

2) Eine Maschine mit einem idealen Gas gegebener konstanter spezifischer Wärmekapazitäten als Arbeitsmedium arbeitet nach folgendem reversiblen Kreisprozess:

- 1 → 2 adiabate Expansion;
- 2 → 3 isochore Verdichtung;
- 3 → 1 isobare Verdichtung.

- a) Zeichnen Sie die Zustandsänderungen in einem  $p,V$ - und einem  $T,s$ -Diagramm ein!
- b) Handelt es sich um eine Wärmekraftmaschine oder eine Wärmepumpe?
- c) Berechnen Sie für jeden Teilprozess die zu- bzw. abgeführte Wärme und Arbeit.
- d) Skizzieren Sie in den Diagrammen die zu- bzw. abgeführte Wärme und die Nettoarbeit.
- e) Berechnen Sie die Leistungszahl als Funktion von  $V_1$  und  $V_2$ .

**Lösung:**

b) Wärmepumpe

c)

1 → 2:

$$pV^\kappa = const. \Rightarrow \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\kappa, \quad p = p_1 V_1^\kappa V^{-\kappa}$$

$$dU = d_e Q + d_e W, \quad d_e Q = 0 \Rightarrow W_{12} = U_2 - U_1 = mc_v(T_2 - T_1), \quad Q_{12} = 0$$

$$\text{oder: } d_e W = -pdV, \quad W_{12} = -p_1 V_1^\kappa \frac{1}{1-\kappa} (V_2^{1-\kappa} - V_1^{1-\kappa}) = \frac{p_1 V_1}{\kappa - 1} \left[ \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1-\kappa} - 1 \right]$$

2 → 3:

$$dU = d_e Q \Rightarrow Q_{23} = Q_{zu} = mc_v(T_3 - T_2), \quad W_{23} = 0$$

$$V = const.: \quad \frac{T_3}{T_2} = \frac{p_3}{p_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

3 → 1:

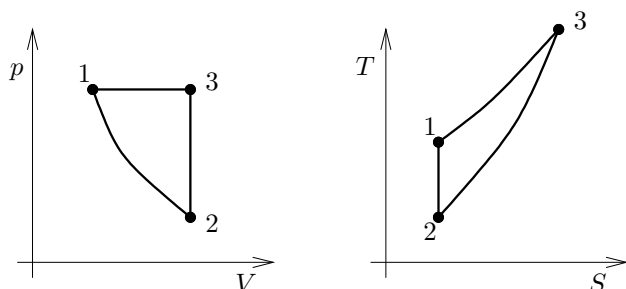
$$dH = d_e Q \Rightarrow Q_{31} = Q_{ab} = mc_p(T_1 - T_3); \quad W_{31} = -p_1(V_1 - V_3) = p_1(V_2 - V_1)$$

$$p = const.: \quad \frac{T_3}{T_1} = \frac{V_3}{V_1} = \frac{V_2}{V_1}$$

e)

$$\varepsilon_W = \frac{|Q_{ab}|}{W_0} = \left(1 - \frac{Q_{zu}}{|Q_{ab}|}\right)^{-1} = \left[1 - \frac{c_v T_3 \left(1 - \frac{p_2}{p_1}\right)}{c_p T_3 \left(1 - \frac{V_1}{V_2}\right)}\right]^{-1} = \left[1 - \frac{1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\kappa}{\kappa \left(1 - \frac{V_1}{V_2}\right)}\right]^{-1}$$

a)



- 3) Zwei feste Körper A und B mit den Wärmekapazitäten  $C_A$  und  $C_B$  ( $[C] = \text{J/K}$ ) sind im thermodynamischen Gleichgewicht bei den Temperaturen  $T_{A,1}$  und  $T_{B,1}$ . Nehmen Sie zur Vereinfachung an, die isochore und isobare Wärmekapazität sei jeweils identisch,  $C_A = C_{p,A} = C_{v,A}$  und  $C_B = C_{p,B} = C_{v,B}$ .

Berechnen Sie (jeweils als Funktion von  $C_A$ ,  $C_B$ ,  $T_{A,1}$  und  $T_{B,1}$ ) die Endtemperatur  $T_2$ , sowie die Änderung der Entropie und der inneren Energie der Körper wenn sie

- über eine Carnotmaschine,
- über eine diatherme Wand

verbunden werden und sich ein gemeinsamer Endzustand eingestellt hat. Wieviel Arbeit wird in Fall a) und b) gewonnen?

**Lösung:**

a) Das Gesamtsystem (Körper A, Körper B, masselose Carnotmaschine C) ist abgeschlossen adiabatisch. Da nur reversible Prozesse ablaufen, gilt  $dS = 0$  bzw.  $S = \text{const.}$  Seien  $S_A$  bzw.  $S_B$  die Entropien der Teilsysteme A bzw. B. Es gilt daher

$$dS = dS_A + dS_B = 0$$

$$dS_A = \frac{d_e Q}{T_A} = \frac{dH_A}{T} = C_A \frac{dT_A}{T_A}, \quad S_{A,2} - S_{A,1} = C_A \ln \frac{T_2}{T_{A,1}}$$

$$dS_B = \frac{d_e Q}{T_B} = C_B \frac{dT_B}{T_B}, \quad S_{B,2} - S_{B,1} = C_B \ln \frac{T_2}{T_{B,1}}$$

$$S_2 - S_1 = S_{A,2} - S_{A,1} + S_{B,2} - S_{B,1} = C_A \int_{T_{A,1}}^{T_2} \frac{dT_A}{T_A} + C_B \int_{T_{B,1}}^{T_2} \frac{dT_B}{T_B} =$$

$$= C \ln \left( \frac{T_2}{T_{A,1}} \right)^{C_A/C} \left( \frac{T_2}{T_{B,1}} \right)^{C_B/C} = 0, \quad \text{mit } C = C_A + C_B,$$

$$T_2 = T_{A,1}^{C_A/C} T_{B,1}^{C_B/C}$$

$$W_0 = U_2 - U_1 = C_A(T_2 - T_{A,1}) + C_B(T_2 - T_{B,1}) < 0$$

b) 1. HS:  $dU = d_e Q + d_e W$ ,  $d_e Q = 0$ ,  $d_e W = 0$ ,  $\Rightarrow U_2 = U_1$ ,  $W_0 = 0$

$$C_A(T_{A,1} - T_2) + C_B(T_{B,1} - T_2) = 0$$

$$T_2 = \frac{C_A T_{A,1} + C_B T_{B,1}}{C_A + C_B}$$

$$S_2 - S_1 = C_A \ln \frac{T_2}{T_{A,1}} + C_B \ln \frac{T_2}{T_{B,1}} = C \ln \frac{\frac{C_A T_{A,1} + C_B T_{B,1}}{C}}{T_{A,1}^{C_A/C} T_{B,1}^{C_B/C}}$$

- 4) Quecksilber ( $m = 123 \text{ g}$ ) wird ausgehend von der Temperatur  $\vartheta_1 = 30^\circ\text{C}$  (Druck  $p_1 = 1 \text{ bar}$ ) auf  $\vartheta_2 = 33^\circ\text{C}$  erwärmt.
- Auf welchen Wert  $p_2$  steigt der Druck, wenn sich das Quecksilber in einer starren Kugel befindet?
  - Um welchen Wert  $\Delta v$  ändert sich das Volumen, wenn die Temperaturänderung bei Umgebungsdruck stattfindet?

$$\beta = 181,9 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}, \quad \chi = 39 \cdot 10^{-12} \text{ Pa}^{-1}, \quad \rho = 13,5 \text{ kg/dm}^3.$$

**Lösung:**

$$\frac{\Delta v}{v} = \beta \Delta T - \chi \Delta p$$

a)

$$\Delta v = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta \Delta T = \chi \Delta p, \quad p_2 = \frac{\beta}{\chi} (T_2 - T_1) + p_1 = 140,92 \text{ bar}$$

b)

$$\Delta p = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta v}{v} = \beta \Delta T, \quad \Delta v = v \beta (T_2 - T_1) = 4,04 \cdot 10^{-5} \text{ dm}^3/\text{kg}$$

$$\text{mit } v = 1/\rho = 7,407 \cdot 10^{-2} \text{ dm}^3/\text{kg}; \quad \Delta V = m \Delta v = 4,97 \text{ mm}^3$$

5) In einem Zylinder mit beweglichem Kolben befindet sich ein Zweiphasengemisch von flüssigem und dampfförmigen Wasser mit der Gesamtmasse  $m = 2 \text{ kg}$ . Im Ausgangszustand beträgt die Temperatur  $\vartheta_1 = 150 \text{ °C}$  und das Volumen  $V_1 = 160 \text{ dm}^3$ . Das Gemisch wird nun reversibel adiabat auf den Druck  $p_2 = 27,98 \text{ bar}$  komprimiert. Berechnen Sie

- die Dampfgehalte  $x_1$  und  $x_2$ ,
- das Volumen  $V_2$ ,
- die Volumenänderungsarbeit  $W_{12}$ .
- Skizzieren Sie den Vorgang in einem  $T,s$ -Diagramm.

Dampf tabel siehe letzte Seite.

**Lösung:**

reversibel adiabate Zustandsänderung:  $s_2 = s_1$ .

a)

$$v_1 = \frac{V_1}{m} = \frac{160}{2} = 80 \text{ dm}^3/\text{kg}$$

$$v_1 = (1 - x_1)v_1' + x_1v_1'' \Rightarrow x_1 = \frac{v_1 - v_1'}{v_1'' - v_1'} = \frac{80 - 1,0908}{392,4 - 1,0908} = 0,2017$$

$$s_1 = (1 - x_1)s_1' + x_1s_1'' = 0,7983 \cdot 1,8416 + 0,2017 \cdot 6,8358 = 2,894 \text{ kJ/kgK}$$

27,98 bar, Zustand 2:  $\vartheta_2 = 230 \text{ °C}$ .

$$s_2 = s_1, \quad x_2 = \frac{s_2 - s_2'}{s_2'' - s_2'} = \frac{2,849 - 2,6102}{6,2107 - 2,6102} = 0,06632$$

b)

$$v_2 = (1 - x_2)v_2' + x_2v_2'' = 0,93368 \cdot 1,209 + 0,06632 \cdot 71,45 = 5,867 \text{ dm}^3/\text{kg}$$

$$V_2 = mv_2 = 11,73 \text{ dm}^3$$

c)  $dU = d_eQ + d_eW$ ,  $d_eQ = 0 \Rightarrow dU = d_eW$ ;  $W_{12} = U_2 - U_1 = m(u_2 - u_1)$ ;

$u = h - pv$  (Einheiten beachten:  $[h] = \text{J/kg}$ ,  $[p] = \text{Pa}$ ,  $[v] = \text{m}^3/\text{kg}$ ).

$$h_1 = 0,7983 \cdot 632,2 + 0,2017 \cdot 2745,4 = 1058 \text{ kJ/kg}, \quad h_2 = 0,93368 \cdot 990,3 + 0,06632 \cdot 2802 = 1110,5 \text{ kJ/kg}$$

$$u_1 = 1058 \cdot 10^3 - 4,76 \cdot 10^5 \cdot 80 \cdot 10^{-3} = 1020 \cdot 10^3 \text{ J/kg}, \quad u_2 = 1110 \cdot 10^3 - 27,98 \cdot 5,867 \cdot 10^2 = 1094 \cdot 10^3 \text{ J/kg}$$

$$W_{12} = U_2 - U_1 = 2(1094 - 1020) = 148 \text{ kJ}$$

6) 2,5 g eines idealen Gases konstanter spezifischer Wärmekapazitäten (Molmasse  $\mathcal{M} = 29$  kg/kmol;  $\kappa = 1,4$ ) werden ausgehend von  $p_1 = 1$  bar,  $T_1 = 290$  K isentrop auf  $p_2 = 11$  bar komprimiert. (Universelle Gaskonstante  $\mathcal{R} = 8314$  J/kmolK.)

- Berechnen Sie die spezifischen Wärmekapazitäten  $c_p$  und  $c_v$ .
- Berechnen Sie das Ausgangsvolumen  $V_1$  und die Endtemperatur  $T_2$  der Gasmenge.
- Um welchen Betrag ändert sich bei der Kompression die innere Energie  $U$  des Gases?

**Lösung:**

a)  $c_p - c_v = R, c_p/c_v = \kappa \Rightarrow (\kappa - 1)c_v = R$

$$c_v = \frac{8314}{29 \cdot 0,4} = 716,72 \text{ J/kgK}, \quad c_p = 1,4 \cdot 716,72 = 1003,4 \text{ J/kgK}$$

b)

$$p \frac{V}{m} = \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}} T, \quad V_1 = \frac{2,5 \cdot 10^{-3} \cdot 8314 \cdot 290}{1 \cdot 10^5 \cdot 29} = 2,079 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = 2,079 \text{ dm}^3$$

$$pv^\kappa = \text{const.}, v = \text{const.} \cdot T/p \Rightarrow T p^{-\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \text{const.};$$

$$T_2 = T_1 \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = 290 \cdot 11^{0,4/1,4} = 575,4 \text{ K}$$

c)

$$dU = mc_v dT \Rightarrow U_2 - U_1 = mc_v (T_2 - T_1) = 2,5 \cdot 10^{-3} \cdot 716,72 (575,4 - 290) = 511,4 \text{ J}$$

Dampftafel für Wasser

$\vartheta$ °C	$p$ bar	$v'$ dm <sup>3</sup> /kg	$v''$ m <sup>3</sup> /kg	$h'$ kJ/kg	$h''$ kJ/kg	$r$ kJ/kg	$s'$ kJ/kgK	$s''$ kJ/kgK
0,01	0,006112	1,0002	206,2	0,000	2501,6	2501,6	0,0000	9,1575
5	0,008718	1,0000	147,2	21,01	2510,7	2489,7	0,0762	9,0269
10	0,01227	1,0003	106,4	41,99	2519,9	2477,9	0,1510	8,9020
15	0,01704	1,0008	77,98	62,94	2529,1	2466,1	0,2243	8,7826
20	0,02337	1,0017	57,84	83,86	2538,2	2454,3	0,2963	8,6684
25	0,03166	1,0029	43,40	104,77	2547,3	2442,5	0,3670	8,5592
30	0,04241	1,0043	32,93	125,66	2556,4	2430,7	0,4365	8,4546
40	0,07375	1,0078	19,55	167,45	2574,4	2406,9	0,5721	8,2583
50	0,12335	1,0121	12,05	209,26	2592,2	2382,9	0,7035	8,0776
60	0,19920	1,0171	7,679	251,09	2609,7	2358,6	0,8310	7,9108
70	0,31160	1,0228	5,046	292,97	2626,9	2334,0	0,9548	7,7565
80	0,47367	1,0292	3,409	334,92	2643,8	2308,8	1,0753	7,6132
90	0,7011	1,0361	2,361	376,94	2660,1	2283,2	1,1925	7,4799
100	1,0133	1,0437	1,6730	419,1	2676,0	2256,9	1,3069	7,3554
110	1,4327	1,0519	1,2010	461,3	2691,3	2230,0	1,4185	7,2388
120	1,9854	1,0606	0,8915	503,7	2706,0	2202,3	1,5276	7,1293
130	2,701	1,0700	0,6681	546,3	2719,9	2173,6	1,6344	7,0261
140	3,614	1,0800	0,5085	589,1	2733,1	2144,0	1,7390	6,9284
150	4,760	1,0908	0,3924	632,2	2745,4	2112,2	1,8416	6,8358
160	6,181	1,1022	0,3068	675,5	2756,7	2081,2	1,9425	6,7475
170	7,920	1,1145	0,2426	719,1	2767,1	2048,0	2,0416	6,6630
180	10,027	1,1275	0,1938	763,1	2776,3	2013,2	2,1393	6,5819
190	12,551	1,1415	0,1563	807,5	2784,3	1976,8	2,2356	6,5036
200	15,549	1,1565	0,1272	852,4	2790,9	1938,5	2,3307	6,4278
210	19,077	1,173	0,1042	897,5	2796,2	1898,7	2,4247	6,3539
220	23,198	1,190	0,08604	943,7	2799,9	1856,2	2,5178	6,2817
230	27,976	1,209	0,07145	990,3	2802,0	1811,7	2,6102	6,2107
240	33,478	1,229	0,05965	1037,6	2802,2	1764,6	2,7020	6,1406
250	39,776	1,251	0,05004	1085,8	2800,4	1714,6	2,7935	6,0708
260	46,934	1,276	0,04213	1134,9	2796,4	1661,5	2,8848	6,0010
270	55,058	1,303	0,03559	1185,2	2789,9	1604,6	2,9763	5,9304
280	64,202	1,332	0,03013	1236,8	2780,4	1543,6	3,0683	5,8586
290	74,641	1,366	0,02554	1290,0	2767,6	1477,6	3,1611	5,7848
300	85,927	1,404	0,02165	1345,0	2751,0	1406,0	3,2552	5,7081
310	98,700	1,448	0,01833	1402,4	2730,0	1327,6	3,3512	5,6278
320	112,89	1,500	0,01548	1462,6	2703,0	1241,1	3,4500	5,5423
330	128,63	1,562	0,01299	1526,5	2670,2	1143,6	3,5528	5,4990
340	146,05	1,639	0,01078	1595,5	2626,2	1030,7	3,6616	5,3427
350	165,35	1,741	0,00880	1671,9	2567,7	895,7	3,7800	5,2177
360	186,75	1,896	0,00694	1764,2	2485,4	721,3	3,9210	5,0600
370	210,54	2,214	0,00497	1890,2	2342,8	452,6	4,1108	4,8144
374,15	221,2	3,170	0,00317	2107,4	2107,4	0	4,4429	4,4429