Prüfung aus Grundlagen der Thermodynamik 5. 10. 2007

2) Ein Gas, das der Zustandsgleichung

$$p(v-b) = RT$$

genügt, wird ausgehend vom Zustand 1 (Temperatur T_1, Druck p_1) auf den Druck p_2 adiabat gedrosselt. Berechnen Sie T_2.
Hinweis: Berechnen Sie zunächst den Joule-Thomson Koeffizienten

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_h = \frac{1}{c_p}\left[T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p - v\right].$$

Nehmen Sie an, c_p sowie b seien konstant.

Lösung:
Die adiabate Drosselung ist ein isenthalper Prozess, $\mathrm{d}h = 0$. Mit $\mathrm{d}T = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_h \mathrm{d}p + \left(\frac{\partial T}{\partial h}\right)_p \mathrm{d}h$ gilt $\mathrm{d}T = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_h \mathrm{d}p$ und somit $T_2 - T_1 = \int_{p_1}^{p_2}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_h \mathrm{d}p$. Mit $v = \frac{RT}{p} + b$ erhält man für den Joule-Thomson Koeffizienten

$$\frac{1}{c_p}\left[T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p - v\right] = \frac{1}{c_p}\left[\frac{RT}{p} - \frac{RT}{p} - b\right] = -\frac{b}{c_p}.$$

$$T_2 - T_1 = \int\limits_{p_1}^{p_2} -\frac{b}{c_p}\,\mathrm{d}p = -\frac{b}{c_p}(p_2 - p_1), \qquad \underline{T_2 = T_1 - \frac{b}{c_p}(p_2 - p_1).}$$

3) Ein ideales Gas konstanter spezifischer Wärmekapazitäten (geg.: κ, R) durchläuft folgenden reversiblen Kreisprozeß (geg.: p_1, v_1, p_2):

$1 \to 2$ adiabate Kompression,

$2 \to 3$ isobare Expansion,

$3 \to 1$ isochore Wärmeabgabe.

a) Zeichnen Sie den Kreisprozeß in ein p,v- und ein T,s-Diagramm ein. Handelt es sich dabei um eine Wärmekraftmaschine oder eine Wärmepumpe?

b) Berechnen Sie die zugeführte Wärmemenge q_{zu} und die abgeführte Wärmemenge q_{ab} und zeichnen Sie die Wärmemengen in das entsprechende Diagramm ein.

c) Berechnen Sie je nach Art der Maschine den thermischen Wirkungsgrad η oder die Leistungszahl ϵ_{WP} als Funktion des Druckverhältnisses $\psi = p_1/p_2$.

Lösung:

a) Wärmekraftmaschine.
b)
$q_{\mathrm{zu}} = q_{23}$: 1. HS: $\mathrm{d}h = \mathrm{d_e}q + v\mathrm{d}p$; isobare Zustandsänderung: $\mathrm{d}h = \mathrm{d_e}q$; ideales Gas: $\mathrm{d}h = c_p\mathrm{d}T$.

$$\Rightarrow \mathrm{d_e}q = c_p\mathrm{d}T, \quad q_{23} = c_p(T_3 - T_2)$$

$|q_{\mathrm{ab}}| = q_{13}$: 1. HS: $\mathrm{d}u = \mathrm{d_e}q - p\mathrm{d}v$; isochore: $\mathrm{d}u = \mathrm{d_e}q$; ideales Gas: $\mathrm{d}u = c_v\mathrm{d}T$.

$$\Rightarrow \mathrm{d_e}q = c_v\mathrm{d}T, \quad q_{13} = c_v(T_3 - T_1)$$

Die Temperaturen ergeben sich aus den anderen bekannten Zustandsgrößen aus der Zustandsgleichung für ein ideales Gas: $T_1 = p_1v_1/R$; $T_3 = p_3v_3/R$, Substitution von $p_3 = p_2$ und $v_3 = v_1$

ergibt $T_3 = p_2 v_1/R$. Aus der Isentropenbeziehung, $p_1 v_1^\kappa = p_2 v_2^\kappa$ folgt $v_2 = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/\kappa} v_1$ und $T_2 = \frac{p_2 v_1}{R}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/\kappa}$. Mit $c_p = R\kappa/(\kappa-1)$ und $c_v = R/(\kappa-1)$ erhält man

$$q_{\mathrm{zu}} = \frac{R\kappa}{\kappa-1}\frac{p_2 v_1}{R}\left(1-\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/\kappa}\right), \qquad |q_{\mathrm{ab}}| = \frac{R}{\kappa-1}\frac{p_2 v_1}{R}\left(1-\left(\frac{p_1}{p_2}\right)\right).$$

c) Für eine Wärmekraftmaschine ist der thermische Wirkungsgrad gegeben durch

$$\eta = \frac{|w_0|}{q_{\mathrm{zu}}} = \frac{q_{\mathrm{zu}} - |q_{\mathrm{ab}}|}{q_{\mathrm{zu}}} = 1 - \frac{|q_{\mathrm{ab}}|}{q_{\mathrm{zu}}}. \qquad \text{Einsetzen ergibt } \underline{\eta = 1 - \frac{1}{\kappa}\frac{(1-\psi)}{(1-\psi^{1/\kappa})}}.$$

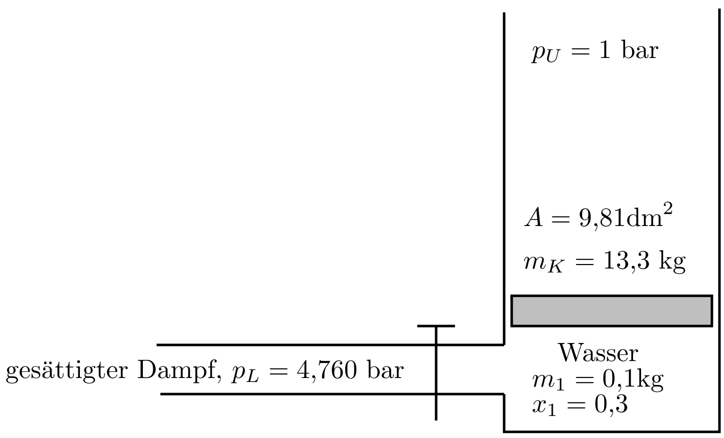
4) In einem zylindrischen Gefäß, das durch einen reibungsfrei beweglichen Kolben (Querschnittsfläche $A = 9{,}81$ dm^2, Masse $m_K = 13{,}3$ kg) verschlossen ist, befindet sich Wasser als Zweiphasengemisch (m_1=0,1 kg, $x_1 = 0{,}3$). Der Umgebungsdruck p_U beträgt 1 bar. Über ein Ventil wird eine Dampfleitung (gesättigter Dampf mit dem Druck $p_L = 4{,}760$ bar) angeschlossen. Das Ventil wird geöffnet und wieder geschlossen. Nach dem Erreichen des thermodynamischen Gleichgewichts beträgt der Dampfgehalt im Behälter $x_2 = 0{,}5$.

a) Geben Sie Druck, Temperatur und Volumen des Wassers im Behälter vor dem Öffnen des Ventils an.

b) Wie groß ist die Wassermasse im Behälter nach dem Schließen des Ventils?

c) Um welche Höhe wird der Kolben angehoben?

Hinweis:
Der Behälter und die Dampfleitung sind als adiabat zu betrachten.
Der Druck in der Dampfleitung sei während des gesamten Prozesses konstant.



Lösung:

a)

$$p_1 = p_U + \frac{m_K g}{A} = 1{,}0133\,\text{bar}, \quad \text{aus der DT folgt:} \quad T_1 = 373{,}15\text{K}$$

$$V_1 = m_1\left[(1-x_1)v' + x_1 v''\right] = 50{,}3\,\text{l}$$

b) Legt man die Grenzen des betrachteten TD Systems so, dass der Inhalt bis direkt an das Ventil bzw. den Kolben reicht, so ist das System als adiabat und *offen* anzusehen und die betrachtete ZÄ *isobar*. Die Anwendung des 1.HS für offene Systeme liefert unter Vernachlässigung jeglicher kinetischer und potentieller Energieänderungen:

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d_e}W + \mathrm{d_e^{(m)}}U$$

Unter der Annahme, dass der Druck in der Dampfleitung bis unmittelbar vor das Ventil konstant gleich p_L ist, lässt sich die Arbeit bestehend aus Volumenänderungsarbeit des Systems und Verschiebearbeit von der Dampfleitung schreiben als:

$$\mathrm{d_e}W = p_L v_L \mathrm{d_e}m - p\mathrm{d}V$$

Dies liefert unter Einführung der Enthalpie und Beachtung der isobaren ZÄ:

$$\mathrm{d}H = \mathrm{d_e^{(m)}}H \quad \text{bzw. integriert} \quad H_2 - H_1 = m_L h_L$$

$$h_1 = h'(1-x_1)+h''x_1 = 1096{,}2\,\mathrm{kJ/kg}, \quad h_2 = h'(1-x_2)+h''x_2 = 1547{,}6\,\mathrm{kJ/kg}, \quad h_L = 2745{,}4\,\mathrm{kJ/kg}$$

$$H_2 - H_1 = (m_1 + m_L)h_2 - m_1 h_1 = m_L h_L$$

$$\Rightarrow \quad m_L = m_1 \frac{h_2 - h_1}{h_L - h_2} = 0{,}038\,\mathrm{kg}, \quad m_2 = m_1 + m_L = 0{,}138\,\mathrm{kg}$$

c)

$$V_2 = [v'(1-x_2) - v''x_2]\, m_2 = 0{,}116\,\mathrm{m}^3$$

$$V_1 = [v'(1-x_1) - v''x_1]\, m_1 = 0{,}0503\,\mathrm{m}^3$$

$$\Rightarrow \quad \Delta h = \frac{V_2 - V_1}{A} = 0{,}67\,\mathrm{m}$$

5) Eis der Masse $m_{\mathrm{E},1} = 6$ kg und der Temperatur $\vartheta_{\mathrm{E},1} = -12$ °C wird bei konstantem Druck $p = 1$ bar in Wasser mit der zu ermittelnden Masse $m_{\mathrm{W},1}$ und der Temperatur $\vartheta_{\mathrm{W},1} = 14$ °C gegeben, wobei etwaiger Wärmeaustausch mit der Umgebung zu vernachlässigen ist. Als Ergebnis dieser Mischung liegt flüssiges Wasser der Endtemperatur $\vartheta_2 = 2$ °C vor.

$$c_{p,\mathrm{E}} = 2{,}2 \text{ kJ/kgK}, \qquad c_{p,\mathrm{W}} = 4{,}2 \text{ kJ/kgK}, \qquad l_0 = 334 \text{ kJ/kg}$$

a) Berechnen Sie die Masse $m_{\mathrm{W},1}$ des flüssigen Wassers im Anfangszustand.

b) Berechnen Sie die Entropieänderung des Gesamtsystems Wasser-Eis.

Lösung:

a) 1. HS: $\mathrm{d}H = \mathrm{d_e}Q + V\mathrm{d}p$; isobare ZÄ: $\mathrm{d}p = 0$, kein Wärmeaustausch: $\mathrm{d_e}Q = 0 \quad \Rightarrow \mathrm{d}H = 0$, $H_2 - H_1 = 0$; Nullpunkt: $H = 0$ für flüssiges Wasser bei $\vartheta = 0$ °C.

$$H_1 = H_{\mathrm{E},1} + H_{\mathrm{W},1} = m_{\mathrm{E},1}c_{p,\mathrm{E}}\vartheta_{\mathrm{E},1} - m_{\mathrm{E},1}l_0 + m_{\mathrm{W},1}c_{p,\mathrm{W}}\vartheta_{\mathrm{W},1}$$

$$H_2 = (m_{\mathrm{E},1} + m_{\mathrm{W},1})c_{p,\mathrm{W}}\vartheta_2$$

$H_1 = H_2$; nach $m_{\mathrm{W},1}$ auflösen

$$m_{\mathrm{W},1}c_{p,\mathrm{W}}(\vartheta_{\mathrm{W},1} - \vartheta_2) = m_{\mathrm{E},1}(c_{p,\mathrm{W}}\vartheta_2 - c_{p,\mathrm{E}}\vartheta_{\mathrm{E},1} + l_0)$$

$$m_{\mathrm{W},1} = \frac{6(4{,}2 \cdot 2 + 2{,}2 \cdot 12 + 334)}{4{,}2(14-2)} = 43{,}90 \text{ kg}$$

b) Entropieänderung für Gesamtsystem: $\mathrm{d}S = \mathrm{d_e}S + \mathrm{d_i}S$, $\mathrm{d_e}S = 0$ wegen $\mathrm{d_e}Q = 0$, aber $\mathrm{d_i}S \neq 0$.
für Einzelsysteme: $\mathrm{d}S = \mathrm{d_e}S = \dfrac{\mathrm{d_e}Q}{T} = \dfrac{\mathrm{d}H}{T}$;
mit $\mathrm{d}H = mc_p\mathrm{d}T \quad \Rightarrow S_2 - S_1 = mc_p \ln(T_2/T_1)$ (bei Temp.änderung ohne Phasenumwandlung)
$\mathrm{d}H = l_0\mathrm{d}m \quad \Rightarrow S_2 - S_1 = (m_2 - m_1)l_0/T_0$ (bei Phasenumwandlung)

$$S_{E,2} - S_{E,1} = m_{E,1} c_{p,E} \ln\left(\frac{T_0}{T_1}\right) + m_{E,1} \frac{l_0}{T_0} + m_{E,1} c_{p,W} \ln\left(\frac{T_2}{T_0}\right) =$$

$$= 0{,}593 + 7{,}337 + 0{,}184 \text{ kJ/K} = 8{,}114 \text{ kJ/K}$$

$$S_{W,2} - S_{W,1} = m_{W,1} c_{p,W} \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = -7{,}871 \text{ kJ/K}$$

$$S_2 - S_1 = 0{,}243 \text{ kJ/K}$$

6) In einem adiabaten Zylinder, der mit einem reibungsfrei beweglichen, adiabaten Kolben verschlossen ist, befindet sich im Ausgangszustand trockene Luft mit der Temperatur $\vartheta_1 = 25\,^\circ\mathrm{C}$, dem Druck $p = 1\,\mathrm{bar}$ und dem Volumen $V_1 = 0{,}5\,\mathrm{m}^3$. Es wird nun $m_\mathrm{W} = 1\,\mathrm{g}$ flüssiges Wasser mit der Temperatur $\vartheta_\mathrm{W} = 25\,^\circ\mathrm{C}$ eingespritzt. Nach dem Mischen stellt sich ein Zustand 2 ein. Berechnen Sie

   a) die Masse m_L der trockenen Luft und den Wassergehalt x_2.

   Nehmen Sie für die weitere Berechnung an, daß $x_{s,2} > x_2$ ist.

   b) Berechnen Sie die Mischtemperatur ϑ_2 unter der Annahme einer isobaren Zustandsänderung.

   c) Zeigen Sie, daß die oben getroffene Annahme ($x_{s,2} > x_2$), richtig ist und berechnen Sie den Sättigungsgrad ψ_2.

$$c_{p\mathrm{L}} = 1\,\mathrm{kJ/kg\,K}, \quad c_{p\mathrm{D}} = 1{,}86\,\mathrm{kJ/kg\,K}, \quad c_{p\mathrm{F}} = 4{,}19\,\mathrm{kJ/kg\,K}, \quad r_0 = 2501{,}6\,\mathrm{kJ/kg},$$

$$\mathcal{M}_\mathrm{L} = 28{,}95 \ \mathrm{kg/kmol}, \quad \mathcal{R} = 8314 \ \mathrm{J/kmol\ K}$$

$$\varphi = p_\mathrm{D}/p_\mathrm{s}, \quad \psi = x_\mathrm{D}/x_\mathrm{s}, \quad x = 0{,}622\frac{p_\mathrm{D}}{p - p_\mathrm{D}}.$$

ϑ °C	p_s mbar
16	18,17
17	19,36
18	20,62
19	21,96
20	23,37
21	24,85
22	26,42
23	28,09
24	29,82
25	31,66
26	33,60
27	35,64
28	37,78
29	40,04
30	42,41

Lösung:

a)

$$m_L = \frac{pV\mathcal{M}_L}{\mathcal{R}T_1} = 0{,}5840\,\mathrm{kg}$$

$$x_2 = m_W/m_L = 0{,}001712$$

b)

$$H_1 = m_L c_{pL} \vartheta_1 + m_W c_{pF} \vartheta_W = 14{,}70\,\mathrm{kJ}$$

$$H_2 = H_1 = m_L(c_{p,L}\vartheta_2 + x_2 c_{pD}\vartheta_2 + x_2 r_0)$$

$$\vartheta_2 = \frac{H_1 - m_L x_2 r_0}{m_L(c_{pL} + x_2 c_{pD})} = 20{,}82\,^\circ\mathrm{C}$$

c)

$$p_s(20{,}83^\circ\mathrm{C}) = 24{,}60\,\mathrm{mbar}, \quad x_s = 0{,}01569 > x_2$$

$$\psi_2 = x_2/x_s = 0{,}109$$