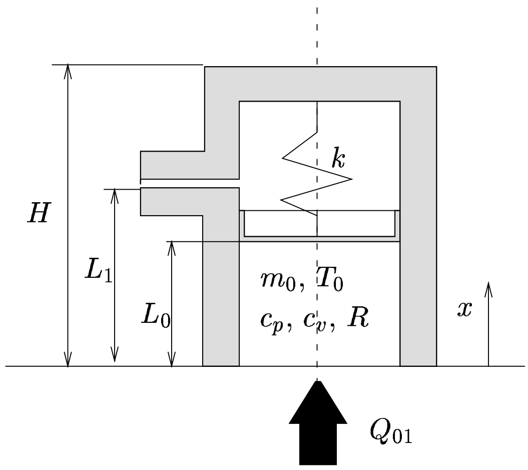
2) Gegeben ist ein Behälter, in dem sich ein ideales Gas (gegebener konstanter Stoffwerte c_p, c_v, R), der Masse m_0 bei Umgebungstemperatur $T_0 = T_U$ befindet. Die Feder, die den Kolben niederdrückt, besitzt eine lineare Kennlinie ($F = kx$). Sie ist entspannt, wenn der Kolben (Kolbenfläche A, Gewicht vernachlässigbar) am Boden aufliegt. Der Umgebungsdruck ist zu vernachlässigen.

a.) Drücken Sie p als Funktion von x aus.

b.) Wie groß sind p_0 und V_0 ?

c.) Welche Wärmemenge Q_{01} muß dem Gas zugeführt werden, damit der Kolben bis zur Auslaßöffung (L_1) hinaufgedrückt wird?

d.) Berechnen Sie die spezifischen Entropieänderung ($s_1 - s_0$) des Gases in Anhängigkeit der Stoffwerte und der Längen L_1 und L_0.



Lösung:

a.)

$$p = \frac{F}{A} = \frac{kx}{A}$$

Aus $pV = m_0RT$ und $V = Ax$ folgt weiters

$$x = \sqrt{\frac{m_0RT}{k}}$$

sodass als unabhängige Zustandsgrösse entweder x oder T verwendet werden kann.

b.) Im Ausgangszustand gilt:

$$x = L_0 = \sqrt{\frac{m_0RT_0}{k}}, \qquad p = p_0 = \frac{kL_0}{A} = \frac{\sqrt{km_0RT_0}}{A}, \qquad V = V_0 = AL_0 = A\sqrt{\frac{m_0RT_0}{k}}$$

c.)

$$Q_{01} = U_1 - U_0 - W_{01}$$

Mit $\mathrm{d}T = \frac{2kx}{m_0R}\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}V = A\mathrm{d}x$ folgt

$$U_1 - U_0 = m_0c_\mathrm{v}\int_{T_0}^{T_1}\mathrm{d}T = \frac{kc_\mathrm{v}L_0^2}{R}\left(\frac{L_1^2}{L_0^2} - 1\right) = m_0c_\mathrm{v}T_0\left(\frac{L_1^2}{L_0^2} - 1\right),$$

$$-W_{01} = \int_{V_0}^{V_1} p\mathrm{d}V = \frac{kL_0^2}{2}\left(\frac{L_1^2}{L_0^2} - 1\right) = \frac{m_0 R T_0}{2}\left(\frac{L_1^2}{L_0^2} - 1\right),$$

$$Q_{01} = \frac{c_\mathrm{p} + c_\mathrm{v}}{2} m_0 T_0 \left(\frac{L_1^2}{L_0^2} - 1\right) = \frac{k}{2}\frac{c_\mathrm{p} + c_\mathrm{v}}{c_\mathrm{p} - c_\mathrm{v}} L_0^2 \left(\frac{L_1^2}{L_0^2} - 1\right)$$

d.)

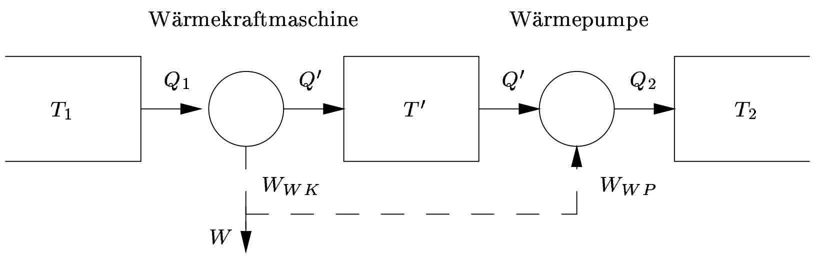
$$\mathrm{d}s = c_\mathrm{v}\frac{\mathrm{d}T}{T} + R\frac{\mathrm{d}V}{V}$$

Mit $\frac{\mathrm{d}T}{T} = 2\frac{\mathrm{d}x}{x}$ und $\frac{\mathrm{d}V}{V} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$ folgt

$$s_1 - s_0 = (c_\mathrm{p} + c_\mathrm{v}) \ln \frac{L_1}{L_0}$$

3) Eine Carnot-Wärmekraftmaschine arbeitet zwischen einem Energiespeicher 1 mit der Temperatur T_1 und einem endlichen Körper der Temperatur T'. Die Temperatur dieses Körpers wird mittels einer Carnot-Wärmepumpe konstant gehalten. Die Wärmepumpe führt ihre Abwärme einem Energiespeicher 2 mit der Temperatur T_2 zu, und wird mit einem Teil der von der Wärmekraftmaschine verrichteten Arbeit W_{WK} betrieben. Es ist $T_1 > T_2 > T'$.

Wie groß ist die Prozessnettoarbeit W, die der Wärmepumpe zugeführte Arbeit W_{WP}, und die von der Wärmekraftmaschine verrichtete Arbeit W_{WK}, wenn die der Wärmekraftmaschine zugeführte Wärme Q_1 beträgt?



Lösung:

Wärmekraftmaschine:

$$W_{WK} = -|W_{WK}| = -\eta_\mathrm{C} Q_1 = -\left(1 - \frac{T'}{T_1}\right) Q_1$$

Die gekoppelte Wärmekraftmaschine und Wärmepumpe kann insgesamt wieder als Wärmekraftmaschine aufgefasst werden. Da diese dann ebenfalls reversibel zwischen zwei konstanten Temperaturniveaus T_1 und T_2 arbeitet, besitzt sie den Carnot-Wirkungsgrad. Daher gilt:

$$W = -|W| = -\eta_\mathrm{C} Q_1 = -\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) Q_1$$

Daraus folgt für die der Wärmepumpe zugeführte Arbeit

$$W_{WP} = |W_{WK}| - |W| = (T_2 - T')\frac{Q_1}{T_1} > 0$$

4) In einem geschlossenen Behälter (Ausgangsdruck $p_1 = 10$ bar) befindet sich Naßdampf (Dampfgehalt $x_1 = 0.2$) im thermodynamischen Gleichgewicht. Der Naßdampf wird solange quasistatisch und isochor erwärmt, bis nur noch eine Phase vorliegt.

   - Welche Endtemperatur T_2 stellt sich ein?
   - Veranschaulichen Sie diesen Vorgang im p,v- und im T,s-Diagramm.
   - Welche Wärmemenge muß pro Masseneinheit zugeführt werden?

Lösung:
Zustand 1:

$p_1 = 10$ bar, $(T_1 \approx 180\,°\mathrm{C})$ $\quad v_1' = 1{,}1273\,\mathrm{dm^3/kg} \quad v_1'' = 0{,}1944\,\mathrm{m^3/kg} \quad h_1' = 762{,}5\,\mathrm{kJ/kg} \quad h_1'' = 2776{,}2\,\mathrm{kJ/kg}$

$$v_1 = (1 - x_1)v_1' + x_1 v_1'' = 39{,}79\,\mathrm{dm^3/kg}$$
$$h_1 = (1 - x_1)h_1' + x_1 h_1'' = 1165{,}24\,\mathrm{kJ/kg}$$
$$v_2'' = v_1 \quad \Rightarrow \quad \vartheta_2 = 263{,}58\,°\mathrm{C}$$

Zustand 2:

$$p_2 = 49{,}848 \text{ bar}, \ \vartheta_2 = 263{,}58\,°\mathrm{C} \quad v_2 = v_2'' = 39{,}79\,\mathrm{dm^3/kg} \quad h_2 = h_2'' = 2794{,}07\,\mathrm{kJ/kg}$$
$$\mathrm{d}u = \mathrm{d}h - p\mathrm{d}v - v\mathrm{d}p = \mathrm{d}h - v\mathrm{d}p$$
$$\Rightarrow \quad q_{12} = h_2 - h_1 - v_1(p_2 - p_1) = 1470{,}3\,\mathrm{kJ/kg}$$

5) In einem Gefäß befindet sich 40 kg Eis mit der Temperatur $\vartheta_\mathrm{E} = -10\,°\mathrm{C}$. Wieviel Wasser der Temperatur $\vartheta_\mathrm{F} = 30\,°\mathrm{C}$ muß dem Gefäß mindestens hinzugefügt werden, um das Eis vollständig zu schmelzen?

   Berechnen Sie außerdem die Entropieänderung dieses Vorganges und begründen Sie, warum dieser reversibel oder irreversibel ist.

$$c_\mathrm{p,E} = 2{,}1 \text{ kJ/kg K}, \quad c_\mathrm{p,F} = 4{,}19 \text{ kJ/kg K}, \quad l_0 = 333{,}5 \text{ kJ/kg}.$$

   Etwaiger Wärmeaustausch mit der Umgebung kann vernachlässigt werden.

Lösung:

a) Wahl des energetischen Bezugspunkts: flüssiges Wasser bei 0 °C

$$\text{1. HS Eis: } H_\mathrm{E,1} = m_\mathrm{E} c_{\mathrm{p},E} \vartheta_\mathrm{E,1} - l_0 m_\mathrm{E}, \qquad \text{Wasser: } H_\mathrm{F,1} = m_\mathrm{F} c_{\mathrm{p},F} \vartheta_\mathrm{F,1}$$
$$H_\mathrm{E,2} = 0, \quad H_\mathrm{F,2} = (m_\mathrm{E} + m_\mathrm{F}) c_{\mathrm{p},F} \vartheta_\mathrm{F,2}$$
$$\text{1. HS Gesamt: } H_1 = H_\mathrm{E,1} + H_\mathrm{F,1} = H_2 \Rightarrow m_\mathrm{F} = m_\mathrm{E} \frac{c_{\mathrm{p},E}\left(\vartheta_\mathrm{E,2} - \vartheta_\mathrm{E,1}\right) + l_0}{c_{\mathrm{p},F}\left(\vartheta_\mathrm{F,1} - \vartheta_\mathrm{F,2}\right)} = \underline{112{,}81 \text{ kg}}$$
$$\text{wobei } \vartheta_{F,2} = \vartheta_{E,2} = 0\,°\mathrm{C}$$

b)

$$T_{\mathrm{E}/F} = \vartheta_{\mathrm{E}/F} + 273{,}15\,°\mathrm{K}$$
$$\text{2. HS Eis: } \Delta S_\mathrm{E} = m_\mathrm{E}\left(c_{\mathrm{p},E} \ln \frac{T_\mathrm{E,2}}{T_\mathrm{E,1}} + \frac{l_0}{T_\mathrm{E,2}}\right) = 51{,}971\,\mathrm{kJ/K}$$
$$\text{2. HS Wasser } \Delta S_\mathrm{F} = m_\mathrm{F} c_{\mathrm{p},F} \ln \frac{T_\mathrm{F,2}}{T_\mathrm{F,1}} = -49{,}256\,\mathrm{kJ/K}$$
$$\text{gesamt: } \Delta S_\mathrm{ges.} = \Delta S_\mathrm{E} + \Delta S_\mathrm{F} = \underline{2{,}71\,\mathrm{kJ/K}}$$

<u>Prozess ist irreversibel, weil $\Delta S_\mathrm{ges.} > 0$!</u>

6) Zwei Mengen feuchter Luft A und B werden bei $p = 1$ bar isobar gemischt (Mischung M).

A: $m_A = 1$ kg (trockene Luft); $\vartheta_A = 6°C$; $\psi = 0{,}9$

B: $h_B = 100$ kJ/kg

Als Ergebnis dieses Prozesses liegt **gesättigte** feuchte Luft mit $x_M = 0{,}018$ vor.

a) Berechnen Sie x_A und h_A!

b) Berechnen Sie ϑ_M und h_M!

c) Berechnen Sie m_B und x_B!

$$c_{p,L} = 1 \text{ kJ/kgK}; \qquad \mathrm{r_0} = 2501{,}6 \text{ kJ/kg}; \qquad \mathrm{c_{p,D}} = 1{,}86 \text{ kJ/kgK}$$

$$x = 0{,}622 \frac{p_D}{p - p_D}; \qquad \psi = \frac{x}{x_S}$$

Dampfdruck-
tabelle für
Wasser:

ϑ °C	p_s mbar
0	6,11
1	6,57
2	7,06
3	7,58
4	8,13
5	8,72
6	9,35
7	10,02
8	10,72
9	11,48
10	12,28
11	13,12
12	14,02
13	14,97
14	15,98
15	17,05
16	18,17
17	19,37
18	20,63
19	21,96
20	23,38
21	24,86
22	26,43
23	28,09
25	31,66

Lösung:

a)

$$x_{\mathrm{sA}} = 0{,}622 \frac{p_{\mathrm{s}}\,(6°\mathrm{C})}{p - p_{\mathrm{s}}\,(6°\mathrm{C})} = 5{,}871 \cdot 10^{-3}$$

$$\Rightarrow x_{\mathrm{A}} = x_{\mathrm{AD}} = x_{\mathrm{sA}}\psi = \underline{5{,}284 \cdot 10^{-3}}$$

$$h_{\mathrm{A}} = (c_{p\mathrm{L}} + x_{\mathrm{AD}} c_{p\mathrm{D}})\,\vartheta_{\mathrm{A}} + x_{\mathrm{AD}} r_0 = \underline{19{,}276\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}}}$$

b)

$$p_{\mathrm{sM}} = \frac{p}{\frac{0{,}622}{x_{\mathrm{M}}} + 1} = 28{,}125\,\mathrm{mbar} \qquad \Rightarrow \vartheta_{\mathrm{M}} \approx \underline{23°\mathrm{C}}$$

$$h_{\mathrm{M}} = (c_{p\mathrm{L}} + x_{\mathrm{M}} c_{p\mathrm{D}})\,\vartheta_{\mathrm{M}} + x_{\mathrm{M}} r_0 = \underline{68{,}799\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}}}$$

c)

$$\Delta H = (m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}) h_{\mathrm{M}} - (m_{\mathrm{A}} h_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}} h_{\mathrm{B}}) = 0 \Rightarrow m_{\mathrm{B}} = m_{\mathrm{A}} \frac{h_{\mathrm{M}} - h_{\mathrm{A}}}{h_{\mathrm{B}} - h_{\mathrm{M}}} = \underline{1{,}587\,\mathrm{kg}}$$

$$m_{\mathrm{B}} x_{\mathrm{B}} + m_{\mathrm{A}} x_{\mathrm{A}} = (m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}) x_{\mathrm{M}} \Rightarrow x_{\mathrm{B}} = \frac{(m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}})\,x_{\mathrm{M}} - m_{\mathrm{A}} x_{\mathrm{A}}}{m_{\mathrm{B}}} = \underline{0{,}02601}$$