

Optische Meßmethoden

Grundprinzip der hier vorgestellten optischen Methoden der Strömungsmeßtechnik ist, daß in dichten Medien die Lichtausbreitungsgeschwindigkeit eine Funktion der Massendichte ist. Mit einer als Brechungsindex bezeichneten Funktion $n(\vec{x})$ kann die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes am Ort \vec{x} als

$$c(\vec{x}) = \frac{c_0}{n(\vec{x})}$$

geschrieben werden. c_0 ist die (konstante) Vakuumlichtgeschwindigkeit. Für Gase, auf welche die Betrachtung im folgenden beschränkt wird, ist $n(\vec{x}) \sim 1$ und mit guter Näherung gilt ein linearer Zusammenhang zwischen Brechungsindex und Dichte

$$n(\vec{x}) = 1 + G(\omega) \rho(\vec{x}) .$$

$G(\omega)$ wird als Gladstone-Dale-Konstante bezeichnet¹ und hat für die meisten Gase im Frequenzbereich des sichtbaren Lichtes die Größenordnung $10^{-4} \text{m}^3/\text{kg}$.

Geometrische Optik

Die geometrische Optik beschreibt die Lichtausbreitung in jenen Fällen, in denen die Welleneigenschaften des Lichtes (siehe Interferenz, Beugung) unwesentlich sind. Die Ausbreitung des Lichtes wird dann durch Lichtstrahlen beschrieben, die sich in einem Medium mit konstantem Brechungsindex geradlinig ausbreiten. Die Intensität des Lichtes an einem bestimmten Ort ist durch die Dichte der Strahlen an dieser Stelle gegeben. Das Verhalten der Strahlen an Mediengrenzen wird durch das Reflexionsgesetz und das Brechungsgesetz beschrieben.

Reflexionsgesetz

Ein Lichtstrahl, der sich in einem Medium mit konstantem Brechungsindex n fortpflanzt, trifft unter dem Winkel ϑ zur Flächennormale auf eine reflektierende Fläche und wird in einem Winkel ϑ' reflektiert. Das Reflexionsgesetz besagt, daß

1. der eintreffende Strahl, der reflektierte Strahl und die Flächennormale am Auftreffpunkt P in einer Ebene liegen.

¹ $G(\omega)$ und somit auch der Brechungsindex hängt in Wirklichkeit von der Frequenz ω , also von der Farbe des Lichtes ab. Insofern ist die Bezeichnung Gladstone-Dale-Konstante irreführend.

2. Eintritts- und Austrittswinkel gleich groß sind:

$$\vartheta = \vartheta' .$$

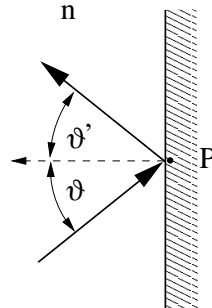


Abbildung 1: Reflexionsgesetz: Flächennormale (strichliert), eintretender und austretender Strahl liegen in einer Ebene. Eintrittswinkel ϑ und Austrittswinkel ϑ' sind gleich groß.

Snelliussches Brechungsgesetz

Betrachtet wird die Grenzfläche zwischen zwei Medien unterschiedlicher Brechungsindizes n_1 und n_2 . Ein Strahl, der im Winkel ϑ_1 zur Flächennormale von Medium 1 auf die Grenzfläche trifft, setzt sich in Medium 2 unter einem Winkel ϑ_2 zur Flächennormale fort. Für $n_1 \neq n_2$ und $\vartheta_1 \neq 0$ erfährt der Strahl an der Grenzfläche eine Ablenkung.

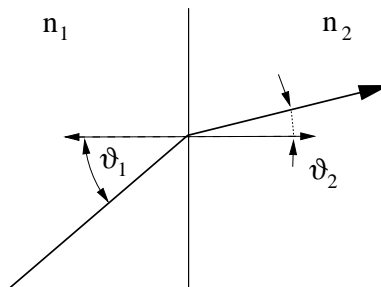


Abbildung 2: Brechungsgesetz für $n_1 < n_2$. Die Flächennormalen sind strichliert dargestellt

Das Brechungsgesetz stellt folgende Beziehung zwischen den Brechungsindices, dem Eintritts- und dem Austrittswinkel her:

$$n_1 \sin \vartheta_1 = n_2 \sin \vartheta_2 .$$

Die Winkel ϑ_1 und ϑ_2 können Werte von 0° bis 90° annehmen. Die Sinus-Funktion liefert daher Werte von 0 bis 1. Aus dem Brechungsgesetz ergeben sich aber Einschränkungen für den Winkel im Medium mit dem größeren Brechungsindex. Wir betrachten zwei Fälle:

- $n_1 < n_2$:

$$\sin \vartheta_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \vartheta_1$$

Den größten Wert für ϑ_2 erhält man für $\vartheta_1 = 90^\circ$:

$$\vartheta_{2max} = \frac{n_1}{n_2} < 1 \quad \rightarrow \quad \vartheta_{2max} < 90^\circ$$

- $n_1 > n_2$: Da $\sin \vartheta_2$ nicht größer als 1 werden kann, ist der maximal mögliche Eintrittswinkel ϑ_{1max} durch

$$\sin \vartheta_{1max} = \frac{n_2}{n_1}$$

gegeben, also $\vartheta_{1max} < 90^\circ$. Erhöht man ϑ_1 über den Wert ϑ_{1max} hinaus, so kann der Strahl nicht mehr durch die Grenzfläche hindurchtreten, sondern wird an ihr in das Medium 1 zurückgeworfen. Dies wird als *Totalreflexion* bezeichnet.

Das Brechungsgesetz beschreibt den Umstand, daß ein Lichtstrahl beim Übergang von einem Medium mit kleinerem (größerem) in ein Medium mit größerem (kleinerem) Brechungsindex zur Flächennormale der Grenzfläche hin (von der Flächennormale weg) abgelenkt wird. Im allgemeinen ändert sich der Brechungsindex nicht sprunghaft, sondern kontinuierlich. Es läßt sich zeigen, daß ein Lichtstrahl dann in Richtung zunehmenden Brechungsindex', also in Richtung des Gradienten $\vec{\nabla}n(\vec{x})$ abgelenkt wird. Die Ablenkung ist umso stärker, je größer $\vec{\nabla}n(\vec{x})$ ist. Dabei ist nur der Anteil des Gradienten quer zur Strahlausbreitungsrichtung für eine Richtungsänderung ausschlaggebend.² Ist ein linearer Zusammenhang zwischen Brechungsindex und Dichte gegeben, dann gilt

$$\vec{\nabla}n(\vec{x}) = G(\omega) \vec{\nabla}\rho(\vec{x}) .$$

Somit bewirken Dichteänderungen quer zur Strahlausbreitungsrichtung eine Ablenkung der Strahlen, die umso stärker ist, je größer die Dichteänderungen sind. Dies kann dazu benützt werden, Dichteunterschiede in einem Strömungsfeld sichtbar zu machen.

Im folgenden werden kurz die zum Verständnis der unten dargestellten Meßmethoden erforderlichen Prinzipien einiger optischer Bauelemente beschrieben.

²Wenn $\vec{\nabla}n(\vec{x})$ und die Strahlausbreitungsrichtung in die selbe Richtung zeigen, entspricht dies dem Fall $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0$ im Brechungsgesetz, d.h. es tritt keine Ablenkung auf.

Dünne Linsen

Durch Kombination von Medien mit unterschiedlichen Brechungsindices ist es bei geeigneter Form der Grenzflächen möglich, eine *optische Abbildung* zu erzeugen. Im idealen Sinn versteht man unter einer Abbildung jenen Fall, bei dem alle Lichtstrahlen, die von einem Punkt (*Objekt*) in beliebiger Richtung ausgehen, einander in einem anderen Punkt (*Bild*) schneiden. Ein abgegrenztes System, das in einem Medium mit konstantem Brechungsindex eingebettet zu jedem Punkt ein Bild erzeugt, stellt eine ideale optische Linse dar. Im folgenden seien ein paar Eigenschaften sogenannter dünner Linsen zusammengefaßt. Es werden nur jene Begriffe und Konzepte hier eingeführt, die für die Beschreibung der im weiteren besprochenen optischen Meßsysteme benötigt werden. Außerdem ist die Darstellung auf Sammellinsen beschränkt. Für weiterführende Darstellungen sei auf die einschlägige Literatur verwiesen.

Im Rahmen der paraxialen Näherung kann die Wirkung einer dünnen Linse durch eine mit besonderen Eigenschaften behaftete Ebene und die auf diese normal stehende *optische Achse* dargestellt werden. Strahlen, die auf diese Ebene treffen, erfahren einen Knick, dessen Stärke und Richtung davon abhängt, in welchem Abstand von der Achse sie die Ebene schneiden und welchen Winkel sie mit der Achse einschließen.

Brennpunkt

Eine wichtige Größe, die die optischen Eigenschaften einer dünnen Linse festlegt, ist die *Brennweite*. Alle Strahlen, die vor der Linse parallel zur optischen Achse verlaufen, schneiden die Achse nach der Linse im selben Punkt, dem *Brennpunkt*. Der Normalabstand zwischen Linse und Brennpunkt ist die Brennweite.

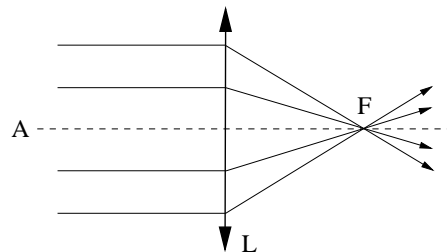


Abbildung 3: Brennpunkt: Alle Strahlen, die vor der Linse L parallel zur optischen Achse A verlaufen, schneiden einander nach der Linse im Brennpunkt F. Dieser kann daher als das Bild eines unendlich weit vor der Linse auf der optischen Achse befindlichen Objektes gedeutet werden.

Die Ebene parallel zur Linse, die den Brennpunkt enthält, heißt *Brennebene*. Alle Strahlen, die vor der Linse ein und denselben Winkel mit der optischen Achse der Linse

einschließen, treten in ein und demselben Punkt durch die Brennebene, gleichgültig von welchem Ausgangspunkt sie kommen.

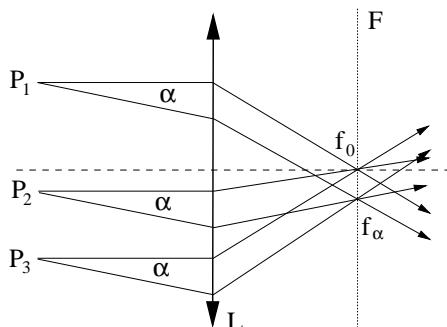


Abbildung 4: Brennebene: Alle Strahlen, die vor der Linse unter dem selben Winkel α zur optischen Achse verlaufen, schneiden die Brennebene F nach der Linse im selben Punkt f_α . Für $\alpha = 0$ ergibt sich wieder der Brennpunkt f_0 .

Konstruktion der Abbildung

Das Bild eines punktförmigen Objektes kann durch zwei Strahlen konstruiert werden. Wie oben erwähnt, kreuzt jeder Strahl, der vor der Linse parallel zur optischen Achse verläuft, die Achse hinter der Linse im Brennpunkt. Für ein gegebenes punktförmiges Objekt gibt es genau einen solchen Strahl (*Brennstrahl*). Hingegen tritt ein Strahl, der auf der optischen Achse auf die Linse trifft, unabgelenkt durch die Linse hindurch. Wieder gibt es für ein punktförmiges Objekt nur einen solchen Strahl (*Hauptstrahl*). Der Schnittpunkt von Brennstrahl und Hauptstrahl nach der Linse ist das Bild des Objektes. Alle anderen, vom Objektpunkt ausgehenden Strahlen gehen ebenfalls durch diesen Bildpunkt.

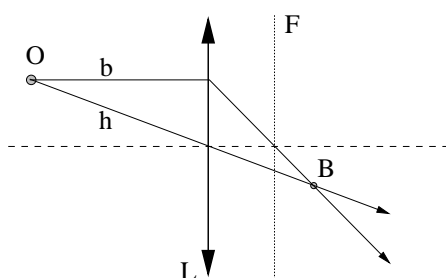


Abbildung 5: Bildkonstruktion: Das Bild B des Objektes O ist der Schnittpunkt von Brennstrahl b und Hauptstrahl h hinter der Linse.

Damit läßt sich nun auch das Bild eines ausgedehnten Objektes konstruieren, indem man für jeden Objektpunkt den zugehörigen Bildpunkt sucht. Das Bild ist dann die Summe aller Bildpunkte.

Strahlteiler

Für interferometrische Meßverfahren ist es von großer Wichtigkeit, einen Lichtstrahl in zwei Teile so aufzuspalten, daß die Energie des einfallenden Lichtstrahls in gleichem Maß auf die beiden austretenden Teilstrahlen aufgeteilt wird. Diesen Zweck erfüllen Strahlteiler. Von den vielen Bauformen sei nur die hier im Labor verwendete erläutert.

Der Strahlteiler hat in diesem Fall die Form eines Würfels, der aus zwei gleichartigen Glasprismen mit dem Grundriß eines gleichschenkeligen, rechtwinkligen Dreiecks zusammengesetzt ist. Die Prismen sind so zusammengeklebt, daß ein Würfel entsteht. Die Flächen, an denen die Prismen zusammengeklebt sind, sind mit einer halbreflektierenden Beschichtung versehen. Ein Lichtstrahl, der durch die Stirnfläche des Würfels in ein Prisma eindringt, trifft auf die halbreflektierende Fläche. Die eine Hälfte des Strahles wird reflektiert, die andere Hälfte des Strahles tritt unabgelenkt durch die Fläche in das zweite Prisma durch und verläßt den Strahlteilerwürfel gegenüber des Eintrittspunktes. Der eine der beiden austretenden Strahlen verläuft auf einer Linie parallel zum eintretenden Strahl, der zweite, reflektierte austretende Strahl steht im rechten Winkel dazu.

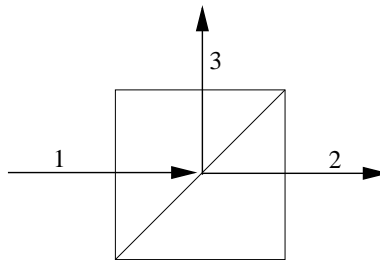


Abbildung 6: Strahlteiler: einfallender (1), transmittierter (2) und reflektierter (3) Strahl bei 90° -Einfall auf den Strahlteiler.

Zu allen im folgenden beschriebenen Meßverfahren ist anzumerken, daß es sich dabei um sogenannte projizierende Verfahren handelt, bei denen die Information einer räumlichen Dichteverteilung auf eine Fläche abgebildet wird. Aus der Abbildung kann nur in speziellen Fällen auf die räumliche Dichteverteilung zurückgeschlossen werden. Um räumliche Strömungsfelder zu vermessen, müssen im allgemeinen tomographische Methoden angewendet werden, auf die hier aber nicht eingegangen werden kann.

Schattenverfahren (shadowgraph method)

Für dieses einfachste Verfahren wird nur ein Schirm und eine annähernd punktförmige Lichtquelle benötigt. Ist der Brechungsindex des Mediums zwischen Lichtquelle und Schirm konstant, so erscheint der Schirm (bei idealer Quelle) gleichmäßig ausgeleuchtet.

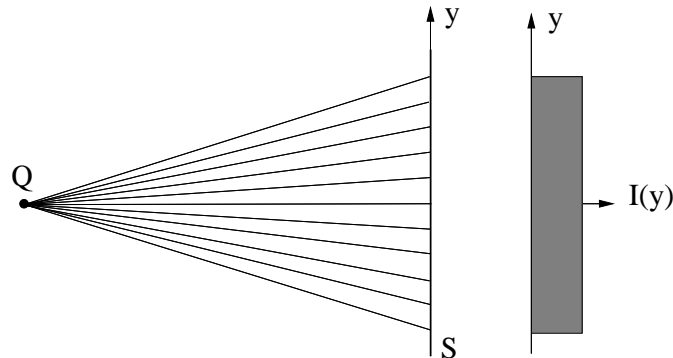


Abbildung 7: Schattenverfahren: Q bezeichnet die Lichtquelle, S den Schirm. Rechts vom Schirm ist schematisch die hier konstante Intensitätsverteilung angegeben.

Bringt man nun zwischen Schirm und Quelle in einer Region O ein Objekt in den Strahlengang, dessen Brechungsindex sich mit dem Ort ändert, so werden die Strahlen, die durch verschiedene Bereiche von O durchtreten, verschieden beeinflusst werden. Der Schirm erscheint nicht mehr gleichmäßig ausgeleuchtet, und die Helligkeitsverteilung gibt Aufschluß über die Brechungsindex- und somit die Dichteverteilung in O.

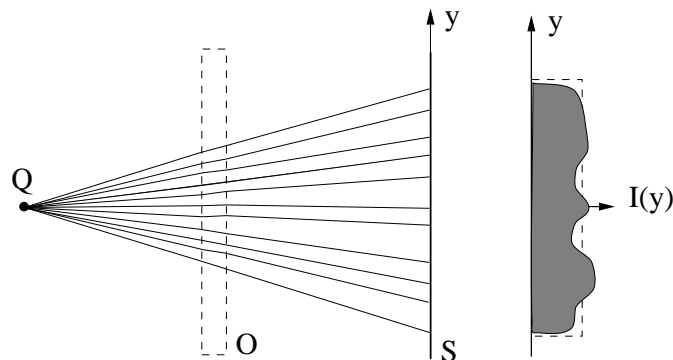


Abbildung 8: Schattenverfahren: In der dünnen Region O zwischen Quelle Q und Schirm S befindet sich ein Objekt variabler Dichte. Die dadurch hervorgerufenen Strahlablenkungen verursachen eine ungleichmäßige Intensitätsverteilung auf dem Schirm.

Beispiel:

Als Beispiel sei folgende Anordnung betrachtet. In der unteren Hälfte von O sei der Brechungsindex n_1 gleich jenem zwischen Quelle und O bzw. zwischen O und Schirm. Hier treten die Strahlen unabgelenkt durch O durch. In der oberen Hälfte sei der Brechungsindex eine linear veränderliche Funktion von y :

$$n_2(y) = n_1 + \alpha y \quad \text{in O für } y > 0$$

mit beliebiger Konstante α . Der Gradient des Brechungsindex ist dann durch

$$\vec{\nabla} n_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix} = \text{const.} \quad \text{in O für } y > 0$$

gegeben.

Zunehmender Brechungsindex ($\alpha > 0$):

Der Gradient des Brechungsindex in O für $y > 0$ ist konstant und näherungsweise normal zur Strahlausbreitungsrichtung nach oben gerichtet. Alle durch diesen Bereich durchtretenden Strahlen erfahren somit eine Ablenkung nach oben um etwa den gleichen Winkel. Damit ergibt sich am Schirm eine Intensitätsverteilung, die in einer gleichmäßig ausgeleuchteten Fläche eine dunkle Linie bei $y = 0$ zeigt, die der Trennlinie zwischen den beiden unterschiedlichen Bereichen in O entspricht und deren Dicke der Differenz α der Brechzahlgradienten in den beiden Bereichen proportional ist.

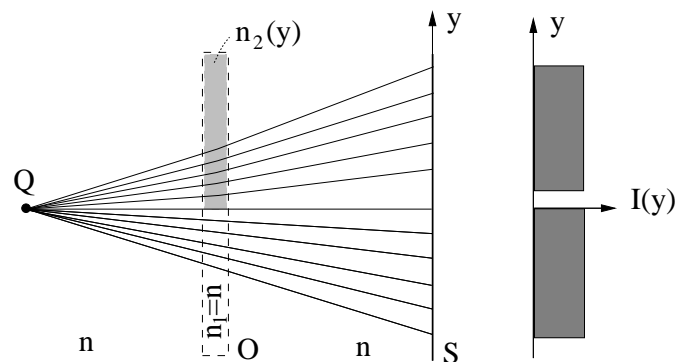


Abbildung 9: Schattenverfahren: In der oberen Hälfte von O ist der Gradient des Brechungsindex konstant und nach oben gerichtet.

Abnehmender Brechungsindex ($\alpha < 0$):

Die Argumentation verläuft ähnlich wie oben, nur daß in der oberen Hälfte von O die Strahlen nach unten abgelenkt werden und ein heller Streifen auf dem Schirm entsteht.

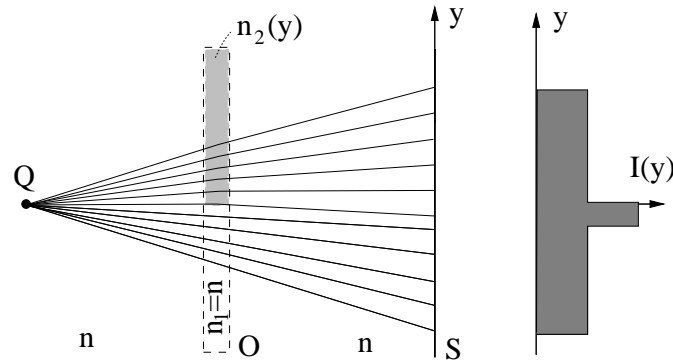


Abbildung 10: Schattenverfahren: In der oberen Hälfte von O ist der Gradient des Brechungsindex konstant und nach unten gerichtet.

Schlierenverfahren (schlieren method)

Das Schattenverfahren macht Dichteunterschiede im Meßobjekt durch die Ablenkung von Lichtstrahlen durch das Objekt sichtbar. Geringe Dichteänderungen werden dadurch aber nur sehr schlecht oder gar nicht erfaßt, weil in diesem Fall der Anteil des vom Objekt abgelenkten Lichtes im Vergleich zum unabgelenkten Licht verschwindend gering und somit die Helligkeitsverschiebungen durch die Strahlablenkungen auf dem Schirm unmeßbar klein sind. Es liegt daher nahe, den vorherrschenden Anteil an unabgelenktem Licht aus dem Schattenbild zu entfernen. Dies ist das Grundprinzip der meisten Schlierenmethoden. Anders als beim Schattenverfahren, wo ein Bild des Objektes durch den Anteil des unabgelenkten Lichtes auf den Schirm projiziert wurde, erfordert das Schlierenverfahren, daß durch Linsen für eine Abbildung des Objekts gesorgt wird, da die beim Schattenverfahren bildformenden unabgelenkten Strahlen hier fehlen oder zumindest stark gedämpft sind.

Die Funktionsweise des Schlierenverfahrens wird im folgenden kurz skizziert. Ein Phasenobjekt O wird mit einem Parallelstrahl durchstrahlt. Entsprechend der Dichteverteilung im Objekt gehen die Strahlen an seiner Rückseite in verschiedene Richtungen. Die Ablenkung eines bestimmten Strahles gibt Aufschluß über die Dichteverteilung an einer bestimmten Stelle im Objekt gibt, wenn feststellbar ist, woher im Objekt dieser Strahl stammt. Dazu ist es nötig, mit einer Linse eine Abbildung des Objektes zu erzeugen.

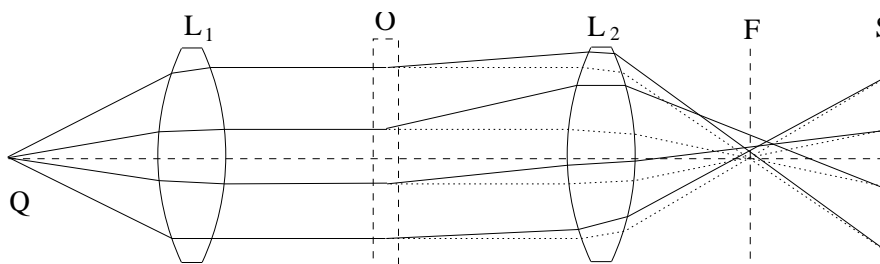


Abbildung 11: Schlierenverfahren: Die Linse L_1 macht aus dem von der punktförmigen Quelle Q kegelförmig ausgehenden Licht einen Parallelstrahl, der im Objekt O abgelenkt wird. Die punktierten Linien nach dem Objekt bezeichnen den Gang des unabgelenkten Parallelstrahles. Die Linse L_2 erzeugt eine Abbildung von O auf S . Im Brennpunkt von L_2 können Strahlen, die vor der Linse in einer vorgegebenen Richtung verlaufen, gezielt manipuliert werden.

Nun werden aber zwischen Linse und Bild in der Brennebene alle Strahlen, die vom Objekt in derselben Richtung abgelenkt werden, im selben Punkt zusammengebracht, gleichgültig, von welcher Stelle des Objekts sie kommen. Somit hat man in der Brennebene die Möglichkeit, alle Strahlen, die in *einer* bestimmten Richtung abgelenkt wurden, einer bestimmten Behandlung zu unterziehen. Dies eröffnet eine Vielzahl von Möglichkeiten, um die vom Objekt verursachten Ablenkungen mit hoher Empfindlichkeit sichtbar zu machen. Dies kann beispielsweise durch verschieden geformte Blenden geschehen, die in die Brennebene der Linse gesetzt werden und nur jene Lichtstrahlen durchlassen, die in einen durch die Blende bestimmten Raumwinkelbereich abgelenkt worden sind. Eine andere Möglichkeit besteht darin, durch Einbringen von Farbfiltern in der Brennebene mehrere Ablenkungsrichtungen gleichzeitig voneinander unterscheidbar sichtbar zu machen, indem beispielsweise von dem vom Objekt nach oben abgelenkten Licht nur der rote, vom nach unten abgelenkten Licht nur der blaue Anteil durchgelassen wird (Farbschlierenverfahren).

Bei den Laborübungen wird nur die sogenannte *Toeplersche Schlierenmethode mit Foucaultschneide* zur Anwendung kommen, eine Blendenmethode, bei der eine Hälfte der Brennebene durch eine scharfe Schneide komplett ausgeblendet wird.

Verläuft die Schneide vertikal und exakt durch die optische Achse, und verdeckt sie die linke Hälfte der Brennebene, so zeigt die Abbildung des Objektes auf dem Schirm nach links ablenkende Bereiche dunkel (von dort kommendes Licht geht durch die linke Hälfte der Brennebene und wird durch die Schneide abgeblockt), nach rechts ablenkende Bereiche erscheinen hell. Will man sichtbar machen, welche Objektbereiche das Licht nach oben oder unten ablenken, muß die Schneide in horizontale Position gedreht werden.

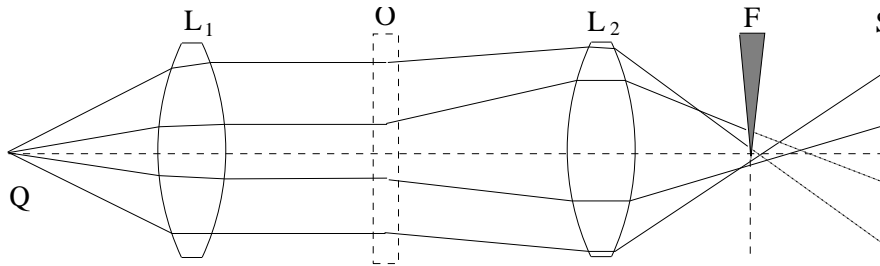


Abbildung 12: Toeplersches Schlierenverfahren mit Foucaultscheide: Das von einer punkt- oder linienförmigen (in diesem Fall erstreckt sich die Lichtquelle entlang der senkrechten auf die Zeichenebene) Lichtquelle Q ausgesandte Licht wird durch die Linse L_1 in einen Parallelstrahl umgewandelt. Dazu muß sich die Lichtquelle im vorderen Brennpunkt der Linse befinden. Der Parallelstrahl durchstrahlt ein Objekt O, durch das das Licht abgelenkt wird. Die Linse L_2 bildet das Objekt auf den Schirm S ab. Zwischen Linse und Schirm wird in der Brennebene F durch eine Schneide eine Hälfte der Brennebene ausgeblendet.

Anders als beim Schattenverfahren muß beim Toeplerschen Schlierenverfahren nicht unbedingt eine punktförmige Lichtquelle verwendet werden. Auch eine linienförmige Lichtquelle kann eingesetzt werden, Quelle und Schneide müssen dann parallel ausgerichtet sein. Die Verwendung einer linienförmigen Lichtquelle ermöglicht eine größere Beleuchtungsstärke, wodurch das Signal-Rausch-Verhältnis verbessert wird.

Die Lichtquelle muß in der vorderen Brennebene der vor dem Objekt gelegenen Linse, die den Parallelstrahl erzeugt, angeordnet sein. Bei Verwendung einer linienförmigen Quelle entsteht dabei genaugenommen kein Parallelstrahl. Ist die Lichtquelle z.B. vertikal ausgerichtet, so ist nur die Projektion der Strahlen auf eine horizontale Ebene zwischen den beiden Linsen parallel zur optischen Achse. In der hinteren Brennebene der zweiten Linse, also dort, wo die Schneide angebracht ist, entsteht ein Bild der Lichtquelle.

Differentielle Interferometrie (differential interferometry)

Welleneigenschaften des Lichtes: Interferenz

Licht hat Eigenschaften einer Wellenerscheinung, von denen hier nur die Interferenz entscheidend ist. Auch die Eigenschaft der Polarisation, die daher rührt, daß es sich bei Licht um transversale Wellen handelt, wird hier nicht berücksichtigt, obwohl darauf hingewiesen wird, daß sie im Zusammenhang mit der Möglichkeit von Interferenz wichtig sein kann.

Unter Vernachlässigung der Polarisation lassen sich die Lichtwellen als skalare Funktionen $\Psi(\vec{x}, t)$ des Ortes und der Zeit schreiben. Um die Interferenz von Lichtwellen zu beschreiben, betrachten wir zuerst eine ebene, monochromatische Welle

$$\Psi(\vec{x}, t) = Ae^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} .$$

A ist die Amplitude der Welle, ω die Kreisfrequenz und \vec{k} der Wellenvektor, der die Ausbreitungsrichtung der Welle bestimmt. Die Wellenlänge, also der Abstand zwischen z.B. zwei benachbarten Wellenbergen, ist $\lambda = 2\pi/|\vec{k}|$. Die ebene, monochromatische Welle entspricht dem idealen Parallelstrahl der geometrischen Optik.

Die beobachtbaren Effekte, die Licht hervorruft, wie z.B. die Schwärzung einer Photoplatte, sind im allgemeinen Funktionen der Intensität $|\Psi(\vec{x}, t)|^2$. Für die ebene Welle gilt

$$|\Psi(\vec{x}, t)|^2 = |A|^2 .$$

Ein wichtiges Grundprinzip der linearen Wellenoptik ist das Superpositionsprinzip für Wellen aufgrund der Linearität der Wellengleichung. Das heißt, daß eine Welle als die Summe von Teilwellen zusammengesetzt werden kann, die selbst Lösungen der Wellengleichung sind. Daraus folgt aber, daß die Gesamtintensität der Welle *nicht* gleich der Summe der Intensitäten der Teilwellen ist, eine Tatsache, die mit dem Begriff Interferenz bezeichnet wird.

Wir betrachten dazu zwei ebene, monochromatische Wellen mit gleicher Frequenz und Amplitude, aber unterschiedlichen Wellenvektoren \vec{k}_1 und \vec{k}_2 . Die Überlagerung dieser Wellen ergibt

$$\Psi(\vec{x}, t) = Ae^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{x} - \omega t)} + Ae^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

mit der Intensität

$$|\Psi(\vec{x}, t)|^2 = 2|A|^2 \left[1 + \cos(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{x} \right] .$$

Somit variiert die Gesamtintensität zwischen dem Maximalwert $4|A|^2$ und dem Minimalwert 0, während die Summe der Intensitäten der Teilwellen $2|A|^2$ ist. Es kommt also entweder zur gegenseitigen Verstärkung oder zur Auslöschung der Wellen an einem bestimmten Ort, je nachdem, welchen Wert das Argument der cos-Funktion an diesem Ort annimmt.

Es sei in kartesischen Koordinaten

$$\vec{k}_{1,2} = \begin{pmatrix} \pm \frac{\pi}{\epsilon} \\ 0 \\ k_z \end{pmatrix} ,$$

also

$$\vec{k}_1 - \vec{k}_2 = \frac{2\pi}{\epsilon} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Das entspricht für $1/\epsilon \ll k$ zwei leicht gegeneinander verkippten Parallelstrahlen. Dann wird die Intensitätsverteilung in einer Ebene $z = 0$ durch

$$|\Psi(\vec{x}, t)|^2 = 2|A|^2 \left[1 + \cos \frac{2\pi x}{\epsilon} \right]$$

beschrieben. Dies entspricht einem Muster von gleichmäßig dicken, zur y-Achse parallelen Streifen.

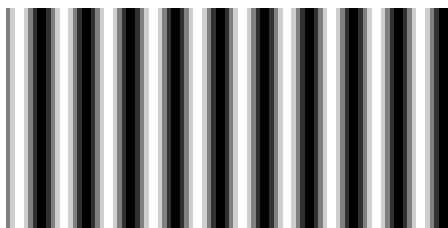


Abbildung 13: Interferenzbild zweier leicht gegeneinander verkippter ebener Wellen

Als zweites betrachten wir eine allgemeinere Welle der Form

$$\Psi(\vec{x}, t) = Ae^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} + \phi(\vec{x}) - \omega t)},$$

wie sie etwa beim Durchgang einer ebenen Welle durch ein Meßobjekt entsteht. Überlagert man dieser Welle eine zweite von exakt gleicher Form, aber um $\vec{\delta}$ im Raum verschoben, wobei $\vec{k} \cdot \vec{\delta} = 0$ gelten soll, so ist die gesamte Welle durch

$$\Psi_g(\vec{x}, t) = \Psi(\vec{x}, t) + \Psi(\vec{x} - \vec{\delta}, t)$$

gegeben. Die Gesamtintensität erhält man als

$$|\Psi_g(\vec{x}, t)|^2 = 2|A|^2 \left[1 + \cos(\phi(\vec{x}) - \phi(\vec{x} - \vec{\delta})) \right].$$

Für kleine Verschiebungen läßt sich $\phi(\vec{x} - \vec{\delta})$ in eine Taylorreihe entwickeln

$$\phi(\vec{x} - \vec{\delta}) = \phi(\vec{x}) - \vec{\delta} \cdot \vec{\nabla} \phi(\vec{x}) + \dots$$

und man bekommt

$$|\Psi_g(\vec{x}, t)|^2 \approx 2|A|^2 \left[1 + \cos(\vec{\delta} \cdot \vec{\nabla} \phi(\vec{x})) \right].$$

Für den gemeinsamen Effekt von Verkipfung und Verschiebung erhält man

$$\Psi_g(\vec{x}, t) = Ae^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{x} - \omega t + \phi(\vec{x}))} + Ae^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{x} - \omega t + \phi(\vec{x} - \vec{\delta}))}$$

und daher für die Intensitätsverteilung

$$|\Psi_g(\vec{x}, t)|^2 \approx 2|A|^2 \left[1 + \cos\{(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{x} + \vec{\delta} \cdot \vec{\nabla} \phi(\vec{x})\} \right].$$

Das beschreibt eine Modulation des Streifenbildes der Überlagerung zweier verkippter ebener Wellen durch $\vec{\delta} \cdot \vec{\nabla} \phi(\vec{x})$.

Betrachtet man nun den Fall eines Parallelstrahls, der o.B.d.A. in z -Richtung durch ein Objekt hindurchtritt, so läßt sich im Falle vernachlässigbarer Strahlablenkung zeigen, daß für die Phase ϕ gilt

$$\phi(\vec{x}) \sim \int_{z_1}^{z_2} \rho(\vec{x}) dz = P(x, y) .$$

z_1 und z_2 sind die Grenzen des Objekts in z -Richtung. Überlagert man die aus dem Objekt austretende Welle mit einer identischen zweiten Welle, die gegen die erste um $\Delta \vec{k} = \frac{2\pi}{\epsilon} (1, 0, 0)^T$ verkippt und um $\vec{\delta} = (\delta_x, \delta_y, 0)^T$ verschoben ist, so erhält man als Bild genau die oben angegebene Intensitätsverteilung. Wegen der Proportionalität zwischen ϕ und der Projektion P von ρ auf die xy -Ebene ist die Modulation des Streifenbildes durch $\vec{\delta} \cdot \vec{\nabla} P$ bestimmt. Aus der Modulation des Streifenbildes kann somit auf $\vec{\nabla} P = \vec{\nabla} \int_{z_1}^{z_2} \rho(\vec{x}) dz$ zurückgeschlossen werden.

Differentialinterferometer

Ein Laser dient als Lichtquelle. Eine Linse mit nachfolgender Blende bewirkt eine kegelförmige Aufweitung des Strahles. Mit einer Linse wird der Strahl dann in einen Parallelstrahl umgewandelt. Wie man sich leicht überlegen kann, muß zu diesem Zweck die Blende der Strahlaufweitung im vorderen Brennpunkt dieser Linse liegen. Der Parallelstrahl wird durch das Objekt geführt. Eine weitere Linse nach dem Objekt bildet dieses auf einen Schirm ab.

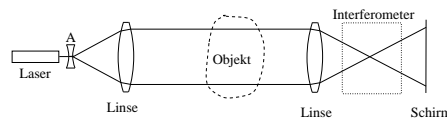


Abbildung 14: Differentialinterferometer: Entstehung der Abbildung. A ist die Strahlaufweiteoptik

Das Kernstück des Meßgeräts, das eigentliche Interferometer, liegt nun zwischen der letzten Linse und dem Bild des Objekts. Seine Aufgabe ist es, den Strahl in zwei gleiche Teile aufzuspalten und diese so wieder zusammensetzen, daß die Teilstrahlen die gleiche Entfernung zurückgelegt haben, aber beliebig gegeneinander verkippt oder normal zur optischen Achse gegeneinander verschoben werden können, sodaß jene Art von Interferenzbildern entstehen kann, die oben besprochen wurde.

Diese Aufteilung der Strahlen erhält man z.B. durch ein Mach-Zehnder-Interferometer, das zwischen Linse und Abbildung in den Strahlengang gesetzt wird. Bei diesem sind zwei Strahlteiler und zwei ebene Spiegel in den Ecken eines Quadrats so aufgestellt, daß die beiden Spiegel und die beiden Strahlteiler sich jeweils in gegenüberliegenden Ecken

befinden. Die Lichtstrahlen folgen den Seiten des Quadrates. Durch Verkippen eines der Spiegel und des zweiten Strahlteilers lassen sich die beiden Teilstrahlen dann in der gewünschten Weise überlagern.

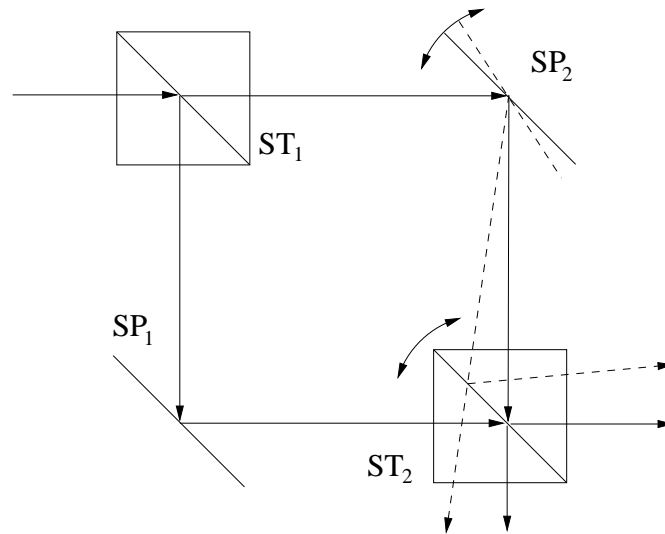


Abbildung 15: Differentialinterferometer: Strahlauftellung durch Mach-Zehnder-Interferometer. Durch Verdrehen des Spiegels SP_2 wird eine Verkippung der Strahlen gegeneinander erreicht.

Weiterführende Literatur

1. H.Oertel, *Optische Strömungsmesstechnik*, Braun, Karlsruhe 1989.
2. M.Born und E.Wolf, *Principles of Optics*, Pergamon, Oxford.
3. M.V.Klein und T.E.Furtak, *Optics*, Wiley & Sons, New York.
4. E. Hecht, *Optik*, Addison-Wesley, 1989.
5. Bergmann/Schäfer (Hrsg.), *Lehrbuch der Experimentalphysik Bd.3: Optik*, de Gruyter, 1993.

Versuche

Bestimmung der Strahlverkipfung ϵ

Für die Helligkeitsverteilung im Interferenzbild gilt ohne Phasenobjekt

$$I \sim 1 + \cos(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{x}.$$

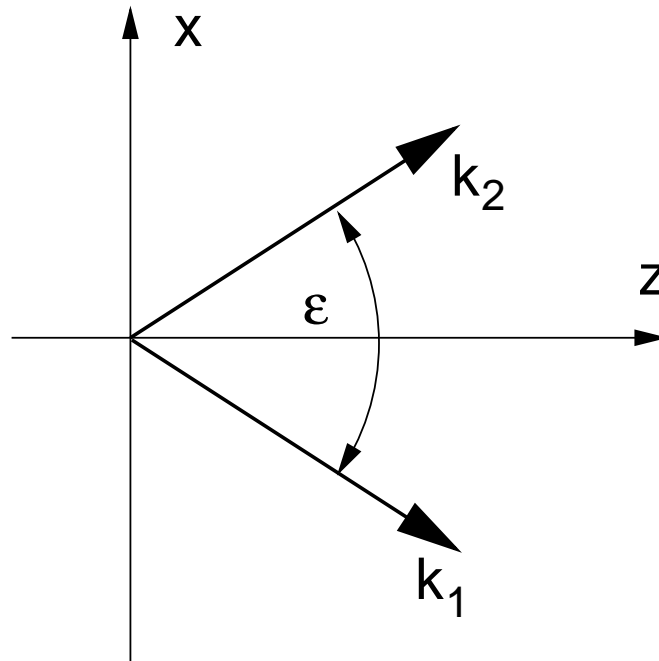


Abbildung 16: Definition der Strahlverkipfung.

Nach Abb. 16 ist

$$\vec{k}_{1,2} = \frac{2\pi}{\lambda} (\mp \sin \frac{\epsilon}{2}, 0, \cos \frac{\epsilon}{2}), \quad \vec{x} = (x, 0, 0)$$

und damit die Helligkeitsverteilung

$$I \sim 1 + \cos \left(\frac{4\pi}{\lambda} x \sin \frac{\epsilon}{2} \right).$$

Das Argument der Cosinus-Funktion ändert sich zwischen zwei aufeinanderfolgenden Streifen an den Stellen x_1 und $x_2 = x_1 + d$ um den Wert 2π . Somit ergibt sich

$$2\pi = \frac{4\pi}{\lambda} d \sin \frac{\epsilon}{2}$$

bzw.

$$\epsilon = 2 \arcsin \frac{\lambda}{2d}.$$

Messen Sie den Abstand d zweier benachbarter Interferenzstreifen und berechnen Sie daraus die Strahlverkipfung.

Wellenlänge des He-Ne-Lasers: $\lambda = 632.8 \text{ nm}$.

$d =$

$\epsilon =$

Einfluß eines Phasenobjektes

Skizzieren Sie das Interferenzbild einer Kerzenflamme bei horizontalen Streifen. In welcher Richtung muß die Bildverschiebung erfolgen, damit ein nennenswerter Effekt erzielt wird? Versuchen Sie, das Entstehen dieses Bildes unter der Annahme zu erklären, daß in der Kerzenflamme eine zylindersymmetrische Temperaturverteilung

$$T(r, z) = a(z) \exp(-r^2/\sigma(z)^2)$$

herrscht.