

- 2) In einem Zylinder mit Kolben befindet sich Luft im Umgebungszustand. Die Luft wird nun isentrop auf den doppelten Umgebungsdruck verdichtet. Nach einiger Zeit gleicht sich die Temperatur im Zylinder bei festgehaltenem Kolben zufolge der Wärmeverluste wiederum der Umgebungstemperatur an, und der Druck sinkt dabei auf den Wert  $p_2$  ab. Anschließend erfolgt eine isentrope Entspannung auf Umgebungsdruck.

Gegeben: Luft:  $\kappa$ ,  $R$ ; Umgebungsdruck  $p_0$ , Umgebungstemperatur  $T_0$ , Anfangsvolumen  $V_0$ .

- Stellen Sie den Vorgang in einem  $p,v$ -Diagramm und einem  $T,s$ -Diagramm dar.
- Berechnen Sie die Arbeit, die an der Kolbenstange verrichtet werden muß, um die Luft zu verdichten.
- Geben Sie den Druck  $p_2$  vor der Expansion als Funktion von  $p_0$  an.
- Zeichnen Sie die Arbeit, die an der Kolbenstange bei der Expansion gewonnen werden kann, in das  $p,v$ -Diagramm ein.
- Kennzeichnen Sie jenen Teil der Verdichtungsarbeit im  $p,v$ -Diagramm, den man sparen könnte, wenn die Verdichtung von  $p_0$  bis  $p_2$  isotherm erfolgen würde.

**Lösung:**

- b) Die verrichtete Arbeit ist die dem System zugeführte Arbeit, abzüglich der von der Umgebung verrichteten Arbeit:

$$dW_K = d_e W - d_e W_U = -(p - p_0)dV$$

ideales Gas, isentroper Vorgang:

$pV^\kappa = \text{const.} = p_0V_0^\kappa$ . Mit  $p_1 = 2p_0$  folgt  $V_1 = 2^{-\frac{1}{\kappa}}V_0$ . (NB:  $T_1 = 2^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}T_0$ )

$$\begin{aligned} W_K &= - \int_{V_0}^{V_1} (p - p_0)dV = - \int_{V_0}^{V_1} \left[ p_0 \left( \frac{V_0}{V} \right)^\kappa - p_0 \right] dV = \\ &= -p_0V_0^\kappa \frac{1}{-\kappa + 1} \left( V_1^{-\kappa+1} - V_0^{-\kappa+1} \right) + p_0(V_1 - V_0) = \\ &= \frac{p_0V_0}{\kappa - 1} \left( 2^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right) + p_0V_0 \left( 2^{-\frac{1}{\kappa}} - 1 \right) = \frac{p_0V_0}{\kappa - 1} \left( (\kappa + 1)2^{-\frac{1}{\kappa}} - \kappa \right) \end{aligned}$$

- c) Mit  $\frac{p_2V_2}{T_2} = \frac{p_0V_0}{T_0}$  und  $V_2 = V_1 = 2^{-\frac{1}{\kappa}}V_0$  sowie  $T_2 = T_0$  folgt  $p_2 = 2^{\frac{1}{\kappa}}p_0$ .

- 3) Ein starrer, adiabater Behälter enthält ideales Gas gegebener konstanter spezifischer Wärmekapazitäten der Masse  $m$ . Im Anfangszustand ist die Temperatur des Gases  $T_1$  gleich der Umgebungstemperatur  $T_U$ . Mittels eines Rührers wird dem System die Arbeit  $W_{12}$  zugeführt, sodass sich die Temperatur des Gases auf  $T_2$  erhöht. Danach wird dem Gas Wärme entzogen und einer reversibel arbeitenden Wärmekraftmaschine zugeführt, welche ihrerseits Wärme an die Umgebung der konstanten Temperatur  $T_U$  abgibt, bis das Gas wieder auf seine Anfangstemperatur abgekühlt ist.

Berechnen Sie in Abhängigkeit von den gegebenen Größen  $T_2$ ,  $T_U$ ,  $c_p$ ,  $c_v$  und  $m$ :

- $W_{12}$ ,
- die von der Wärmekraftmaschine abgegebene Arbeit  $W_O$ ,
- die Gesamtentropieänderung des Systems Gas und Umgebung (ohne Rührer),
- die Gesamtentropieänderung dieses Systems, falls die Wärmeabgabe des Gases statt über die Wärmekraftmaschine direkt an die Umgebung erfolgt.

### Lösung:

- a) Da der Behälter starr und adiabat ist, folgt mit dem 1.HS:

$$d_e W = dU = mc_v dT \quad \Rightarrow \quad W_{12} = mc_v (T_2 - T_U) > 0$$

- b) Für Gastemperaturen zwischen  $T_2$  und  $T_U$  gilt:

$$\begin{aligned} d_e Q_{zu} &= -mc_v dT > 0 \\ d_e Q_{ab} &= -\frac{T_U}{T} d_e Q_{zu} = mc_v \frac{T_U}{T} dT < 0 \\ d_e W_O &= -d_e Q_{zu} - d_e Q_{ab} = -mc_v \left( \frac{T_U}{T} - 1 \right) dT < 0 \end{aligned}$$

Integration über  $T$  von  $T_2$  bis  $T_U$  ergibt:

$$W_O = -mc_v \left[ (T_2 - T_U) - T_U \ln \frac{T_2}{T_U} \right] = -W_{12} \left( 1 - \frac{T_U}{T_2 - T_U} \ln \frac{T_2}{T_U} \right) < 0$$

- c) Die Gesamtentropieänderung  $\Delta S$  setzt sich aus den Entropieänderungen der Teilprozesse „Rühren“ und „Carnotprozess“ zusammen. Zweitere ist 0, daher folgt mit der Gibbsschen Fundamentalgleichung

$$dS_{\text{Rühren}} = \frac{dU_{\text{Rühren}}}{T} = mc_v \frac{dT}{T} \quad \Rightarrow \quad \Delta S = \Delta S_{\text{Rühren}} = mc_v \ln \frac{T_2}{T_U} > 0$$

- d) Die Gesamtentropieänderung  $\Delta S$  setzt sich aus den Entropieänderungen der Teilprozesse „Rühren“ und „Auskühlen“ zusammen. Die Entropieproduktion im Behälter durch das Rühren bilanziert mit der Entropieverminderung durch das Auskühlen des Behälters zu 0. Es verbleibt nur die Entropieproduktion durch die Wärmeabgabe  $d_e Q$  des Behälters an die Umgebung. Mit dem 1.HS folgt

$$dS_{\text{Auskuehlen}} = \frac{d_e Q}{T} = \frac{dU}{T_U} \quad \Rightarrow \quad \Delta S = mc_v \left( \frac{T_2}{T_U} - 1 \right) > 0$$

- 4) Ein Gemisch von flüssigem und dampfförmigem Wasser (Anfangszustand  $m_1 = 2500 \text{ kg}$ ,  $T_1 = 393,15 \text{ K}$ ,  $V_1 = 15 \text{ m}^3$ ) wird mit  $1000 \text{ kg}$  gesättigtem Wasserdampf gleichen Drucks isobar gemischt (Zustand 2). Wärmeaustausch mit der Umgebung kann bei diesem Mischprozeß vernachlässigt werden.

Das gesamte Gemisch wird anschließend auf den Druck  $p_3 = 1,0133 \text{ bar}$  adiabat gedrosselt (Zustand 3).

- Ermitteln Sie die Dichte  $\rho_1$  und den Druck  $p_1$  sowie den Dampfgehalt  $x_1$  und die Dampfmasse  $m_{D,1}$ .
- Welcher Dampfgehalt  $x_2$  stellt sich im gemischten Zustand 2 ein, und welche spezifische Enthalpie  $h_2$  hat nun das Gemisch?
- Berechnen Sie unter Vernachlässigung der kinetischen und potentiellen Energie beim adiabaten Drosselvorgang den Dampfgehalt  $x_3$  im Endzustand 3 und das spezifische Volumen  $v_3$  des Gemisches.
- Wie groß ist die Entropieänderung des Gemisches beim adiabaten Drosselprozeß? Handelt es sich dabei um einen reversiblen oder irreversiblen Prozeß (Begründung!)?

**Lösung:**

a)

$$\rho_1 = v_1^{-1} = \frac{m_1}{V} = 166,7 \text{ kg/m}^3$$

$$p_1 = 1,9854 \text{ bar}$$

$$x_1 = \frac{v_1 - v_1'}{v_1'' - v_1'} = 0,005547$$

$$m_{D,1} = x_1 m_1 = 13,87 \text{ kg}$$

b)

$$H_1 = m_1 (h_1'(1 - x_1) + h_1''x_1) = 1289,8 \text{ MJ}$$

$$H_D = m_D h_1'' = 2706,0 \text{ MJ}$$

$$H_2 = H_1 + H_D = 3995,8 \text{ MJ}, \quad m_2 = 3500 \text{ kg}$$

$$h_2 = 1141,7 \text{ kJ/kg}, \quad x_2 = \frac{h_2 - h_2'}{h_2'' - h_2'} = 0,2896$$

c)

$$h_3 = h_2, \quad x_3 = \frac{h_3 - h_3'}{h_3'' - h_3'} = 0,3202$$

$$v_3 = (1 - x_3)v_3' + x_3v_3'' = 0,5364 \text{ m}^3/\text{kg}$$

d)

$$S_2 = m_2 s_2 = 11024,5 \text{ kJ/K}$$

$$S_3 = m_2 s_3 = 11352,0 \text{ kJ/K}$$

$$S_3 - S_2 = 327,5 \text{ kJ/K} > 0, \quad \text{irreversibel!}$$

- 5) Ein Kupferblock ( $V = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ ) wird aus einem Zustand 1 ( $T_1 = 300 \text{ K}$ ,  $p_1 = 1,1 \text{ bar}$ ) reversibel isotherm auf einen Zustand 2 ( $p_2 = 130 \text{ bar}$ ) komprimiert.

Berechnen Sie:

- a) die relative Volumenänderung,

Hinweis: Im Folgenden können relative Volumenänderungen vernachlässigt werden,

- b) die aufzuwendende Arbeit
- $W_{12}$
- ,

- c) die Entropieänderung
- $S_2 - S_1$
- des Kupferblocks,

Hinweis:  $\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ ,

- d) die zu- oder abzuführende Wärme
- $Q_{12}$
- ,

- e) sowie die Änderung der inneren Energie
- $U_2 - U_1$
- des Kupferblocks.

$$\chi_T = 0,721 \cdot 10^{-11} \text{ Pa}^{-1}, \quad \beta_p = 50,4 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}.$$

**Lösung:**

a) Da die Zustandsänderung isotherm erfolgt, gilt

$$\frac{dV}{V} = \beta_p dT - \chi_T dp = -\chi_T dp$$

$$\int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} \approx \frac{V_2 - V_1}{V_1} = -V_1 \chi_T (p_2 - p_1) = -9,29 \cdot 10^{-5}$$

Somit gilt in guter Näherung  $V = V_1 \approx V_2$ .

b)  $W_{12} = - \int_{V_1}^{V_2} p dV \approx V \chi_T \frac{p_2^2 - p_1^2}{2} = 0,609 \text{ J}$

c)  $dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T dp = -V \beta_p dp$   
 $S_2 - S_1 \approx -V \beta_p (p_2 - p_1) = -0,650 \text{ J/K}$

d)  $Q_{12} = T_1 (S_2 - S_1) = -195 \text{ J}$

e)  $U_2 - U_1 = Q_{12} + W_{12} = -194 \text{ J}$

6) Gegeben ist flüssiger Nebel mit der Gesamtmasse  $m = 5 \text{ kg}$  im Ausgangszustand 1:

$\vartheta_1 = 23^\circ\text{C}$ ,  $p_1 = 1,013 \text{ bar}$ ,  $\psi_1 = 1$ ,  $x_{F1} = 0,009$ .

$$c_{p,\text{Luft}} = 1 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}; \quad c_{p,\text{Dampf}} = 1,84 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}; \quad c_{p,\text{Wasser}} = 4,2 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}; \quad r_0 = 2501,6 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

$$\psi = \frac{x_D}{x_s}; \quad x_D = 0,622 \frac{p_D}{p - p_D} \quad \varphi = \frac{p_D}{p_s}$$

a) Berechnen Sie die Masse der trockenen Luft  $m_L$ .

b) Das Gemisch wird nun isobar erwärmt. Bei welcher Temperatur  $\vartheta_2$  tritt Sättigung ( $\psi_2 = 1$ ,  $x_{F2} = 0$ ) ein?

c) Welche Wärmemenge  $Q_{12}$  muss dabei zugeführt werden?

$\vartheta$ °C	$p_s$ mbar
16	18,17
17	19,36
18	20,62
19	21,96
20	23,37
21	24,85
22	26,42
23	28,09
24	29,82
25	31,66
26	33,60
27	35,64
28	37,78
29	40,04
30	42,41

**Lösung:**

a)  $\psi_1 = 1$ ,  $p_{D1} = p_{s1} = 28,09 \text{ mbar}$ ,  $x_{D1} = x_{s1} = 0,622 \frac{p_{s1}}{p_1 - p_{s1}} = 0,01774$

$m = m_L + m_{D1} + m_{F1} = (1 + x_{D1} + x_{F1}) m_L \Rightarrow m_L = 4,870 \text{ kg}$

b)  $x_{D1} + x_{F1} = x_{D2} = x_{s2} = 0,662 \frac{p_{s2}}{p_1 - p_{s2}}$

$\Rightarrow p_{s2} = \frac{p_1}{1 + \frac{0,622}{x_{D1} + x_{F1}}} = 41,75 \text{ mbar}$

Mittels linearer Interpolation folgt aus der angegebenen Tabelle:

$\vartheta_2 = 29,72^\circ\text{C}$ .

c)  $Q_{12} = H_{12} = m_L [(c_{p,\text{Luft}} + x_{D1} c_{p,\text{Dampf}}) (\vartheta_2 - \vartheta_1) + x_{F1} (c_{p,\text{Dampf}} \vartheta_2 - c_{p,\text{Wasser}} \vartheta_1) + x_{F1} r_0] = 141,6 \text{ kJ}$