v}{\rho^* c^*}$	$\beta = \sqrt{1 - M^2}$
0,05	0,055	0,998	0,999	1,000	0,086	0,999
0,1	0,109	0,993	0,995	0,998	0,172	0,995
0,15	0,164	0,984	0,989	0,996	0,256	0,989
0,2	0,218	0,973	0,980	0,992	0,337	0,980
0,25	0,272	0,958	0,969	0,988	0,416	0,968
0,3	0,326	0,939	0,956	0,982	0,491	0,954
0,35	0,379	0,919	0,941	0,976	0,562	0,937
0,4	0,431	0,896	0,924	0,969	0,629	0,917
0,45	0,483	0,870	0,906	0,961	0,690	0,893
0,5	0,535	0,843	0,885	0,952	0,746	0,866
0,55	0,585	0,814	0,863	0,943	0,797	0,835
0,6	0,635	0,784	0,840	0,933	0,842	0,800
0,65	0,684	0,753	0,816	0,922	0,881	0,760
0,7	0,732	0,721	0,792	0,911	0,914	0,714
0,75	0,779	0,689	0,766	0,899	0,941	0,661
0,8	0,825	0,656	0,740	0,887	0,963	0,600
0,85	0,870	0,623	0,714	0,874	0,980	0,527
0,9	0,915	0,591	0,687	0,861	0,991	0,436
0,95	0,958	0,559	0,660	0,847	0,998	0,312
1,0	1,000	0,528	0,634	0,833	1,000	0,000

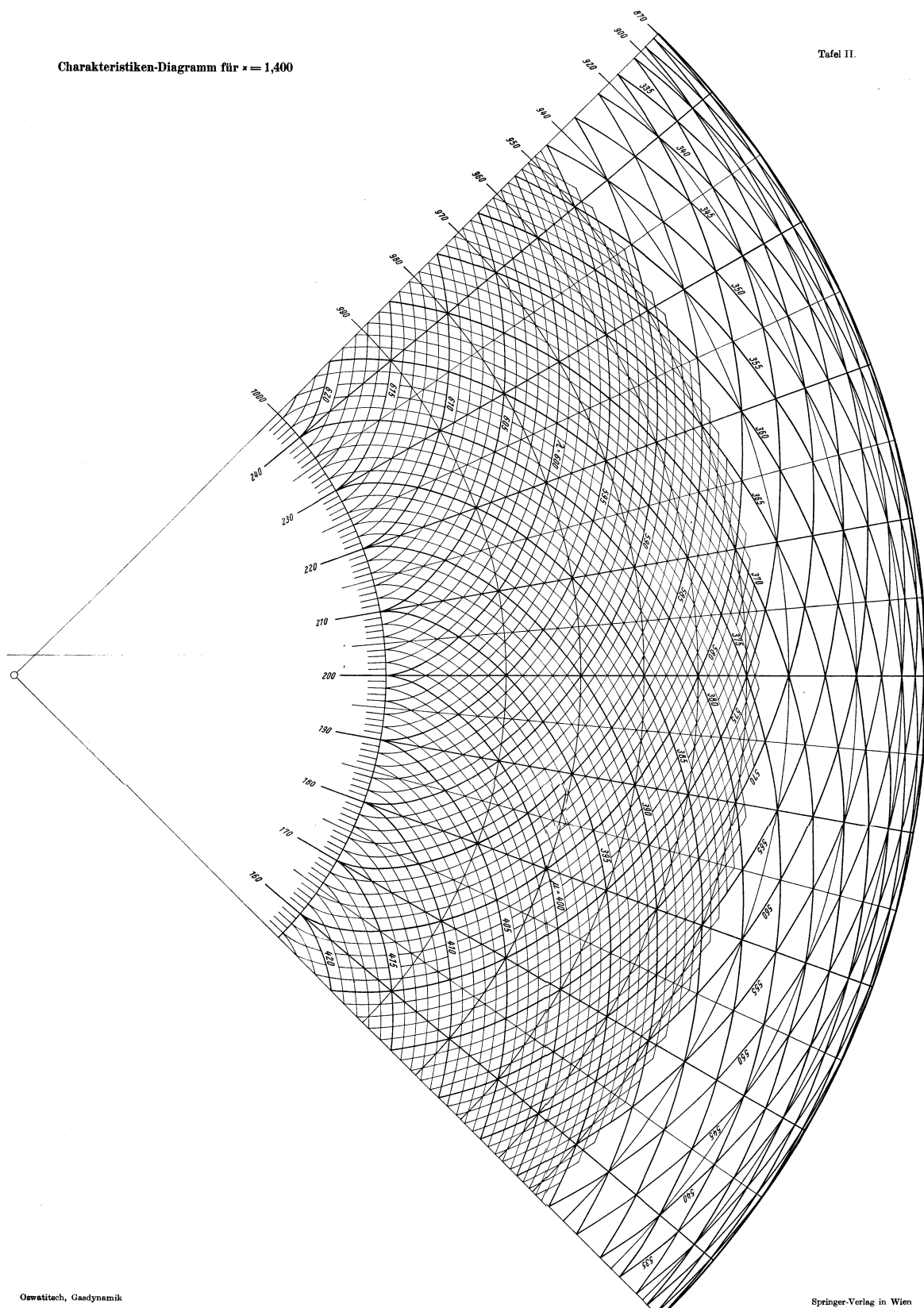
Überschalltabelle

M	M*	$\frac{p}{p_0}$	$\frac{\rho}{\rho_0}$	$\frac{T}{T_0}$	$\frac{\rho v}{\rho^* c^*}$	$\frac{\hat{p}_0}{p_0}$
1,0	1,000	0,528	0,634	0,833	1,000	1,000
1,05	1,041	0,498	0,608	0,819	0,998	1,000
1,1	1,082	0,468	0,582	0,805	0,992	0,999
1,2	1,158	0,412	0,531	0,776	0,970	0,993
1,3	1,231	0,361	0,483	0,747	0,938	0,979
1,4	1,300	0,314	0,437	0,718	0,897	0,958
1,5	1,365	0,272	0,395	0,690	0,850	0,930
1,6	1,425	0,235	0,356	0,661	0,800	0,895
1,7	1,483	0,203	0,320	0,634	0,748	0,856
1,8	1,536	0,174	0,287	0,607	0,695	0,813
1,9	1,586	0,149	0,257	0,581	0,643	0,767
2,0	1,633	0,128	0,230	0,556	0,593	0,721
2,5	1,826	0,059	0,132	0,444	0,379	0,499
3,0	1,964	0,027	0,0762	0,357	0,236	0,328
3,5	2,064	0,0131	0,0452	0,290	0,147	0,213
4,0	2,138	0,00659	0,0277	0,238	0,0933	0,139
4,5	2,194	0,00346	0,0174	0,198	0,0604	0,0917
5,0	2,236	0,00189	0,0113	0,167	0,0400	0,0618
6,0	2,295	0,000633	0,00519	0,122	0,0188	0,0297
7,0	2,333	0,000242	0,00261	0,0926	0,00960	0,0153
8,0	2,359	0,000102	0,00141	0,0725	0,00526	0,00849
9,0	2,377	0,0000474	0,000815	0,0581	0,00306	0,00496
10	2,391	0,0000236	0,000495	0,0476	0,00187	0,00304
20	2,435	0,00000209	0,0000170	0,0123	0,0000651	0,000108
$\infty$	2,4495	0	0	0	0	0

# 13.3 Charakteristikendiagramm

Charakteristiken-Diagramm für  $\kappa = 1,400$

Tafel II.



## 13.4 Tabelle zum Charakteristikendiagramm für Luft ( $\kappa = 1,4$ )

Ch	$\vartheta$	M	M*	$\alpha$	$\frac{p}{p_0}$	$\frac{\rho}{\rho_0}$	$\frac{T}{T_0}$	$\frac{\rho v}{\rho^* c^*}$
1000	0	1.000	1.000	90.00	0.5283	0.6339	0.8333	1.0000
999	1	1.082	1.067	67.55	0.4789	0.5910	0.8103	0.9947
998	2	1.133	1.107	61.97	0.4496	0.5649	0.7957	0.9864
997	3	1.177	1.141	58.17	0.4249	0.5426	0.7830	0.9765
996	4	1.218	1.171	55.18	0.4028	0.5223	0.7712	0.9654
995	5	1.256	1.200	52.77	0.3830	0.5038	0.7602	0.9534
994	6	1.293	1.227	50.67	0.3644	0.4862	0.7494	0.9404
993	7	1.330	1.252	48.75	0.3464	0.4690	0.7389	0.9263
992	8	1.365	1.276	47.10	0.3300	0.4530	0.7285	0.9120
991	9	1.400	1.300	45.58	0.3142	0.4374	0.7184	0.8970
990	10	1.435	1.323	44.18	0.2990	0.4222	0.7083	0.8811
989	11	1.469	1.341	42.90	0.2847	0.4077	0.6986	0.8651
988	12	1.502	1.366	41.75	0.2711	0.3937	0.6888	0.8487
987	13	1.537	1.387	40.58	0.2580	0.3800	0.6792	0.8318
986	14	1.570	1.409	39.57	0.2456	0.3669	0.6696	0.8148
985	15	1.604	1.429	38.57	0.2337	0.3541	0.6601	0.7975
984	16	1.638	1.448	37.62	0.2221	0.3415	0.6506	0.7797
983	17	1.673	1.467	36.70	0.2111	0.3294	0.6412	0.7621
982	18	1.707	1.486	35.87	0.2006	0.3175	0.6319	0.7441
981	19	1.741	1.505	35.05	0.1905	0.3060	0.6226	0.7262
980	20	1.775	1.523	34.28	0.1808	0.2948	0.6134	0.7081
979	21	1.809	1.541	33.57	0.1715	0.2839	0.6043	0.6899
978	22	1.844	1.559	32.83	0.1627	0.2733	0.5951	0.6718
977	23	1.879	1.576	32.15	0.1510	0.2629	0.5860	0.6536
976	24	1.915	1.693	31.48	0.1459	0.2529	0.5769	0.6355
975	25	1.950	1.610	30.85	0.1380	0.2430	0.5679	0.6174
974	26	1.986	1.627	30.23	0.1306	0.2335	0.5590	0.5995
973	27	2.023	1.643	29.62	0.1234	0.2243	0.5499	0.5815
972	28	2.060	1.659	29.03	0.1166	0.2153	0.5411	0.5637
971	29	2.096	1.675	28.50	0.1099	0.2066	0.5322	0.5461
970	30	2.134	1.691	27.95	0.1037	0.1982	0.5233	0.5286
969	31	2.172	1.706	27.42	0.09770	0.1899	0.5146	0.5113
968	32	2.211	1.722	26.88	0.09200	0.1819	0.5058	0.4942
967	33	2.249	1.738	26.40	0.08656	0.1741	0.4971	0.4773
966	34	2.289	1.753	25.90	0.08137	0.1666	0.4884	0.4107
965	35	2.329	1.767	25.43	0.07644	0.1593	0.4798	0.4442
964	36	2.369	1.782	24.97	0.07174	0.1522	0.4711	0.4280
963	37	2.411	1.796	24.50	0.06726	0.1454	0.4626	0.4121
962	38	2.453	1.810	24.07	0.06301	0.1389	0.4640	0.3964
961	39	2.495	1.824	23.63	0.05898	0.1325	0.4455	0.3811
960	40	2.538	1.838	23.20	0.05517	0.1263	0.4370	0.3660
959	41	2.581	1.852	22.78	0.05153	0.1203	0.4286	0.3513
958	42	2.626	1.865	22.38	0.04811	0.1145	0.4203	0.3368
957	43	2.671	1.878	21.98	0.04488	0.1089	0.4121	0.3228
956	44	2.718	1.891	21.58	0.04181	0.1035	0.4038	0.3090
955	45	2.764	1.904	21.22	0.03890	0.09835	0.3955	0.2955
954	46	2.812	1.917	20.83	0.03616	0.09336	0.3873	0.2824
953	47	2.861	1.931	20.45	0.03357	0.08853	0.3792	0.2695
952	48	2.911	1.943	20.08	0.03114	0.08391	0.3712	0.2571
951	49	2.961	1.955	19.73	0.02886	0.07946	0.3632	0.2451
950	50	3.013	1.967	19.38	0.02670	0.07518	0.3552	0.2333
949	51	3.066	1.979	19.03	0.02467	0.07106	0.3472	0.2218
948	52	3.119	1.991	18.70	0.02277	0.06711	0.3394	0.2108
947	53	3.174	2.003	18.37	0.02101	0.06334	0.3317	0.2001
946	54	3.230	2.014	18.03	0.01935	0.05973	0.3240	0.1898
945	55	3.287	2.025	17.72	0.01781	0.05628	0.3163	0.1798
940	60	3.594	2.080	16.15	0.01148	0.04114	0.2790	0.1349
936	65	3.941	2.131	14.70	0.007131	0.02926	0.2435	0.09835
930	70	4.339	2.177	13.33	0.004233	0.02017	0.2098	0.06929
925	75	4.802	2.221	12.02	0.002391	0.01341	0.1782	0.04697
920	80	5.348	2.260	10.78	0.001271	0.008541	0.1488	0.03045
915	85	6.007	2.296	9.58	0.0006291	0.005169	0.1217	0.01863
910	90	6.820	2.328	8.43	0.0002849	0.002935	0.09706	0.01078
905	95	7.852	2.356	7.32	0.0001156	0.001541	0.07505	0.005732
900	100	9.210	2.380	6.23	0.00004069	0.0007310	0.05566	0.002745
895	105	11.095	2.401	5.17	0.00001175	0.0003010	0.03903	0.001140
890	110	13.87	2.4183	4.13	0.000002587	0.0001021	0.02533	0.0003896
885	115	18.435	2.4317	3.10	0.0000003670	0.00002531	0.01450	0.00009710
880	120	27.35	2.4413	2.10	0.00000002385	0.000003593	0.006640	0.00001384
875	125	52.48	2.4473	1.10	0.000000002746	0.0000001481	0.001812	0.0000005397
869.55	130.45	$\infty$	2.4495	0.00	0	0	0	0

# 13.5 Stoßpolarendiagramm

