Natürliche Konvektion

In der LÜ zur natürlichen Konvektion wird mittels differentieller Interferometrie und mittels Schlierenverfahrens die Strömung um verschiedene beheizte Körper sichtbar gemacht. Die Versuchsbedingungen sowie die Ergebnisse der Versuche sollen protokolliert werden. Die ermittelten Daten werden mit theoretischen Abschätzungen verglichen bzw. sollen nicht unmittelbar messbare Größen bestimmt werden.

1 Vertikale Platte

Eine Metallplatte endlicher Ausdehnung wird beheizt. Die Temperatur der Platte wird mit Hilfe eines an der Rückseite angebrachten Widerstandes bestimmt. Die Kalibrierkurve für den Widerstand wird zur Verfügung gestellt.

1.1. Machen Sie die Grenzschicht sichtbar.

1.2. Ist die Strömung laminar oder turbulent?

1.3. Bestimmen Sie die Dicke der Grenzschicht am oberen Ende der Platte sowie

1.4. die Position des Umschlagpunktes.

1.5. Nach Literaturangaben erfolgt der Umschlag von laminarer zu turbulenter Strömung bei einer Rayleighzahl zwischen 10^8 und 10^{10}. Welche Rayleighzahl erhalten Sie für den Umschlagpunkt? Welcher Lauflänge entsprechen die Werte $\mathrm{Ra}_y = 10^8$ bzw. $\mathrm{Ra}_y = 10^{10}$?

Verwenden Sie nun einige der weiter unten angegebenen Beziehungen und

1.6. berechnen Sie die Geschwindigkeit am oberen Ende der Platte. Überprüfen Sie die bei der Ableitung der Beziehungen (1)–(3) getroffenen Annahmen, (a) $\mathrm{M}^2 \ll 1$ und (b) $\mathrm{Gr}_y^{0{,}25} \gg 1$ bzw. $\mathrm{Gr}_y > 10^5$.

Anmerkung: Luft kann als ideales Gas betrachtet werden. Für die Schallgeschwindigkeit ergibt sich somit $c = \sqrt{\varkappa R_\mathrm{L} T}$.

1.7. Vergleichen Sie die nach Gl. (1) erhaltene Dicke der Grenzschicht mit dem tatsächlich gemessenen Wert.

1.8. Berechnen Sie den von der Platte abgegebenen Wärmestrom nach Gl. (3).

Falls die Strömung in einer dünnen Schicht erfolgt, gilt für die Dicke der Grenzschicht (siehe Kap. 5.3.2 in Prandtl [1], Abb. 5.7)

$$\delta/y \approx 4\,\mathrm{Gr}_y^{-1/4} \tag{1}$$

und für die maximale Geschwindigkeit (Abb. 5.6 in Prandtl)

$$u_{\max} \approx 0,55\sqrt{g\beta(T_\mathrm{W} - T_\infty)y}. \tag{2}$$

Die Nußeltzahl, die mit dem mittleren Wärmestrom, $\dot{q}_\mathrm{m} = \int_0^H \dot{q}\,\mathrm{d}y/H$, gebildet wird, beträgt,

$$\mathrm{Nu}_\mathrm{m} = 0,478\,\mathrm{Gr}_H^{1/4}. \tag{3}$$

Baehr & Stephan [2, Kap. 3.9.3] geben eine empirische Korrelation für die mit konstanter Wärmestromdichte beheizte Platte an,

$$\mathrm{Nu}_y = 0,616\,\mathrm{Ra}_y^{1/5}\left(\frac{\mathrm{Pr}}{0,8+\mathrm{Pr}}\right)^{1/5}, \tag{4}$$

wobei hier die Grashofzahl, und dementsprechend die Rayleighzahl, definiert ist durch $\mathrm{Gr}_y = g\beta\dot{q}y^4/\nu^2\lambda$.

2 Horizontaler Draht

Ein dünner Draht wird von elektrischem Strom durchflossen und aufgrund seines hohen ohmschen Widerstandes beheizt. Bei welcher Höhe y erfolgt der Umschlag von laminarer zu turbulenter Strömung? Nach Angaben aus der Literatur [3] erstreckt sich der Bereich des Umschlags von laminarer zu turbulenter Strömung von $\mathrm{Gr}_y^* = 5\cdot 10^8 - 5\cdot 10^9$. Vergleichen Sie diese Angabe mit dem Experiment.

3 Horizontaler Zylinder

Ein Metallzylinder wird von erhitztem Wasser durchflossen und auf eine Temperatur T_W gebracht. Für den Wärmeübergang gilt (Kap. 5.3.3 in Prandtl)

$$\mathrm{Nu}_\mathrm{m} \approx 0,39\,\mathrm{Gr}_d^{1/4}. \tag{5}$$

Der Umschlag in die turbulente Bewegung erfolgt bei $\mathrm{Gr}_y = 3,5\cdot 10^8$.

Eine weitere, empirische Korrelation für die mittlere Nußeltzahl lautet [2]

$$\mathrm{Nu}_\mathrm{m} = \left\{0,6 + 0,387\,\mathrm{Ra}_d^{1/6}\left[1+(0,559/\mathrm{Pr})^{9/16}\right]^{-8/27}\right\}^2.$$

3.1. Machen Sie die Strömung sichtbar.

3.2. Ermitteln Sie die Position des Umschlagpunktes von laminarer zu turbulenter Strömung.

3.3. Berechnen Sie die Grashofzahl für den Umschlagpunkt. Beachten Sie, dass in die Grashofzahl die Lauflänge der Grenzschicht eingeht, die am Zylinder nicht gleich der Höhe ist. Vergleichen Sie Ihre Grashofzahl mit dem oben angegebenen Wert.

3.4. Berechnen Sie mit Hilfe von Gl. (5) den vom Zylinder abgegebenen Wärmestrom.

Notation

Symbole

a	Temperaturleitfähigkeit, $a = \lambda/\rho c_p$ [m^2/s]
c	Schallgeschwindigkeit [m/s]
c_p	isobare spezifische Wärmekapazität [J/kg K]
d	Durchmesser [m]
g	Erdbeschleunigung [m/s^2]
H	Höhe [m]
$\dot{q}$	Wärmestromdichte [W/m^2]
$\dot{q}_\mathrm{m}$	mittlere Wärmestromdichte [W/m^2]
$\dot{Q}$	Wärmestrom pro Längeneinheit [W/m]
R_L	spezielle Gaskonstante der Luft, $R_\mathrm{L} = 287,1$ J/kgK
R_Ω	elektrischer Widerstand [Ohm]
T	Temperatur [K]
T_W	Wandtemperatur [K]
T_∞	Temperatur der ungestörten Strömung [K]
u	Strömungsgeschwindigkeit [m/s]
y	vertikale Koordinate [m/s]
β	isobarer Volumenausdehungskoeffizient (ideales Gas: $\beta = 1/T$) [1/K]
δ	Grenzschichtdicke [m]
$\varkappa$	Isentropenexponent [-]
λ	Wärmeleitfähigkeit [W/m K]
ν	kinematische Viskosität [m^2/s]
ρ	Dichte [kg/m^3]

Kennzahlen

Gr_y	Grashofzahl, $\mathrm{Gr}_y = g\beta(T_\mathrm{W} - T_\infty)y^3/\nu^2$
Gr_y^*	modifizierte Grashofzahl, $\mathrm{Gr}_y^* = g\beta\dot{Q}y^3/(\rho c_p \nu^3)$
M	Machzahl, $\mathrm{M} = u/c$
Nu	Nußeltzahl, $\mathrm{Nu} = \dot{q}y/\lambda(T_\mathrm{W} - T_\infty)$
Nu_m	mittlere Nußeltzahl, $\mathrm{Nu}_m = \dot{q}_\mathrm{m}H/\lambda(T_\mathrm{W} - T_\infty)$, für $\dot{q}_\mathrm{m} = \int_0^H \dot{q}\,\mathrm{d}y/H$
Pr	Prandtlzahl, $\mathrm{Pr} = \nu/a = \nu\rho c_p/\lambda$
Ra	Rayleighzahl, $\mathrm{Ra} = \mathrm{Gr}\,\mathrm{Pr}$

Für die Kennzahlen werden die Stoffwerte bei der mittleren Temperatur der Grenzschicht ausgewertet. Eine Ausnahme ist β, dessen Wert bei der Umgebungstemperatur ermittelt wird.

Literatur

[1] L. Prandtl, K. Oswatitsch und K. Wieghardt. *Führer durch die Strömungslehre* (Vieweg, 1984), 8. Aufl.

[2] H. D. Baehr und K. Stephan. *Wärme- und Stoffübertragung* (Springer, 1996), 2. Aufl.

[3] R. J. Forstrom und E. M. Sparrow. Experiments on the buoyant plume above a heated horizontal wire. *Int. J. Heat Mass Transfer* **10**, 321–331 (1967).

Anhang: Die auftriebserzeugte Grenzschicht an der vertikalen Platte

Eine dünne, vertikale Platte werde auf der konstanten Temperatur T_w gehalten. Die Temperatur und die Dichte des ungestörten Fluids sind T_∞ bzw. ρ_∞. Das Koordinatensystem habe seinen Ursprung an der Unterkante der Platte, die y-Koordinate zeige vertikal nach oben, die x-Koordinate horizontal von der Plattenoberfläche weg.

Wir behandeln im folgenden die zweidimensionale, laminare, stationäre, inkompressible Strömung an der Platte. Es gelten die Kontinuitätsgleichung, die Bewegungsgleichungen in x- und y-Richtung und die Energiegleichung,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{6}$$

$$\rho_\infty \left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \tag{7}$$

$$\rho_\infty \left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \left(\rho(T) - \rho_\infty\right) g, \tag{8}$$

$$\rho_\infty c_p \left(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right). \tag{9}$$

Hier bezeichnet $\tilde{p}$ den reduzierten Druck, $\tilde{p} = p + \rho g y$. Der reduzierte Druck wird allein durch die Strömung bedingt, da der hydrostatische Druckanteil herausgerechnet wurde. Es wird die Boussinesq-Approximation verwendet, d.h., die Dichte wird nur im Auftriebsterm als temperaturabhängig angenommen. Der isobare Ausdehnungskoeffizient,

$$\beta = -\frac{1}{\rho_\infty} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \Bigg|_{x\to\infty}, \tag{10}$$

kann für kleine Temperaturdifferenzen, $(T_\mathrm{w} - T_\infty)/T_\infty \ll 1$, als konstant angenommen werden. Somit erhält man für die Dichte

$$\frac{\rho_\infty - \rho}{\rho_\infty} = -\beta \left(T - T_\infty \right), \tag{11}$$

und die Grundgleichungen werden

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{12}$$

$$\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{1}{\rho_\infty}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \tag{13}$$

$$\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{1}{\rho_\infty}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \beta g \left(T - T_\infty \right), \tag{14}$$

$$\left(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} \right) = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right). \tag{15}$$

Hierbei ist $\nu = \mu/\rho_\infty$ und $a = \lambda/(\rho_\infty c_p)$ verwendet worden. Nun führen wir die folgende Skalierung ein:

$$X = \frac{x\sqrt{\mathrm{Re}}}{l_0} \quad , \quad Y = \frac{y}{l_0}, \tag{16}$$

$$U = \frac{u\sqrt{\mathrm{Re}}}{v_0} \quad , \quad V = \frac{v}{v_0}, \tag{17}$$

$$P = \frac{\tilde{p}}{p_0} \quad , \quad \Theta = \frac{T - T_\infty}{T_\mathrm{w} - T_\infty}. \tag{18}$$

Die Kontinuitätsgleichung und die Bewegungsgleichungen lauten nun

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0, \tag{19}$$

$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(U\frac{\partial U}{\partial X} + V\frac{\partial U}{\partial Y}\right) = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}\right), \tag{20}$$

$$\left(U\frac{\partial V}{\partial X} + V\frac{\partial V}{\partial Y}\right) = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 V}{\partial Y^2}\right) + \frac{\beta g\,(T_\mathrm{w} - T_\infty)\,l_0}{v_0^2}\Theta. \tag{21}$$

Aus der Bewegungsgleichung in X-Richtung folgt

$$\frac{\partial P}{\partial X} = O\left(\frac{1}{\mathrm{Re}}\right), \tag{22}$$

das heißt dass für große Reynoldszahlen der Druck normal zur Platte nur wenig variiert, er wird der Grenzschicht in erster Ordnung von außen aufgeprägt. Daher kann der Druck an jeder Stelle der Grenzschicht nur um $O\,(1/\mathrm{Re})$ vom konstanten Druck im Außenfeld abweichen, also

$$\frac{\partial P}{\partial Y} = O\left(\frac{1}{\mathrm{Re}}\right). \tag{23}$$

Außerdem sehen wir aus der Bewegungsgleichung in y-Richtung, dass

$$\frac{\beta g\,(T_\mathrm{w} - T_\infty)\,l_0}{v_0^2} = \frac{\mathrm{Gr}}{\mathrm{Re}^2} = O(1) \tag{24}$$

gelten muss, damit der Auftriebsterm, der Trägheitsterm und der viskose Term von derselben Größenordnung sind, wobei

$$\mathrm{Gr} = \frac{\beta g\,(T_\mathrm{w} - T_\infty)\,l_0^3}{\nu^2} \tag{25}$$

die Grashofzahl (Verhältnis aus Auftriebskraft zu Reibungskraft) ist. Damit liegt als Bezugsgeschwindigkeit folgende Wahl nahe:

$$v_0 = \sqrt{\beta g\,(T_\mathrm{w} - T_\infty)\,l_0}. \tag{26}$$

Wendet man die obige Skalierung auf die Energiegleichung an, erhält man

$$U\frac{\partial\Theta}{\partial X}+V\frac{\partial\Theta}{\partial Y}=\frac{1}{\mathrm{Pr}}\left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial X^2}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2\Theta}{\partial Y^2}\right), \tag{27}$$

wobei $\mathrm{Pr}=\nu/a$ die Prandtlzahl ist. Das Gleichungssystem lautet schließlich für große Reynoldszahlen (Grenzschichtnäherung für $\mathrm{Re}\to\infty$)

$$\frac{\partial U}{\partial X}+\frac{\partial V}{\partial Y} = 0, \tag{28}$$

$$\frac{\partial P}{\partial X} = 0, \tag{29}$$

$$\left(U\frac{\partial V}{\partial X}+V\frac{\partial V}{\partial Y}\right) = \frac{\partial^2 V}{\partial X^2}+\Theta, \tag{30}$$

$$U\frac{\partial\Theta}{\partial X}+V\frac{\partial\Theta}{\partial Y} = \frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial^2\Theta}{\partial X^2}. \tag{31}$$

Die Randbedingungen sind:

$$\text{Haftbedingung,}\quad X=0: \quad U=0,\ V=0; \tag{32}$$

$$\text{Wandtemperatur,}\quad X=0: \quad \Theta=1; \tag{33}$$

$$\text{Anpassungsbedingung,}\quad X\to\infty: \quad V\to 0,\ \Theta\to 0 \tag{34}$$

Das Einführen einer Stromfunktion

$$\frac{\partial\Psi}{\partial X} = V, \tag{35}$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial Y} = -U \tag{36}$$

führt zu den Gleichungen

$$\frac{\partial\Psi}{\partial X}\frac{\partial^2\Psi}{\partial X\partial Y}-\frac{\partial\Psi}{\partial Y}\frac{\partial^2\Psi}{\partial X^2} = \frac{\partial^3\Psi}{\partial X^3}+\Theta, \tag{37}$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial X}\frac{\partial\Theta}{\partial Y}-\frac{\partial\Psi}{\partial Y}\frac{\partial\Theta}{\partial X} = \frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial^2\Theta}{\partial X^2}. \tag{38}$$

Die Randbedingungen werden zu:

$$X=0: \quad \frac{\partial\Psi}{\partial X}=\frac{\partial\Psi}{\partial Y}=0, \qquad \Theta=1; \tag{39}$$

$$X\to\infty: \quad \frac{\partial\Psi}{\partial X}\to 0, \qquad \Theta\to 0. \tag{40}$$

Unter Zuhilfenahme der Ähnlichkeitsvariable

$$\eta=\frac{X}{(4Y)^{1/4}}=\left(\frac{\mathrm{Gr}_y}{4}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{x}{y} \tag{41}$$

kann man die y-Abhängigkeit der Lösung mit dem folgenden Ansatz abspalten:

$$\Psi(X,Y) = F(\eta) * (4Y)^{\frac{3}{4}}, \tag{42}$$
$$\Theta(X,Y) = H(\eta). \tag{43}$$

Die partiellen Differentialgleichungen werden somit zu gewöhnlichen,

$$\frac{\mathrm{d}^3F}{\mathrm{d}\eta^3} + 3F\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}\eta^2} - 2\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\eta}\right)^2 + H = 0, \tag{44}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2H}{\mathrm{d}\eta^2} + 3\mathrm{Pr}F\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\eta} = 0. \tag{45}$$

Die zugehörigen Randbedingungen lauten:

$$\eta = 0: \qquad F = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\eta} = 0, \qquad H = 1; \tag{46}$$
$$\eta \to \infty: \qquad \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\eta} \to 0, \qquad H \to 0. \tag{47}$$

Verwendet man nun das Wärmeleitungsgesetz von Fourier,

$$q_\mathrm{w} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=0} \tag{48}$$

um die Wärmestromdichte an der Wand zu berechnen, ergibt sich

$$q_\mathrm{w} = -\lambda \left(\frac{\beta g\,(T_\mathrm{w} - T_\infty)}{4\nu^2}\right)^{\frac{1}{4}} y^{-\frac{1}{4}} \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\eta}\,(0)\,(T_\mathrm{w} - T_\infty). \tag{49}$$

Mit der Definition der lokalen Nußeltzahl

$$\mathrm{Nu}_y = \frac{q_\mathrm{w} y}{\lambda\,(T_\mathrm{w} - T_\infty)} \tag{50}$$

erhält man weiters

$$\mathrm{Nu}_y = -\left(\frac{\mathrm{Gr}_y}{4}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\eta}\,(0)\,, \tag{51}$$

wobei der Faktor $-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\eta}\,(0)$ nur noch eine Funktion der Prandtlzahl ist und für $\mathrm{Pr} \approx 1$ den Wert $0,41$ hat.

Aus Experimenten wird für den Umschlag von laminarer in eine turbulente Strömung ($\mathrm{Pr} \approx 1$) folgende kritische Grashofzahl ($\mathrm{Gr}_y^\mathrm{krit}$) angegeben:

$$\mathrm{Gr}_y^\mathrm{krit} \approx 10^8 - 10^9. \tag{52}$$