Natural Convection

The flow around various heated bodies is made visible with differential inerferometry and with a Schlieren method. A report on the experiments shall be made. The measured data shall be compared with available data from literature or with theoretical estimates. Also, quantities shall be determined which are not directly measureable.

1 Vertical plate

A metal plate of finite dimension is heated. The temperature of the plate is determined by a resistance wire which is attached to the back of the plate. The calibration curve relating resistance to temperature will be provided.

1.1. Make the boundary layer visible.

1.2. Is the flow laminar or turbulent?

1.3. Determine the thickness of the boundary layer at the top edge of the plate and

1.4. the position of the transition point from laminar to turbulent flow.

1.5. The transition from laminar to turbulent flow occurs for a Rayleigh number betwen 10^8 und 10^{10}. Which Rayleigh number do you obtain for the transition point? To which positions correspond the values $\mathrm{Ra}_y = 10^8$ or $\mathrm{Ra}_y = 10^{10}$, respectively?

To answer the following questions, use some of the relations given further below.

1.6. Calculate the speed of the air at the top edge of the plate. Check the assumptions made in deducing eqs. (1)–(3), viz. (i) $\mathrm{M}^2 \ll 1$ and (ii) $\mathrm{Gr}_y^{0.25} \gg 1$ or $\mathrm{Gr}_y > 10^5$.

   Note: Air can be assumed to be a ideal gas. Hence, the speed of sound is given by $c = \sqrt{\gamma R_\mathrm{L} T}$.

1.7. Compare the thickness of the boundary layer given by eq. (1) with the measured value.

1.8. Calculate the heat flow emitted by the plate.

If the flow is confined to a thin layer, the thickness of the boundary layer is given by (see chap. 5.3.2 in Prandtl [1], Fig. 5.7)

$$\delta/y \approx 4\,\mathrm{Gr}_y^{-1/4} \tag{1}$$

and the maximum velocity is (Fig. 5.6 in Prandtl)

$$u_{\max} \approx 0.55\sqrt{g\beta(T_\mathrm{W}-T_\infty)y}. \tag{2}$$

The Nusselt number for the mean heat flux, $\dot{q}_\mathrm{m} = \int_0^H \dot{q}\,\mathrm{d}y/H$, is given by

$$\mathrm{Nu}_\mathrm{m} = 0.478\,\mathrm{Gr}_H^{1/4}. \tag{3}$$

Baehr & Stephan [2, chap. 3.9.3] also give an empirical correlation for a plate heated with constant heat flux,

$$\mathrm{Nu}_y = 0.616\,\mathrm{Ra}_y^{1/5}\left(\frac{\mathrm{Pr}}{0.8+\mathrm{Pr}}\right)^{1/5}. \tag{4}$$

Here, the Grashof number and accordingly the Rayleigh number is defined by $\mathrm{Gr}_y = g\beta\dot{q}y^4/\nu^2\lambda$.

2 Horizontal wire

A thin horizontal wire is heated by an electrical current. What is the height y at which the transition from laminar to turbulent flow occurs? In literature [3], the range of the transition point is given to liee between $\mathrm{Gr}_y^* = 5\cdot 10^8$ and $5\cdot 10^9$. Compare the literature data with your experimental values.

3 Horizontal cylinder

A metal cylinder is heated by circulating water through the cylinder. The heat transfer obeys (chap. 5.3.3 in Prandtl)

$$\mathrm{Nu}_\mathrm{m} \approx 0.39\,\mathrm{Gr}_d^{1/4}. \tag{5}$$

The transition to turbulent flow takes place at $\mathrm{Gr}_y = 3.5\cdot 10^8$.

Another empirical correlation for the mean Nusselt number is [2]

$$\mathrm{Nu}_\mathrm{m} = \left\{0.6 + 0.387\,\mathrm{Ra}_d^{1/6}\left[1+(0.559/\mathrm{Pr})^{9/16}\right]^{-8/27}\right\}^2.$$

3.1. Make the flow visible.

3.2. Determine the position of the transition point from laminar to turbulent flow.

3.3. Calculate the Grashof number for the transition point. Pay attention that the Grashof number is calculated from the length of the boundary layer, which at the cylinder is not equal to the height. Compare your Grashof number with the value given above.

3.4. Calculate the heat flow emitted from the cylinder, using eq. (5).

Notation

Symbols

a	thermal diffusivity, $a = \lambda/\rho c_p$ [m^2/s]
c	speed of sound [m/s]
c_p	isobaric spezific heat capacity [J/kg K]
d	diameter [m]
g	gravitational acceleration [m/s^2]
H	height [m]
$\dot{q}$	heat flux [W/m^2]
$\dot{q}_\mathrm{m}$	mean heat flux [W/m^2]
$\dot{Q}$	heat flow rate per unit length [W/m]
R_L	gas constant for air, $R_\mathrm{L} = 287.1$ J/kg K
R_Ω	electric resistance [Ohm]
T	temperature [K]
T_W	wall temperature [K]
T_∞	temperature of the undisturbed flow [K]
u	velocity [m/s]
y	vertical coordinate [m/s]
β	isobaric volume expansivity (ideal gas: $\beta = 1/T$) [1/K]
δ	boundary layer thickness [m]
γ	ratio of specific heat capacities [-]
λ	thermal conductivity [W/m K]
ν	kinematic viscosiy [m^2/s]
ρ	density [kg/m^3]

Dimensionless groups

Gr_y	Grashof number, $\mathrm{Gr}_y = g\beta(T_\mathrm{W} - T_\infty)y^3/\nu^2$
Gr_y^*	modified Grashof number, $\mathrm{Gr}_y^* = g\beta\dot{Q}y^3/(\rho c_p \nu^3)$
M	Mach number, $\mathrm{M} = u/c$
Nu	Nusselt number, $\mathrm{Nu} = \dot{q}y/\lambda(T_\mathrm{W} - T_\infty)$
Nu_m	mean Nusselt number, $\mathrm{Nu}_m = \dot{q}_\mathrm{m}H/\lambda(T_\mathrm{W} - T_\infty)$, for $\dot{q}_\mathrm{m} = \int_0^H \dot{q}\,\mathrm{d}y/H$
Pr	Prandtl number, $\mathrm{Pr} = \nu/a = \nu\rho c_p/\lambda$
Ra	Rayleigh number, $\mathrm{Ra} = \mathrm{Gr}\,\mathrm{Pr}$

References

[1] L. Prandtl, K. Oswatitsch und K. Wieghardt. *Führer durch die Strömungslehre* (Vieweg, 1984), 8. Aufl.

[2] H. D. Baehr und K. Stephan. *Wärme- und Stoffübertragung* (Springer, 1996), 2. Aufl.

[3] R. J. Forstrom und E. M. Sparrow. Experiments on the buoyant plume above a heated horizontal wire. *Int. J. Heat Mass Transfer* **10**, 321–331 (1967).

Anhang: Die auftriebserzeugte Grenzschicht an der vertikalen Platte

Eine dünne, vertikale Platte werde auf der konstanten Temperatur T_w gehalten. Die Temperatur und die Dichte des ungestörten Fluids sind T_∞ bzw. ρ_∞. Das Koordinatensystem habe seinen Ursprung an der Unterkante der Platte, die y-Koordinate zeige vertikal nach oben, die x-Koordinate horizontal von der Plattenoberfläche weg.

Wir behandeln im folgenden die zweidimensionale, laminare, stationäre, inkompressible Strömung an der Platte. Es gelten die Kontinuitätsgleichung, die Bewegungsgleichungen in x- und y-Richtung und die Energiegleichung,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, && (6)\\
\rho_\infty \left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), && (7)\\
\rho_\infty \left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \left(\rho(T) - \rho_\infty\right) g, && (8)\\
\rho_\infty c_p \left(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} \right) &= \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right). && (9)
\end{aligned}
$$

Hier bezeichnet $\tilde{p}$ den reduzierten Druck, $\tilde{p} = p + \rho g y$. Der reduzierte Druck wird allein durch die Strömung bedingt, da der hydrostatische Druckanteil herausgerechnet wurde. Es wird die Boussinesq-Approximation verwendet, d.h., die Dichte wird nur im Auftriebsterm als temperaturabhängig angenommen. Der isobare Ausdehnungskoeffizient,

$$\beta = -\frac{1}{\rho_\infty} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \Bigg|_{x \to \infty}, \tag{10}$$

kann für kleine Temperaturdifferenzen, $(T_\mathrm{w} - T_\infty)/T_\infty \ll 1$, als konstant angenommen werden. Somit erhält man für die Dichte

$$\frac{\rho_\infty - \rho}{\rho_\infty} = -\beta \left(T - T_\infty \right), \tag{11}$$

und die Grundgleichungen werden

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, && (12)\\
\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{1}{\rho_\infty}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), && (13)\\
\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{1}{\rho_\infty}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \beta g \left(T - T_\infty \right), && (14)\\
\left(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} \right) &= a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right). && (15)
\end{aligned}
$$

Hierbei ist $\nu = \mu/\rho_\infty$ und $a = \lambda/(\rho_\infty c_p)$ verwendet worden. Nun führen wir die folgende Skalierung ein:

$$X = \frac{x\sqrt{\mathrm{Re}}}{l_0} \quad , \quad Y = \frac{y}{l_0}, \tag{16}$$

$$U = \frac{u\sqrt{\mathrm{Re}}}{v_0} \quad , \quad V = \frac{v}{v_0}, \tag{17}$$

$$P = \frac{\tilde{p}}{p_0} \quad , \quad \Theta = \frac{T - T_\infty}{T_\mathrm{w} - T_\infty}. \tag{18}$$

Die Kontinuitätsgleichung und die Bewegungsgleichungen lauten nun

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0, \tag{19}$$

$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(U\frac{\partial U}{\partial X} + V\frac{\partial U}{\partial Y}\right) = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}\right), \tag{20}$$

$$\left(U\frac{\partial V}{\partial X} + V\frac{\partial V}{\partial Y}\right) = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 V}{\partial Y^2}\right) + \frac{\beta g\,(T_\mathrm{w} - T_\infty)\,l_0}{v_0^2}\Theta. \tag{21}$$

Aus der Bewegungsgleichung in X-Richtung folgt

$$\frac{\partial P}{\partial X} = O\left(\frac{1}{\mathrm{Re}}\right), \tag{22}$$

das heißt dass für große Reynoldszahlen der Druck normal zur Platte nur wenig variiert, er wird der Grenzschicht in erster Ordnung von außen aufgeprägt. Daher kann der Druck an jeder Stelle der Grenzschicht nur um $O\,(1/\mathrm{Re})$ vom konstanten Druck im Außenfeld abweichen, also

$$\frac{\partial P}{\partial Y} = O\left(\frac{1}{\mathrm{Re}}\right). \tag{23}$$

Außerdem sehen wir aus der Bewegungsgleichung in y-Richtung, dass

$$\frac{\beta g\,(T_\mathrm{w} - T_\infty)\,l_0}{v_0^2} = \frac{\mathrm{Gr}}{\mathrm{Re}^2} = O(1) \tag{24}$$

gelten muss, damit der Auftriebsterm, der Trägheitsterm und der viskose Term von derselben Größenordnung sind, wobei

$$\mathrm{Gr} = \frac{\beta g\,(T_\mathrm{w} - T_\infty)\,l_0^3}{\nu^2} \tag{25}$$

die Grashofzahl (Verhältnis aus Auftriebskraft zu Reibungskraft) ist. Damit liegt als Bezugsgeschwindigkeit folgende Wahl nahe:

$$v_0 = \sqrt{\beta g\,(T_\mathrm{w} - T_\infty)\,l_0}. \tag{26}$$

Wendet man die obige Skalierung auf die Energiegleichung an, erhält man

$$U\frac{\partial\Theta}{\partial X}+V\frac{\partial\Theta}{\partial Y}=\frac{1}{\mathrm{Pr}}\left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial X^2}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2\Theta}{\partial Y^2}\right), \tag{27}$$

wobei $\mathrm{Pr}=\nu/a$ die Prandtlzahl ist. Das Gleichungssystem lautet schließlich für große Reynoldszahlen (Grenzschichtnäherung für $\mathrm{Re}\to\infty$)

$$\frac{\partial U}{\partial X}+\frac{\partial V}{\partial Y} = 0, \tag{28}$$

$$\frac{\partial P}{\partial X} = 0, \tag{29}$$

$$\left(U\frac{\partial V}{\partial X}+V\frac{\partial V}{\partial Y}\right) = \frac{\partial^2 V}{\partial X^2}+\Theta, \tag{30}$$

$$U\frac{\partial\Theta}{\partial X}+V\frac{\partial\Theta}{\partial Y} = \frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial^2\Theta}{\partial X^2}. \tag{31}$$

Die Randbedingungen sind:

$$\text{Haftbedingung,}\quad X=0: \qquad U=0,\ V=0; \tag{32}$$

$$\text{Wandtemperatur,}\quad X=0: \qquad \Theta=1; \tag{33}$$

$$\text{Anpassungsbedingung,}\quad X\to\infty: \qquad V\to 0,\ \Theta\to 0 \tag{34}$$

Das Einführen einer Stromfunktion

$$\frac{\partial\Psi}{\partial X} = V, \tag{35}$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial Y} = -U \tag{36}$$

führt zu den Gleichungen

$$\frac{\partial\Psi}{\partial X}\frac{\partial^2\Psi}{\partial X\partial Y}-\frac{\partial\Psi}{\partial Y}\frac{\partial^2\Psi}{\partial X^2} = \frac{\partial^3\Psi}{\partial X^3}+\Theta, \tag{37}$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial X}\frac{\partial\Theta}{\partial Y}-\frac{\partial\Psi}{\partial Y}\frac{\partial\Theta}{\partial X} = \frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial^2\Theta}{\partial X^2}. \tag{38}$$

Die Randbedingungen werden zu:

$$X=0: \qquad \frac{\partial\Psi}{\partial X}=\frac{\partial\Psi}{\partial Y}=0, \qquad \Theta=1; \tag{39}$$

$$X\to\infty: \qquad \frac{\partial\Psi}{\partial X}\to 0, \qquad \Theta\to 0. \tag{40}$$

Unter Zuhilfenahme der Ähnlichkeitsvariable

$$\eta=\frac{X}{(4Y)^{1/4}}=\left(\frac{\mathrm{Gr}_y}{4}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{x}{y} \tag{41}$$

kann man die y-Abhängigkeit der Lösung mit dem folgenden Ansatz abspalten:

$$\Psi(X,Y) = F(\eta) * (4Y)^{\frac{3}{4}}, \tag{42}$$

$$\Theta(X,Y) = H(\eta). \tag{43}$$

Die partiellen Differentialgleichungen werden somit zu gewöhnlichen,

$$\frac{\mathrm{d}^3F}{\mathrm{d}\eta^3} + 3F\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}\eta^2} - 2\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\eta}\right)^2 + H = 0, \tag{44}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2H}{\mathrm{d}\eta^2} + 3\mathrm{Pr}F\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\eta} = 0. \tag{45}$$

Die zugehörigen Randbedingungen lauten:

$$\eta = 0: \qquad F = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\eta} = 0, \qquad H = 1; \tag{46}$$

$$\eta \to \infty: \qquad \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\eta} \to 0, \qquad H \to 0. \tag{47}$$

Verwendet man nun das Wärmeleitungsgesetz von Fourier,

$$q_\mathrm{w} = -\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=0} \tag{48}$$

um die Wärmestromdichte an der Wand zu berechnen, ergibt sich

$$q_\mathrm{w} = -\lambda\left(\frac{\beta g\,(T_\mathrm{w} - T_\infty)}{4\nu^2}\right)^{\frac{1}{4}} y^{-\frac{1}{4}}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\eta}\,(0)\,(T_\mathrm{w} - T_\infty). \tag{49}$$

Mit der Definition der lokalen Nußeltzahl

$$\mathrm{Nu}_y = \frac{q_\mathrm{w}y}{\lambda\,(T_\mathrm{w} - T_\infty)} \tag{50}$$

erhält man weiters

$$\mathrm{Nu}_y = -\left(\frac{\mathrm{Gr}_y}{4}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\eta}\,(0)\,, \tag{51}$$

wobei der Faktor $-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\eta}\,(0)$ nur noch eine Funktion der Prandtlzahl ist und für $\mathrm{Pr} \approx 1$ den Wert $0,41$ hat.

Aus Experimenten wird für den Umschlag von laminarer in eine turbulente Strömung ($\mathrm{Pr} \approx 1$) folgende kritische Grashofzahl ($\mathrm{Gr}_y^{\mathrm{krit}}$) angegeben:

$$\mathrm{Gr}_y^{\mathrm{krit}} \approx 10^8 - 10^9. \tag{52}$$