Prüfung aus Grundlagen der Thermodynamik 6. 10. 2006

2) Zwei Behälter A und B, die durch eine sehr kleine Öffnung verbunden sind, enthalten ideales Gas. Das Verhältnis der Volumina der beiden Kessel beträgt: $V_\mathrm{A}/V_\mathrm{B} = 4$. Das Gas im Ausgangszustand befindet sich im thermodynamischen Gleichgewichtszustand bei einer Temperatur von $T = T_1$ und einem Druck von $p = p_1$. Die Temperatur im Behälter A wird nun auf $T_2 > T_1$ erhöht, im Behälter B bleibt sie unverändert. Nachdem sich ein stationärer Zustand eingestellt hat, beträgt der Druck in den Behältern $p_2 = 2p_1$. Berechnen Sie das Verhältnis von T_2 zu T_1.

Lösung:

Im Zustand 2 herrscht im Behälter B die Temperatur T_2, im Behälter A die Temperatur T_1. Mit der Zustandsgleichung für ein ideales Gas erhält man

$$m_{\mathrm{A},1} = p_1 V_\mathrm{A}/(RT_1), \quad m_{\mathrm{B},1} = p_1 V_\mathrm{B}/(RT_1),$$

$$m_{\mathrm{A},2} = p_2 V_\mathrm{A}/(RT_2), \quad m_{\mathrm{B},2} = p_2 V_\mathrm{B}/(RT_1)$$

Die Massenerhaltung verlangt $m_{\mathrm{A},1} + m_{\mathrm{B},1} = m_{\mathrm{A},2} + m_{\mathrm{B},2}$, somit nach Substitution

$$\frac{p_1 V_\mathrm{A}}{RT_1} + \frac{p_1 V_\mathrm{B}}{RT_1} = \frac{p_2 V_\mathrm{A}}{RT_2} + \frac{p_2 V_\mathrm{B}}{RT_1} \qquad \Big| \times \frac{RT_1}{p_1 V_\mathrm{B}}$$

$$\frac{V_\mathrm{A}}{V_\mathrm{B}} + 1 - \frac{p_2}{p_1} = \frac{T_1}{T_2}\frac{p_2}{p_1}\frac{V_\mathrm{A}}{V_\mathrm{B}}$$

$$\Rightarrow \underline{\frac{T_2}{T_1} = \frac{2 \cdot 4}{4 + 1 - 2} = \frac{8}{3}}$$

3) Eine Maschine mit idealem Gas als Arbeitsmedium (Molmasse $\mathcal{M}$ und Isentropenexponent κ gegeben) arbeitet nach folgendem reversiblen Kreisprozess:

$1 \rightarrow 2$ Isobare Expansion

$2 \rightarrow 3$ Adiabate Expansion

$3 \rightarrow 1$ Isotherme Kompression von p_3 auf p_1.

Die universelle Gaskonstante $\mathcal{R}$ ist gegeben.

a) Zeichnen Sie die Zustandsänderungen in ein p,v- und ein T,s-Diagramm ein.
b) Handelt es sich bei dieser Maschine um eine Wärmekraft- oder eine Kältemaschine?
c) Bei welchen Prozessen wird Wärme abgegeben bzw. aufgenommen?
d) Skizzieren Sie in den Diagrammen die Nettoarbeit und die zu- bzw. abgeführten Wärmen.
e) Berechnen Sie den thermischen Wirkungsgrad als Funktion von T_1 und T_2.

Lösung:

b) Wärmekraftmaschine: Es wird mehr Wärme zugeführt als abgegeben, und es wird Arbeit verrichtet.
c) $1 \rightarrow 2$: Wärme wird aufgenommen.
$3 \rightarrow 1$: Wärme wird abgegeben.
e) $c_v = \frac{1}{\kappa-1}\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}}$, $c_p = \frac{\kappa}{\kappa-1}\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}}$, $R = \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}}$

Der thermische Wirkungsgrad ist das Verhältnis von Nutzen zu Aufwand, $\eta = \dfrac{|w_0|}{q_\mathrm{zu}} = 1 - \dfrac{|q_\mathrm{ab}|}{q_\mathrm{zu}}$.

$$q_\mathrm{zu} = q_{12}; \quad 1 \rightarrow 2: \text{ Isobare } \Rightarrow \mathrm{d_e}q = \mathrm{d}h + v\mathrm{d}p = c_p \mathrm{d}T; \quad q_{12} = \int_1^2 c_p \,\mathrm{d}T = c_p(T_2 - T_1).$$

$$|q_{\mathrm{ab}}| = |q_{31}| = q_{13}; \quad \mathrm{d_e}q = T\mathrm{d}s \Rightarrow q_{13} = \int_1^3 T_1\,\mathrm{d}s = T_1(s_3 - s_1)$$

Mit $s_2 = s_3$ erhält man $q_{13} = T_1(s_2 - s_1)$.

$$s_2 - s_1: \quad \mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d_e}q}{T} = \frac{\mathrm{d}h - v\mathrm{d}p}{T}; \text{ Isobare } \Rightarrow \mathrm{d}s = \frac{c_p}{T}\mathrm{d}T; \quad s_2 - s_1 = c_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

$$\underline{\eta} = 1 - \frac{q_{13}}{q_{12}} = 1 - \frac{T_1 c_p \ln(T_2/T_1)}{c_p(T_2 - T_1)} \underline{= 1 - \frac{T_1}{T_2 - T_1} \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)}$$

Ein aufwendigerer Weg, um q_{13} zu berechnen:

$$\mathrm{d_e}q = \mathrm{d}h - v\mathrm{d}p; \text{ Isotherme, id. Gas } \Rightarrow \mathrm{d_e}q = \frac{-RT}{p}\mathrm{d}p; \quad q_{13} = RT_1 \ln\left(\frac{p_1}{p_3}\right)$$

$$p_1 = p_2,\ T_3 = T_1, \text{ id. Gas } \Rightarrow \frac{p_1}{p_3} = \frac{p_2}{p_3} = \frac{T_2}{T_1}\frac{v_3}{v_2}$$

$$2 \to 3: \text{ isentrope, } pv^\kappa = const. \Rightarrow \frac{v_3}{v_2} = \left(\frac{p_2}{p_3}\right)^{1/\kappa}.$$

Einsetzen ergibt

$$\frac{p_2}{p_3} = \frac{T_2}{T_1}\left(\frac{p_2}{p_3}\right)^{1/\kappa} \Rightarrow \frac{p_2}{p_3} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$$

$$q_{13} = RT_1 \frac{\kappa}{\kappa - 1} \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = \frac{(c_p - c_v) T_1 c_p}{c_v(\frac{c_p}{c_v} - 1)} \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = T_1 c_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

4) Eine Carnotmaschine arbeitet zwischen einem Körper (Masse $m = 100\,\mathrm{kg}$, spezifische Wärmekapazität $c = 4{,}19\,\mathrm{kJ/kgK}$, Ausgangstemperatur $\vartheta_0 = 100\,^\circ\mathrm{C}$) und der Umgebung (Umgebungstemperatur $\vartheta_1 = 10\,^\circ\mathrm{C}$).
Wieviel Arbeit kann mittels der Carnotmaschine bei dieser Anordnung maximal gewonnen werden?
Hinweis: Bestimmen Sie die differentielle Arbeit $\mathrm{d_e}W$, die bei einer differentiellen Temperaturänderung $\mathrm{d}T$ des Körpers gewonnen wird.

Lösung:

Der momentane thermische Wirkungsgrad ist für eine Carnotmaschine $\eta = \dfrac{|\mathrm{d_e}W|}{\mathrm{d_e}Q_{\mathrm{zu}}} = 1 - \dfrac{T_1}{T}$.
Die dem Körper zugeführte Wärme ist $\mathrm{d_e}Q = mc\mathrm{d}T = -\mathrm{d_e}Q_{\mathrm{zu}}$. Die gewonnene Arbeit ist

$$|\mathrm{d_e}W| = -mc\left(1 - \frac{T_1}{T}\right)\mathrm{d}T,$$

$$\underline{|W|} = -mc\int_{T_0}^{T_1}\left(1 - \frac{T_1}{T}\right)\mathrm{d}T = mc_p\left[T_0 - T_1 - T_1\ln\left(\frac{T_0}{T_1}\right)\right] \underline{= 4965\,\mathrm{kJ}}.$$

5) In einem mit einem reibungsfrei beweglichen Kolben verschlossenen Zylinder befindet sich im Ausgangszustand trockene Luft mit der Temperatur $\vartheta = 25\,°\mathrm{C}$, dem Druck $p = 1\,\mathrm{bar}$ und dem Volumen $V_1 = 0{,}5\,\mathrm{m}^3$. Es wird nun flüssiges Wasser der Masse $m_\mathrm{W} = 1\,\mathrm{g}$ und der Temperatur $\vartheta = 25\,°\mathrm{C}$ eingespritzt. Man berechne die Mischtemperatur und den Sättigungsgrad ψ bei konstant bleibendem Druck.

$$\mathcal{R} = 8{,}314\,\mathrm{kJ/kmolK}, \quad \mathcal{M}_\mathrm{L} = 29\,\mathrm{kg/kmol},$$

$$c_\mathrm{p,Luft} = 1\,\mathrm{kJ/kgK}, \quad c_\mathrm{p,fl.Wasser} = 4{,}19\,\mathrm{kJ/kgK}, \quad c_\mathrm{p,Dampf} = 1{,}9\,\mathrm{kJ/kgK}, \quad r = 2501\,\mathrm{kJ/kg},$$

$$x_\mathrm{D} = 0{,}622\frac{p_\mathrm{D}}{p - p_\mathrm{D}}, \quad \varphi = \frac{p_\mathrm{D}}{p_\mathrm{s}}, \quad \psi = \frac{x_\mathrm{D}}{x_\mathrm{s}}.$$

Dampfdrucktabelle für Wasser:

ϑ °C	p_s mbar
0	6,11
1	6,57
2	7,06
3	7,58
4	8,13
15	17,05
16	18,17
17	19,37
18	20,63
19	21,96
20	23,38
21	24,86
22	26,43
23	28,09
25	31,66
90	701,1
91	728,1
92	756,1
93	784,9
94	814,6
95	845,3
96	876,9
97	909,4
98	943,0
99	977,6

Lösung:

Masse der Luft: $m_\mathrm{L} = \dfrac{pV\mathcal{M}}{\mathcal{R}T} = 0.585\,\mathrm{kg}$.

Der Mischungsvorgang verläuft isobar, mit der Umgebung wird keine Wärme ausgetauscht: $\mathrm{d_e}Q = 0 = \mathrm{d}H \Rightarrow H_1 = H_2$. Nehmen wir vorerst an, das Wasser verdampfe vollständig, dann gilt

$$m_\mathrm{L}c_{p,L}\vartheta_1 + m_\mathrm{W}c_{p,W}\vartheta_1 = m_\mathrm{L}c_{p,L}\vartheta_2 + m_\mathrm{W}c_{p,D}\vartheta_2 + m_\mathrm{W}r \quad \Rightarrow \underline{\vartheta_2 = 20.8\,°\mathrm{C}}$$

Der Wassergehalt ist $x_2 = m_\mathrm{W}/m_\mathrm{L} = 1/585 = 1.709 \cdot 10^{-3}$. Aus der Dampfdrucktabelle liest man den Sättigungsdruck $p_\mathrm{s}(20.8\,°\mathrm{C}) \approx 24.6\,\mathrm{mbar}$ ab. Der Wassergehalt bei Sättigung ist damit $x_\mathrm{s} = 0.622\dfrac{2.46 \cdot 10^3}{(1 - 2.46 \cdot 10^{-2}) \cdot 10^5} = 1.57 \cdot 10^{-2}$. Wegen $x_\mathrm{s} > x_2$ stellt sich obige Annahme, das Wasser verdampfe vollständig, als richtig heraus. Der Sättigungsgrad ist $\underline{\psi = \dfrac{x_2}{x_\mathrm{s}} = 0.11}$.

6) Eis ($m_{\mathrm{E}} = 1{,}5\,\mathrm{kg}$, $\vartheta_{\mathrm{E}} = -10\,°\mathrm{C}$) und flüssiges Wasser ($m_{\mathrm{W}} = 2\,\mathrm{kg}$) werden in einem adiabaten Behälter bei konstantem Druck von $p = 1\,\mathrm{bar}$ gemischt. Berechnen Sie die notwendigen Anfangstemperaturen (ϑ_{W1}, ϑ_{W2}) des flüssigen Wassers für zwei verschiedene Endzustände im thermodynamischen Gleichgewicht:

   a) Das Eis ist gerade vollständig geschmolzen.

   b) Die Massen von Eis und flüssigem Wasser sind die selben wie im Ausgangszustand.

   Wieviel Entropie wurde dabei jeweils produziert?

$$c_{\mathrm{p,fest}} = 2{,}1\,\mathrm{kJ/kgK}, \quad c_{\mathrm{p,flüssig}} = 4{,}19\,\mathrm{kJ/kgK}, \quad l = 333{,}5\,\mathrm{kJ/kg}.$$

Lösung:

Isobare Zustandsänderung, deshalb $\mathrm{d_e}Q = \mathrm{d}H = \mathrm{d}H_{\mathrm{E}} + \mathrm{d}H_{\mathrm{W}} \Rightarrow H_{\mathrm{E1}} + H_{\mathrm{W1}} = H_{\mathrm{E2}} + H_{\mathrm{W2}}$.

a)

$$m_{\mathrm{E}}\,(c_{\mathrm{p,\,fest}}\vartheta_{\mathrm{E}} - l) + m_{\mathrm{W}}c_{\mathrm{p,\,flüssig}}\vartheta_{\mathrm{W1}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\vartheta_{\mathrm{W1}}} = \frac{-m_{\mathrm{E}}c_{\mathrm{p,fest}}\vartheta_{\mathrm{E}} + l}{m_{\mathrm{W}}c_{\mathrm{p,\,flüssig}}} \underline{= 63.4546\,°\mathrm{C}}$$

b)

$$m_{\mathrm{E}}\,(c_{\mathrm{p,\,fest}}\vartheta_{\mathrm{E}} - l) + m_{\mathrm{W}}c_{\mathrm{p,\,flüssig}}\vartheta_{\mathrm{W2}} = -m_{\mathrm{E}}l$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\vartheta_{\mathrm{W2}}} = \frac{-m_{\mathrm{E}}c_{\mathrm{p,\,fest}}\vartheta_{\mathrm{E}}}{m_{\mathrm{W}}c_{\mathrm{p,\,flüssig}}} \underline{= 3.7589\,°\mathrm{C}}$$

Entropieproduktion: Während das Gesamtsystem keine Wärme mit der Umgebung austauscht, wird zwischen Eis und Wasser Wärme ausgetauscht: $\mathrm{d}S = \mathrm{d_e}S + \mathrm{d_i}S$, $\mathrm{d_e}S = 0$, $\mathrm{d_i}S = \mathrm{d}S_{\mathrm{E}} + \mathrm{d}S_{\mathrm{W}}$. $\mathrm{d}S_{\mathrm{E}} = \dfrac{\mathrm{d_e}Q_{\mathrm{E}}}{T} = \dfrac{\mathrm{d}H_{\mathrm{E}}}{T}$, $\mathrm{d}S_{\mathrm{W}} = \dfrac{\mathrm{d}H_{\mathrm{W}}}{T}$; $\mathrm{d}H_{\mathrm{E}/W} = m_{\mathrm{E}/W}c_{\mathrm{p,\,fest/flüssig}}\mathrm{d}T$.

a) Mit der Schmelzentropie, $S^{II} - S^{\mathrm{I}} = m_{\mathrm{E}}l/T_{\mathrm{m}}$, $T_{\mathrm{m}} = 273.15\,\mathrm{K}$, ergibt sich

$$\underline{S_2 - S_1} = m_{\mathrm{E}}c_{\mathrm{p,\,fest}}\ln\left(\frac{T_{\mathrm{m}}}{T_{\mathrm{E}}}\right) + m_{\mathrm{W}}c_{\mathrm{p,\,flüssig}}\ln\left(\frac{T_{\mathrm{m}}}{T_{\mathrm{W1}}}\right) + S^{II} - S^{\mathrm{I}} \underline{= 198.4\,\mathrm{J/K}}$$

b)

$$\underline{S_2 - S_1} = m_{\mathrm{E}}c_{\mathrm{p,\,fest}}\ln\left(\frac{T_{\mathrm{m}}}{T_{\mathrm{E}}}\right) + m_{\mathrm{W}}c_{\mathrm{p,\,flüssig}}\ln\left(\frac{T_{\mathrm{m}}}{T_{\mathrm{W2}}}\right) \underline{= 3.0\,\mathrm{J/K}}$$