Prüfung aus Grundlagen der Thermodynamik 2. 2. 2007

2) Ein adiabater zylindrischer Behälter mit Volumen V ist durch einen beweglichen, diathermen Kolben in zwei Kammern geteilt. Das Kolbenvolumen sei gegenüber dem Behältervolumen vernachlässigbar. In beiden Kammern befinde sich das gleiche ideales Gas. Im Ausgangszustand 1 seien die Volumina beider Kammern gleich. Die Temperatur in der linken Kammer sei $T_{\mathrm{L},1}$, die Temperatur in der rechten Kammer sei $T_{\mathrm{R},1}$. Der Druck in beiden Kammern betrage p_1.

Berechnen Sie in Abhängigkeit von den gegebenen Grössen

a) das Massenverhältnis $m_\mathrm{L}/m_\mathrm{R}$,
b) die gemeinsame Temperatur in beiden Kammern, nachdem thermodynamisches Gleichgewicht erreicht worden ist,
c) das Verhältnis der Volumina im Endzustand,
d) den Druck p_2 im Endzustand.

Lösung:

a) ideales Gas: $p_1 \dfrac{V}{2} = m_\mathrm{L} R T_{\mathrm{L},1}, \quad p_1 \dfrac{V}{2} = m_\mathrm{R} R T_{\mathrm{R},1} \qquad \Rightarrow \quad \frac{m_\mathrm{L}}{m_\mathrm{R}} = \frac{T_{\mathrm{R},1}}{T_{\mathrm{L},1}}$ (1)

b) $\mathrm{d}U = \mathrm{d_e}Q + \mathrm{d_e}W = 0$

$\mathrm{d}U = \mathrm{d}U_\mathrm{L} + \mathrm{d}U_\mathrm{R} = m_\mathrm{L} c_v \mathrm{d}T_\mathrm{L} + m_\mathrm{R} c_v \mathrm{d}T_\mathrm{R} = 0$

$m_\mathrm{L}(T_2 - T_{\mathrm{L},1}) + m_\mathrm{R}(T_2 - T_{\mathrm{R},1}) = 0 \qquad \Rightarrow \quad T_2 = \dfrac{2T_{\mathrm{R},1}}{\frac{T_{\mathrm{R},1}}{T_{\mathrm{L},1}} + 1}$ (2)

c) $p_2 V_{\mathrm{L},2} = m_\mathrm{L} R T_2, \quad p_2 V_{\mathrm{R},2} = m_\mathrm{R} R T_2 \qquad \Rightarrow \frac{V_{\mathrm{L},2}}{V_{\mathrm{R},2}} = \frac{m_\mathrm{L}}{m_\mathrm{R}} = \frac{T_{\mathrm{R},1}}{T_{\mathrm{L},1}}$

d) $p_2 V = (m_\mathrm{L} + m_\mathrm{R}) R T_2$, dies ergibt in Kombination mit (1) und (2)

$$2\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{m_\mathrm{L}}{m_\mathrm{R}} + 1\right)\frac{T_2}{T_{\mathrm{R},1}} \qquad \Rightarrow \quad p_2 = p_1$$

3) Eine Maschine mit idealem Gas gegebener konstanter spezifischer Wärmekapazitäten arbeitet nach folgendem reversiblen Kreisprozess:

$1 \to 2$ isochore Entspannung;
$2 \to 3$ isotherme Expansion;
$3 \to 1$ adiabate Kompression.

a) Zeichnen Sie die Zustandsänderungen in ein p,v- und ein T,s-Diagramm ein. Skizzieren Sie in den Diagrammen die Nettoarbeit und die zu- bzw. abgeführten Wärmemengen. Handelt es sich bei dieser Maschine um eine Wärmekraft- oder eine Kältemaschine?
b) Berechnen Sie die zu- bzw. abgeführten Wärmemengen als Funktion von T_1 und T_2.
c) Berechnen Sie die Leistungszahl als Funktion von T_1 und T_2.

Lösung:

a) Kältemaschine

b) $1 \to 2 \qquad \mathrm{d}u = \mathrm{d_e}q = c_v \mathrm{d}T \Rightarrow q_{12} = c_v(T_2 - T_1) = -|q_\mathrm{ab}|$

$2 \to 3 \qquad \mathrm{d}u = 0, \qquad \mathrm{d_e}q = p\mathrm{d}v,$

$c_p - c_v = R, \qquad \frac{c_p}{c_v} = \kappa, \qquad p = \frac{RT}{v}, \qquad \Rightarrow \quad q_{23} = RT_2 \ln\frac{v_3}{v_1} = q_\mathrm{zu}$

$3 \to 1 \qquad p_3 v_3^\kappa = p_1 v_1^\kappa; \quad p_3 = \frac{RT_2}{v_3},\ p_1 = \frac{RT_1}{v_1} \qquad \Rightarrow \frac{v_3}{v_1} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \quad \Rightarrow \qquad q_\mathrm{zu} = c_v T_2 \ln\frac{T_1}{T_2}$

oder:

$\mathrm{d_e}q = T\mathrm{d}s \quad \Rightarrow \quad q_{23} = T_2(s_3 - s_2) = T_2(s_1 - s_2);\ s_1 - s_2 = c_v \ln\frac{T_1}{T_2} \quad \Rightarrow \quad q_{23} = c_v T_2 \ln\frac{T_1}{T_2}$

c) $\varepsilon_\mathrm{K} = \frac{q_\mathrm{zu}}{w_0} = \left(\frac{|q_\mathrm{ab}|}{q_\mathrm{zu}} - 1\right)^{-1} = \frac{T_2 \ln\frac{T_1}{T_2}}{(T_1 - T_2) - T_2 \ln\frac{T_1}{T_2}}$

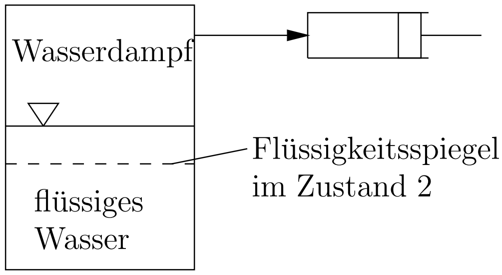
4) Ein Kessel mit dem Rauminhalt $V_K = 10\,\mathrm{m}^3$ enthält im Zustand 1 ein Zweiphasengemisch aus flüssigem und dampfförmigem Wasser. Die Gesamtmasse beträgt 4000 kg und der Druck im Kessel $p_1 = 55$ bar.
Dem Kessel werden bei konstantem Druck 100 kg gesättigter Dampf entnommen wodurch ein Zustand 2 erreicht wird.

a) Wie groß ist der Dampfgehalt x_1 im Kessel?

b) Berechnen Sie die Massen $m_{D,1}$ des Dampfes und $m_{W,1}$ des siedenden Wassers im Zustand 1 sowie die Massen $m_{D,2}$ und $m_{W,2}$ des Dampfes bzw. Wassers, die sich nach der Entnahme noch im Kessel befinden.

c) Welche Wärmemenge ist dem Wasser zuzuführen, wenn der Druck im Kessel während der Entnahme konstant bleiben soll ($p_1 = p_2$)?

Hinweis: Dampftafel am Ende des Prüfungsbogens



Lösung:

a)

$$v_1 = 2{,}5 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^3/\mathrm{kg}$$

$$x_1 = \frac{v_1 - v_1'}{v_1'' - v_1'}$$

Aus linearer Interpolation in der Dampftafel für $p_1 = 55\,\mathrm{bar}$:

$$v_1' = 1{,}303\,\mathrm{dm}^3/\mathrm{kg}, \quad v_1'' = 35{,}64\,\mathrm{dm}^3/\mathrm{kg} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0{,}03486$$

b)

$$m_{D,1} = 139{,}4\,\mathrm{kg}, \quad m_{W,1} = 3860{,}6\,\mathrm{kg}$$

$$v_2 = V/(m - \Delta m) = 2{,}564 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^3/\mathrm{kg} \quad \Rightarrow \quad x_2 = 0{,}03673$$

$$m_{D,2} = 143{,}2\,\mathrm{kg}, \quad m_{W,2} = 3756{,}8\,\mathrm{kg}$$

c) 1.HS (für offenes, raumfestes System):

$$U_2 - U_1 = Q_{12} - \Delta m h''$$

Wegen $p_1 = p_2$ und $V_1 = V_2$ gilt $H_2 - H_1 = U_2 - U_1$ und somit

$$Q_{12} = H_2 - H_1 + \Delta m h'' = (m_{W,2} - m_{W,1})h' + (m_{D,2} - m_{D,1} + \Delta m)h'' = 166{,}61\,\mathrm{MJ}$$

mit den mittels linearer Interpolation in der Dampftafel ermittelten Werten

$$h' = 1184{,}8\,\mathrm{kJ/kg}, \quad h'' = 2789{,}9\,\mathrm{kJ/kg}$$

5) Ein Stahlblock (Anfangstemperatur $\vartheta_{\mathrm{St}} = 700\,^\circ\mathrm{C}$, $c_{\mathrm{St}} = 460$ J/kgK, Masse $m = 10$ kg) wird in Wasser ($c_{\mathrm{W}} = 4{,}19$ kJ/kgK) bis zum Erreichen der gemeinsamen Endtemperatur $\vartheta_{\mathrm{E}} = 50\,^\circ\mathrm{C}$ abgeschreckt. Berechnen Sie die Entropieerhöhung $(S_2 - S_1)$ des Systems Stahlblock-Wasser für eine Wasseranfangstemperatur von $10\,^\circ\mathrm{C}$.
Hinweis: Berechnen Sie zuerst die Wassermasse.

Lösung:

Wasser und Stahlblock werden als getrennte Systeme betrachtet. Die Wassermasse ergibt sich aus dem Gleichsetzen der ausgetauschten Wärmen,

$$-m_{\mathrm{St}} c_{\mathrm{St}} (\vartheta_{\mathrm{E}} - \vartheta_{\mathrm{St}}) = m_{\mathrm{W}} c_{\mathrm{W}} (\vartheta_{\mathrm{E}} - \vartheta_{\mathrm{W}}), \quad \Rightarrow m_{\mathrm{W}} = 17{,}84\mathrm{kg}.$$

In beiden Systemen gilt $T\mathrm{d}S = \mathrm{d}Q$, $\mathrm{d}Q = mc\mathrm{d}T$, daher

$$S_2 - S_1 = mc \int_{T_1}^{T_2} \frac{1}{T} \mathrm{d}T = mc \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

$$S_2 - S_1 = m_{\mathrm{St}} c_{\mathrm{St}} \ln\left(\frac{T_{\mathrm{E}}}{T_{\mathrm{St}}}\right) + m_{\mathrm{W}} c_{\mathrm{W}} \ln\left(\frac{T_{\mathrm{E}}}{T_{\mathrm{W}}}\right) = -5071{,}1 + 9877{,}4 = 4806{,}3\,\mathrm{J/K}$$

6) Feuchte Luft ($m_\mathrm{L} = 30$ kg) wird ausgehend vom Zustand 1 ($p_1 = 2$ bar, $\vartheta_1 = 23\,°\mathrm{C}$, $\varphi_1 = 0{,}85$) quasistatisch isobar abgekühlt, sodass $m_\mathrm{F} = 100$ g Kondensat ausfällt (Zustand 2). Nach isobar-isothermer Entnahme des Kondensats (Zustand 3) wird die Luft auf $p_4 = 0{,}5\,p_1$ quasistatisch-isotherm expandiert.

a) Berechnen Sie den Wassergehalt x_1 sowie den Flüssigkeits- und Dampfgehalt $x_{\mathrm{F},2}$ bzw. $x_{\mathrm{D},2}$.

b) Berechnen Sie ϑ_2 und geben Sie an, wieviel Wärme Q_{12} entzogen werden muss.

c) Welche Volumenänderungsarbeit W_{34} wird bei der Expansion von p_3 auf p_4 verrichtet, wenn der Wasseranteil hiebei vernachlässigt werden kann?

$$c_{p\mathrm{L}} = 1\,\mathrm{kJ/kg\,K}, \quad c_{p\mathrm{D}} = 1{,}86\,\mathrm{kJ/kg\,K}, \quad c_{p\mathrm{F}} = 4{,}19\,\mathrm{kJ/kg\,K}, \quad r_0 = 2501{,}6\,\mathrm{kJ/kg},$$

$$\varphi = p_\mathrm{D}/p_\mathrm{s}, \quad x_\mathrm{D} = 0{,}622\frac{p_\mathrm{D}}{p - p_\mathrm{D}},$$

$$\mathcal{M}_\mathrm{L} = 29\,\mathrm{kg/kmol}, \quad \mathcal{R} = 8314\,\mathrm{J/kmolK}.$$

Bemerkung: Liegt ein gesuchter Wert in der Dampftafel zwischen zwei gegebenen, so ist zwischen diesen beiden linear zu interpolieren.

Dampfdruck-tabelle für Wasser:

ϑ °C	p_s mbar
0	6,11
1	6,57
2	7,06
3	7,58
4	8,13
5	8,72
6	9,35
7	10,02
8	10,72
9	11,48
10	12,28
11	13,12
12	14,02
13	14,97
14	15,98
15	17,05
16	18,17
17	19,37
18	20,63
19	21,96
20	23,38
21	24,86
22	26,43
23	28,09
25	31,66

Lösung:

a) Dampfgehalt im Ausgangszustand 1:

$$p_{\mathrm{D},1} = \varphi p_\mathrm{s}(23\,°\mathrm{C}) = 23{,}88 \text{ mbar}$$

$$x_1 = x_{\mathrm{D},1} = 0{,}622\frac{p_{\mathrm{D},1}}{p_1 - p_{\mathrm{D},1}} = 0{,}622\frac{23{,}88}{2000 - 23{,}88} = 0{,}007516$$

Kondensatgehalt im Zustand 2: $x_{\mathrm{F},2} = \frac{m_\mathrm{F}}{m_\mathrm{L}} = \frac{0{,}1}{30} = 0{,}003333$

Dampfgehalt im Endzustand 2: $x_{\mathrm{D},2} = x_{\mathrm{D},1} - x_{\mathrm{F},2} = 0{,}004183$

b) Dampfdruck im Zustand 2, ($p_2 = p_1$): $p_{\mathrm{D},2} = \frac{x_{\mathrm{D},2}p_2}{0{,}622 + x_{\mathrm{D},2}} = 13{,}36$ mbar

Bestimmung der Temperatur aus der Dampftafel (lineare Interpolation):

$$\vartheta_2 = 11 + \frac{13{,}36 - 13{,}12}{14{,}02 - 13{,}12} \approx 11{,}3\,°\mathrm{C}$$

1. Hauptsatz $Q_{12} = H_2 - H_1$ (isobare Zustandsänderung):

$$h_{1+x,1} = c_{p\mathrm{L}}\vartheta_1 + (c_{p\mathrm{D}}\vartheta_1 + r_0)x_{\mathrm{D},1} = 42{,}12\,\mathrm{kJ/kg}$$

$$h_{1+x,2} = c_{p\mathrm{L}}\vartheta_2 + (c_{p\mathrm{D}}\vartheta_2 + r_0)x_{\mathrm{D},2} + c_{p\mathrm{F}}x_{\mathrm{F},2}\vartheta_2 = 22{,}01\mathrm{kJ/kg}$$

$$Q_{12} = m_\mathrm{L}(h_{1+x,2} - h_{1+x,1}) = -603{,}3 \text{ kJ/kg}$$

c) Arbeit bei isothermer Expansion ($p_3 = p_2 = p_1 = 2$ bar, $p_4 = 1$ bar):

$$W_{34} = -\int p\,\mathrm{d}V = m_L R T_2 \int_{p_3}^{p_4} \frac{\mathrm{d}p}{p} = m_L R T_2 \ln\frac{p_4}{p_3}$$

$$W_{34} = 30\frac{8314}{29}284{,}5\ln 0{,}5 = -1{,}696 \text{ MJ}$$