Prüfung aus Grundlagen der Thermodynamik 30. 5. 2008

2) An einen evakuierten adiabaten Kessel ($p_{\mathrm{K}0} = 0$, $\rho_{\mathrm{K}0} = 0$) mit dem Volumen V_K wird eine sehr lange Druckleitung, in der sich ein ideales Gas konstanter spezifischer Wärmekapazitäten c_p, c_v mit der Temperatur T_L und dem Druck p_L befindet, angeschlossen. Das Ventil der Leitung wird für eine bestimmte Zeit sehr wenig geöffnet, sodaß Gas in den Kessel einströmen kann. Nach dem Schließen des Ventils beträgt der Druck im Kessel $p_{\mathrm{K}1}$. Man berechne die Temperatur $T_{\mathrm{K}1}$ und die Dichte $\rho_{\mathrm{K}1}$ des Gases im Kessel.

Hinweis: Man erstelle Massen- und Energiebilanz für ein System mit konstanter Masse. Die Systemgrenze lege man in der Druckleitung hinreichend weit weg vom Ventil. Die Temperatur und der Druck bleibe in der Druckleitung während des Füllvorganges konstant. Reibung und Wärmeleitung am Ventil seien vernachlässigbar.

Lösung:

Massenerhaltung: Verringerung des Volumens des Gesamtsystems von V_0 auf V_1 durch Einströmen der Masse m_K in den Kessel

$$\rho_\mathrm{L}(V_0 - V_1) = m_\mathrm{K} = \rho_{\mathrm{K}1} V_\mathrm{K}$$

1. HS für geschlossenes System:

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d_e}W + \mathrm{d_e}Q$$

wobei

$$\mathrm{d_e}Q = 0 \quad \text{(adiabat)}$$

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}U_\mathrm{K} = m_\mathrm{K} c_v (T_{\mathrm{K}1} - T_\mathrm{L}) \quad \text{(nur Gas im Kessel ändert seine innere Energie)}$$

$$\mathrm{d_e}W = -p_\mathrm{L}(V_1 - V_0)$$

Daraus folgt mit der idealen Gasgleichung

$$\rho_{\mathrm{K}1} V_\mathrm{K} c_v (T_{\mathrm{K}1} - T_\mathrm{L}) = p_\mathrm{L} V_\mathrm{K} \frac{\rho_{\mathrm{K}1}}{\rho_\mathrm{L}}$$

$$T_{\mathrm{K}1} = \kappa T_\mathrm{L}$$

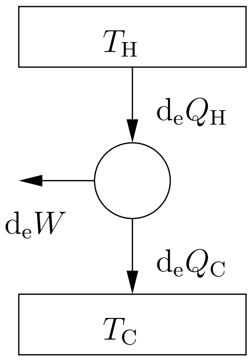
$$\frac{p_{\mathrm{K}1}}{\rho_{\mathrm{K}1}} = (c_p - c_v) T_{\mathrm{K}1}$$

$$\rho_{\mathrm{K}1} = \frac{p_{\mathrm{K}1}\rho_\mathrm{L}}{\kappa p_\mathrm{L}} = \frac{p_{\mathrm{K}1}}{c_p(\kappa - 1) T_\mathrm{L}}$$

3) Eine reversibel arbeitende Wärmekraftmaschine arbeitet zwischen zwei endlichen Körpern (siehe Skizze) mit den Anfangstemperaturen $T_{\mathrm{H},0}$ und $T_{\mathrm{C},0}$ ($T_{\mathrm{H},0} > T_{\mathrm{C},0}$). Die Körper haben die Wärmekapazitäten $C_{p\mathrm{H}}$ und $C_{p\mathrm{C}}$. Im Laufe des Prozesses sinkt die Temperatur T_{H}, während die Temperatur T_{C} steigt.

a) Geben Sie die von der Maschine abgegebene Arbeit W_{01} für eine bestimmte Endtemperatur $T_{\mathrm{H},1}$ als Funktion von $T_{\mathrm{H},0}$,$T_{\mathrm{C},0}$,$C_{p\mathrm{H}}$,$C_{p\mathrm{C}}$ sowie $T_{\mathrm{H},1}$ an.

b) Wie groß ist die kleinste erreichbare Temperatur $T_{\mathrm{H,min}}$?



Lösung:

a) 1. HS Maschine:

$$-\mathrm{d_e}W_0 - \mathrm{d_e}Q_{\mathrm{ab}} + \mathrm{d_e}Q_{\mathrm{zu}} = 0$$

2. HS Maschine für infinitesimalen Durchlauf:

$$\mathrm{d}S = \underbrace{\mathrm{d_e}S}_{\frac{\mathrm{d_e}Q}{T}} + \underbrace{\mathrm{d_i}S}_{=0,\,\text{reversibel}} = 0 \quad \text{(Kreisprozess)}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d_e}Q_{\mathrm{zu}}}{T_{\mathrm{zu}}} - \frac{\mathrm{d_e}Q_{\mathrm{ab}}}{T_{\mathrm{ab}}} = 0 \qquad \text{mit } T_{\mathrm{zu}} = T_{\mathrm{H}},\ T_{\mathrm{ab}} = T_{\mathrm{C}}.$$

1. HS Körper:

$$\text{H:} \quad \mathrm{d}H = C_{p\mathrm{H}}\mathrm{d}T_{\mathrm{H}} = -\mathrm{d_e}Q_{\mathrm{zu}} < 0 \qquad \text{C:} \quad \mathrm{d}H = C_{p\mathrm{C}}\mathrm{d}T_{\mathrm{C}} = \mathrm{d_e}Q_{\mathrm{ab}} > 0$$

$$\Rightarrow T_{\mathrm{C},1} = T_{\mathrm{C},0}\left(\frac{T_{\mathrm{H},0}}{T_{\mathrm{H},1}}\right)^{C_{p\mathrm{H}}/C_{p\mathrm{C}}},$$

$$\mathrm{d_e}W = -\eta_{\mathrm{C}}\mathrm{d_e}Q_{\mathrm{zu}}, \quad \Rightarrow W_{01} = -C_{p\mathrm{H}}\left(T_{\mathrm{H},0} - T_{\mathrm{H},1}\right) + C_{p\mathrm{C}}T_{\mathrm{C},0}\left[\left(\frac{T_{\mathrm{H},0}}{T_{\mathrm{H},1}}\right)^{C_{p\mathrm{H}}/C_{p\mathrm{C}}} - 1\right] < 0$$

b) Es gilt $T_{\mathrm{H}} = T_{\mathrm{H,min}}$, wenn

$$T_{\mathrm{H,min}} = T_{\mathrm{C},1} = T_{\mathrm{H},1} \qquad \Rightarrow T_{\mathrm{H,min}} = T_{\mathrm{C},0}^{\frac{C_{p\mathrm{C}}}{C_{p\mathrm{C}}+C_{p\mathrm{H}}}}\, T_{\mathrm{H},0}^{\frac{C_{p\mathrm{H}}}{C_{p\mathrm{C}}+C_{p\mathrm{H}}}}$$

4) In einem Kreisprozess durchläuft Wasser ausgehend vom Zustand siedender Flüssigkeit folgende Teilprozesse:

$1 \rightarrow 2$ adiabate Drosselung von $p_1 = 23{,}198$ bar auf $p_2 = 6{,}181$ bar;

$2 \rightarrow 3$ teilweise, isobare Verdampfung;

$3 \rightarrow 4$ adiabate (nicht reversible) Überhitzung bis p_1;

$4 \rightarrow 1$ Vollständige, isobare Kondensation.

a) Skizzieren diesen Kreisprozess in einem T,s-Diagramm. Zeichnen Sie die zu- bzw. abgeführten Wärmemengen ein.

b) Berechnen Sie die Änderung der spezifischen inneren Energie bei der Zustandsänderung von Zustand 1 nach Zustand 2: $u_2 - u_1$.

c) Wie groß sind h_3 und h_4, wenn der Kreisprozess (Kältemaschine) eine Leistungszahl von $\varepsilon_K = 3{,}11$ aufweist und pro kg Wasser eine Arbeit von $w_0 = 500$ kJ/kg aufgewendet wird?

d) Berechnen Sie die pro kg Wasser zu- bzw. abgeführten Wärmemengen q_{zu} bzw. q_{ab}.

Dampftafel für Wasser

ϑ °C	p bar	v' dm³/kg	v'' m³/kg	h' kJ/kg	h'' kJ/kg	r kJ/kg
160	6,181	1,1022	0,3068	675,5	2756,7	2081,2
220	23,198	1,190	0,08604	943,7	2799,9	1856,2

Lösung:

b) Die Drosselung ist ein isenthalper Vorgang, $h_2 = h_1 = h_1'$, somit $u_2 + p_2v_2 = u_1 + p_1v_1$ und $u_2 - u_1 = p_1v_1 - p_2v_2$. Um v_2 zu bestimmen muß zuerst der Dampfgehalt bestimmt werden,

$$h_2 = (1 - x_2)h_2' + x_2h_2'' \Rightarrow x_2 = \frac{h_1' - h_2'}{h_2'' - h_2'} = \frac{943{,}7 - 675{,}5}{2081{,}2} = 0{,}12887,$$

$$v_2 = (1 - x_2)v_2' + x_2v_2'' = 0{,}87 \cdot 1{,}1022 \cdot 10^{-3} + 0{,}13 \cdot 0{,}3068 = 0{,}040497\,\mathrm{m^3/kg},$$

$$\underline{u_2 - u_1 =} 23{,}198 \cdot 10^5 \cdot 1{,}190 \cdot 10^{-3} - 6{,}181 \cdot 10^5 \cdot 0{,}0405 = \underline{-22{,}271\,\mathrm{kJ/kg}}.$$

d)

$$\varepsilon_K = \frac{q_{zu}}{w_0} \Rightarrow \underline{q_{zu} = 3{,}11 \cdot w_0 = 1555\,\mathrm{kJ/kg}}.$$

Mit 1. HS: $q_{zu} + q_{ab} + w_0 = 0 \Rightarrow \underline{q_{ab} = -q_{zu} - w_0 = -2055\,\mathrm{kJ/kg}}$.

c) Die Enthalpien h_3 bzw. h_4 werden entlang den Zustandsänderungen $2 \rightarrow 3$ bzw. $4 \rightarrow 1$ aus den bekannten Enthalpien h_1 bzw. h_2 berechnet. Isobarer Vorgang: $\mathrm{d}h = \mathrm{d_e}q$.

$$h_3 - h_2 = q_{2-3} = q_{zu}, \Rightarrow \underline{h_3 = 943{,}7 + 1555 = 2499\,\mathrm{kJ/kg}}.$$

$$h_1 - h_4 = q_{4-1} = q_{ab}, \Rightarrow \underline{h_4 = 943{,}7 + 2055 = 2999\,\mathrm{kJ/kg}}.\ (\text{Überhitzung! } h_4 > h_4'')$$

5) Bestimmen Sie die mittlere spezifische Wärmekapazität $c_{p,\mathrm{Al}}$ von Aluminium aus folgendem Experiment: 20 g Aluminium der Temperatur 50 °C werden in 21,5 g Wasser von 20 °C getaucht. Das Wasser befindet sich in einem Kupferbecher von 21,6 g und ebenfalls 20 °C, der von adiabaten Wänden umgeben ist. Nach dem Temperaturausgleich betrage die gemeinsame Temperatur 24,55 °C ($c_{p,\mathrm{H_2O}} = 4{,}187$ kJ/kgK, $c_{p,\mathrm{Cu}} = 383$ J/kgK).

Berechnen Sie außerdem die Entropieänderung des Gesamtsystems, bestehend aus Aluminium, Wasser und Kupferbecher.

Lösung:

a)

isobare ZÄ, 1. HS $\mathrm{d}H = \mathrm{d_e}Q + V\mathrm{d}p$, mit $\mathrm{d_e}Q = 0$ folgt $H_2 - H_1 = 0$

$$H_{1,\mathrm{Al}} - H_{2,\mathrm{Al}} = H_{2,\mathrm{H_2O}} - H_{1,\mathrm{H_2O}} + H_{2,\mathrm{Cu}} - H_{1,\mathrm{Cu}}$$

$$\Rightarrow \quad m_{\mathrm{Al}} c_{p,\mathrm{Al}}(\vartheta_{1,\mathrm{Al}} - \vartheta_2) = (m_{\mathrm{H_2O}} c_{p,\mathrm{H_2O}} + m_{\mathrm{Cu}} c_{p,\mathrm{Cu}})(\vartheta_2 - \vartheta_{1,\mathrm{H_2O,Cu}})$$

$$20 \cdot c_{p,\mathrm{Al}} \cdot 25{,}45 = (21{,}5 \cdot 4{,}187 + 21{,}6 \cdot 0{,}383) \cdot 4{,}55 \quad \Rightarrow \quad c_{p,\mathrm{Al}} = 879 \text{ J/kgK}$$

b)

$$\mathrm{d_i}S = \mathrm{d_e}S_{\mathrm{Al}} + \mathrm{d_e}S_{\mathrm{H_2O}} + \mathrm{d_e}S_{\mathrm{Cu}},\ \mathrm{d_e}S = \frac{\mathrm{d_e}Q}{T} = \frac{\mathrm{d}H}{T} = \frac{mc_p}{T}\mathrm{d}T \ \Rightarrow\ S_2 - S_1 = mc_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

$$S_2 - S_1 = m_{\mathrm{Al}} c_{p,\mathrm{Al}} \ln\left(\frac{T_2}{T_{1,\mathrm{Al}}}\right) + (m_{\mathrm{H_2O}} c_{p,\mathrm{H_2O}} + m_{\mathrm{Cu}} c_{p,\mathrm{Cu}}) \ln\left(\frac{T_2}{T_{1,\mathrm{H_2O,Cu}}}\right)$$

$$S_2 - S_1 = 20 \cdot 0{,}878 \ln\left(\frac{297{,}7}{323{,}15}\right) + (21{,}5 \cdot 4{,}187 + 21{,}6 \cdot 0{,}383) \ln\left(\frac{297{,}7}{293{,}15}\right) = 0{,}072 \text{ J/K}$$

6) Feuchte Luft im Zustand 1 ($m_{\mathrm{L}} = 20$ kg, $p = 1$ bar, $\vartheta_1 = 23$ °C, $\varphi_1 = 0{,}85$) soll quasistatisch isobar bis zum Sättigungszustand 2 abgekühlt werden.

a) Berechnen Sie die dazu notwendige Wärmemenge Q_{12}.

b) Berechnen Sie die Entropieänderung $S_2 - S_1$.

$$c_{p,\mathrm{L}} = 1 \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kgK}},\quad c_{p,\mathrm{D}} = 1{,}9 \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kgK}},\quad x_{\mathrm{D}} = 0{,}622\frac{p_{\mathrm{D}}}{p - p_{\mathrm{D}}},\quad \varphi = \frac{p_{\mathrm{D}}}{p_{\mathrm{s}}}$$

Dampfdruck-tabelle für Wasser:

ϑ °C	p_{s} mbar
18	20,63
19	21,96
20	23,38
21	24,86
22	26,43
23	28,09

Lösung

a)

$$p_{s,2} = p_D = \varphi_1 p_{s,1} = 23{,}88\,\mathrm{mbar}$$

Aus Dampftafel (interpoliert):

$$\vartheta_2 = 20{,}34\,°\mathrm{C}$$

$$x_D = 0{,}622\frac{p_D}{p - p_D} = 0{,}0152$$

$$Q_{12} = m_L(h_{1+x,2} - h_{1+x,1}) = m_L(c_{p,L} + x_D c_{p,D})(\vartheta_2 - \vartheta_1) = -54{,}74\,\mathrm{kJ}$$

b)

$$\mathrm{d}S = \frac{1}{T}(\mathrm{d}H - V\mathrm{d}p) = m_L(c_{p,L} + x_D c_{p,D})\frac{\mathrm{d}T}{T}$$

$$S_2 - S_1 = m_L(c_{p,L} + x_D c_{p,D}) \ln\frac{T_2}{T_1} = -0{,}186\,\mathrm{kJ/K}$$