# Prüfung aus Grundlagen der Thermodynamik: 4. 8. 2006

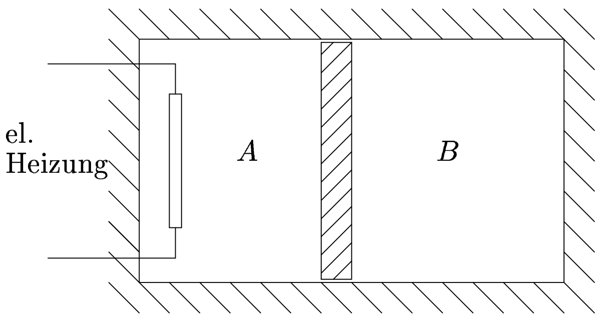
2) In einem adiabaten, geschlossenen Zylinder trennt ein adiabater, reibungslos verschiebbarer Kolben zwei mit dem gleichen idealen Gas ($R$,$\kappa$) gefüllte Räume $A$ und $B$ (siehe Skizze). Die Anfangszustände ($T_{A1}$,$p_{A1} = p_{B1}$,$T_{B1}$,$m_A$,$m_B$) sind gegeben.

   a) Berechnen Sie $V_{A1}$ und $V_{B1}$.

   Während der Zeit $\Delta t$ führt der vom Strom $I$ durchflossene Widerstand aufgrund der angelegten Spannung $U$ dem Raum $A$ Energie zu, sodaß der Kolben quasistatisch verschoben und der Raum $A$ um $\Delta V_A$ vergrößert wird.

   b) Berechnen Sie die dem Raum $B$ zugeführte Volumenänderungsarbeit $W_B$ in Abhängigkeit von $\Delta V_A$.

   c) Berechnen Sie die Temperatur $T_{A2}$ in Abhängigkeit von $\Delta V_A$
   (Hinweis: Die Energiezufuhr mittels elektrischer Heizung in Raum $A$ erfolgt irreversibel!).




**Lösung:**

a) id. Gas: $\underline{V_{A1} = Rm_A T_A/p_{A1}}$, $\underline{V_{B1} = Rm_B T_B/p_{B1}}$.

b) $W_B = -\int_{V_{B1}}^{V_{B2}} p\,dV$, mit Isentropenbeziehung $pV^\kappa = const.$, $\Rightarrow$ $p = p_{B1}V_{B1}^\kappa V^{-\kappa}$ sowie mit $V_{B2} = V_{B1} - \Delta V_A$ folgt

$$\underline{W_B} = \frac{p_{B1}V_{B1}^\kappa}{\kappa - 1}\left(V_{B2}^{1-\kappa} - V_{B1}^{1-\kappa}\right) = \underline{\frac{p_{B1}V_{B1}}{\kappa - 1}\left[\left(1 - \frac{\Delta V_A}{V_{B1}}\right)^{1-\kappa} - 1\right]}$$

Alternative: Wegen $\mathrm{d}U = \mathrm{d_e}W$ gilt $W_B = m_B c_v (T_{B2} - T_{B1})$, es folgt mit der Isentropenbeziehung $TV^{\kappa-1} = const.$ obiges Ergebnis.

c) Die Zustandsgl. für ideales Gas liefert $T_{A2} = \dfrac{p_{A2}V_{A2}}{m_A R}$, substituieren von $p_{A2} = p_{B2}$, $V_{A2} = V_{A1} + \Delta V_A$ und $p_{B2} = p_{B1}V_{B1}^\kappa V_{B2}^{-\kappa}$ ergibt

$$\underline{T_{A2} = T_{A1}\left(1 - \frac{\Delta V_A}{V_{B1}}\right)^{-\kappa}\left(1 + \frac{\Delta V_A}{V_{A1}}\right)}$$

3) Eine Maschine mit idealem Gas als Arbeitsmedium (Molmasse $\mathcal{M}$ und Isentropenexponent $\kappa$ gegeben) arbeitet nach folgendem reversiblen Kreisprozeß:

$1 \to 2$ Isobare Expansion

$2 \to 3$ Adiabate Expansion

$3 \to 1$ Isotherme Kompression von $p_3$ auf $p_1$.

Die universelle Gaskonstante $\mathcal{R}$ ist gegeben.

a) Zeichnen Sie die Zustandsänderungen in ein $p$,$v$- und ein $T$,$s$-Diagramm ein.
b) Handelt es sich bei dieser Maschine um eine Wärmekraft- oder eine Kältemaschine?
c) Bei welchen Prozessen wird Wärme abgegeben bzw. aufgenommen?
d) Skizzieren Sie in den Diagrammen die Nettoarbeit und die zu- bzw. abgeführten Wärmen.
e) Berechnen Sie den thermischen Wirkungsgrad als Funktion von $T_1$ und $T_2$.

**Lösung:**

b) Wärmekraftmaschine: Es wird mehr Wärme zugeführt als abgegeben, und es wird Arbeit verrichtet.
c) $1 \to 2$: Wärme wird aufgenommen.
$3 \to 1$: Wärme wird abgegeben.
e) $c_v = \frac{1}{\kappa-1}\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}}$ , $c_p = \frac{\kappa}{\kappa-1}\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}}$ , $R = \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}}$

Der thermische Wirkungsgrad ist das Verhältnis von Nutzen zu Aufwand, $\eta = \dfrac{|w_0|}{q_{\text{zu}}} = 1 - \dfrac{|q_{\text{ab}}|}{q_{\text{zu}}}$.

$$q_{\text{zu}} = q_{12}; \quad 1 \to 2: \text{ Isobare } \Rightarrow \mathrm{d_e}q = \mathrm{d}h + v\mathrm{d}p = c_p\mathrm{d}T; \quad q_{12} = \int_1^2 c_p\,\mathrm{d}T = c_p(T_2 - T_1).$$

$$|q_{\text{ab}}| = |q_{31}| = q_{13}; \quad \mathrm{d_e}q = T\mathrm{d}s \Rightarrow q_{13} = \int_1^3 T_1\,\mathrm{d}s = T_1(s_3 - s_1)$$

Mit $s_2 = s_3$ erhält man $q_{13} = T_1(s_2 - s_1)$.

$$s_2 - s_1: \quad \mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d_e}q}{T} = \frac{\mathrm{d}h - v\mathrm{d}p}{T}; \text{ Isobare } \Rightarrow \mathrm{d}s = \frac{c_p}{T}\mathrm{d}T; \quad s_2 - s_1 = c_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

$$\underline{\eta} = 1 - \frac{q_{13}}{q_{12}} = 1 - \frac{T_1 c_p \ln(T_2/T_1)}{c_p(T_2 - T_1)} = \underline{1 - \frac{T_1}{T_2 - T_1}\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)}$$

Ein aufwendigerer Weg, um $q_{13}$ zu berechnen:

$$\mathrm{d_e}q = \mathrm{d}h - v\mathrm{d}p; \text{ Isotherme, id. Gas } \Rightarrow \mathrm{d_e}q = \frac{-RT}{p}\mathrm{d}p; \quad q_{13} = RT_1 \ln\left(\frac{p_1}{p_3}\right)$$

$$p_1 = p_2,\ T_3 = T_1, \text{ id. Gas } \Rightarrow \frac{p_1}{p_3} = \frac{p_2}{p_3} = \frac{T_2}{T_1}\frac{v_3}{v_2}$$

$$2 \to 3: \text{ isentrope, } pv^\kappa = const. \Rightarrow \frac{v_3}{v_2} = \left(\frac{p_2}{p_3}\right)^{1/\kappa}.$$

Einsetzen ergibt

$$\frac{p_2}{p_3} = \frac{T_2}{T_1}\left(\frac{p_2}{p_3}\right)^{1/\kappa} \Rightarrow \frac{p_2}{p_3} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$$

$$q_{13} = RT_1\frac{\kappa}{\kappa-1}\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = \frac{(c_p - c_v)T_1 c_p}{c_v(\frac{c_p}{c_v} - 1)}\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = T_1 c_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

4) Ein Zylinder, der mittels eines reibungsfrei beweglichen Kolbens verschlossen ist, ist mit $m = 10\,\mathrm{g}$ Isobutan (in gasförmiger und flüssiger Phase) der Temperatur $\vartheta_1 = 21{,}11°\ \mathrm{C}$ gefüllt. Das Volumen des Zylinders wird quasistatisch isotherm von $V_1 = 50\,\mathrm{cm}^3$ auf $V_2 = 100\,\mathrm{cm}^3$ vergrößert.

a) Berechnen Sie den Dampfgehalt im Ausgangs- und Endzustand.
b) Berechnen Sie die bei der Expansion geleistete Arbeit $W_{12}$.
c) Welche Wärmemenge $Q_{12}$ muß zugeführt werden?
d) Berechnen Sie die Änderung der inneren Energie $U_2 - U_1$ des Isobutans.

Dampftafel für Isobutan

| $\vartheta$ °C | $p$ bar | $v'$ dm$^3$/kg | $v''$ dm$^3$/kg | $h'$ kJ/kg | $h''$ kJ/kg |
|---|---|---|---|---|---|
| 18,33 | 2,916 | 1,789 | 134 | 507,5 | 843,6 |
| 21,11 | 3,170 | 1,799 | 124 | 514,0 | 847,1 |
| 23,89 | 3,442 | 1,810 | 114 | 520,6 | 850,6 |

**Lösung:**

a) $x_1 = \frac{v_1 - v'}{v'' - v'} = \underline{2{,}6195 \cdot 10^{-2}}$ $\qquad x_2 = \frac{v_2 - v'}{v'' - v'} = \underline{6{,}7111 \cdot 10^{-2}}$

b) $W_{12} = -\int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V = -p\,(V_2 - V_1) = \underline{-15{,}85\ \mathrm{J}}$

c) $h_1 = (1 - x_1)h'\,(21{,}11°\mathrm{C}) + x_1 h''\,(21{,}11°\mathrm{C}) = 522{,}725\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}}$

$h_2 = (1 - x_2)h'\,(21{,}11°\mathrm{C}) + x_2 h''\,(21{,}11°\mathrm{C}) = 536{,}355\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}}$

$Q_{12} = H_2 - H_1 = m\,(h_2 - h_1) = \underline{136{,}3\ \mathrm{J}}$

d) $U_2 - U_1 = Q_{12} + W_{12} = \underline{120{,}44\ \mathrm{J}}$

5) Ein Motor weist im stationären Betrieb eine Betriebstemperatur von $\vartheta_M = 85$ °C auf. Nach dem Abschalten kühlt der Motor auf die Temperatur $\vartheta_U = 15$ °C des ihn umgebenden, adiabaten Raumes ab. Das Raumvolumen und die Raumtemperatur bleiben dabei annähernd konstant.
Geg.: $c_M = 0{,}5$ kJ/kgK; $m_M = 100{,}5$ kg

a) Wieviel Wärme gibt der Motor beim Abkühlen ab?
b) Wie ändert sich die Entropie des Motors?
c) Wie ändert sich die Entropie der Umgebung des Motors?
d) Wie ändert sich die Entropie des Raumes (einschließlich Motor)?
e) Wieviel Arbeit könnte man maximal gewinnen, wenn man zwischen Motor und Umgebung eine reversibel arbeitende Wärmekraftmaschine schalten würde?

**Lösung:**

*a)* $\Delta Q = m\,c_m(T_U - T_M) = -3517{,}5\,\mathrm{kJ}$ *b)* $S_{M2} - S_{M1} = m_M\,c_M \ln(T_U/T_M) = -10{,}928\,\mathrm{kJ/K}$

*c)* $S_{U2} - S_{U1} = \Delta Q/T_U = m_M\,c_M(T_M - T_U)/T_U = 12{,}207\,\mathrm{kJ/K}$,

*d)* $S_2 - S_1 = S_{M2} - S_{M1} + S_{U2} - S_{U1} = 1{,}279\,\mathrm{kJ/K}$.

*e)* $\mathrm{d}W_{max} = \eta_c \mathrm{d}Q_{zu}$, wobei $\eta_c = 1 - \dfrac{T_U}{T}$ mit $T$...aktuelle Motortemperatur und $\mathrm{d}Q_{zu} = -m_M\,c_M \mathrm{d}T > 0$.

$$|W_{max}| = -m_M\,c_M \int_{T_M}^{T_U} \left(1 - \frac{T_U}{T}\right) \mathrm{d}T = m_M\,c_M \left[(T_M - T_U) + T_U \ln \frac{T_U}{T_M}\right] = 368{,}6\,\mathrm{kJ}$$

6) Die in zwei Räumen 1 und 2 mit den Grundflächen $A_1 = 16\,\mathrm{m}^2$ bzw. $A_2 = 25\,\mathrm{m}^2$ und der gemeinsamen Raumhöhe $h = 2{,}5\,\mathrm{m}$ befindlichen Luftmassen werden durch Öffnen einer Türe miteinander in Kontakt gebracht. Vor dem Öffnen der Türe beträgt im Raum 1 die relative Luftfeuchtigkeit $\varphi_1 = 0{,}65$ bei einer Temperatur von $\vartheta_1 = 10\,°\mathrm{C}$, und im Raum 2 hat die ungesättigte Luft die relative Luftfeuchtigkeit $\varphi_2 \neq \varphi_1$ bei einer Temperatur $\vartheta_2 \neq \vartheta_1$.
Nach der vollständigen isobaren Durchmischung der beiden Luftmassen aus Raum 1 und Raum 2 beträgt die gemeinsame Endtemperatur $\vartheta_\mathrm{M} = 30\,°\mathrm{C}$ und es fällt 40 g Wasser als Kondensat an. Der Druck ist in beiden Räumen gleich $p = 1\,\mathrm{bar}$. Wärmeaustausch mit der Umgebung ist zu vernachlässigen.
Berechnen Sie

a) den Partialdruck $p_{\mathrm{L},1}$ der trocken Luft und den Partialdruck $p_{\mathrm{D},1}$ des Dampfes in Raum 1 vor dem Öffnen der Türe sowie $p_{\mathrm{L,M}}$ und $p_{\mathrm{D,M}}$ nach dem Mischvorgang,

b) die Masse der trockenen Luft $m_{\mathrm{L,M}}$ nach dem Mischen sowie die Massen der trockenen Luft $m_{\mathrm{L},1}$ und $m_{\mathrm{L},2}$ vor dem Öffnen der Türe in beiden Räumen,

c) den Wassergehalt $x_\mathrm{M}$ der Mischung und die Dampfgehalte $x_{\mathrm{D},1}$ und $x_{\mathrm{D},2}$ vor dem Öffnen der Türe in den Räumen 1 und 2,

d) die spezifische Enthalpie $h_{(1+x),\mathrm{M}}$ der Mischluft.

$$c_{p,\mathrm{Luft}} = 1\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg\,K}} \quad c_{p,\mathrm{Dampf}} = 1{,}86\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg\,K}} \quad c_{p,\mathrm{flüssig}} = 4{,}19\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg\,K}} \quad r_0 = 2501{,}6\,\mathrm{kJ/kg}$$

$$\mathcal{M}_\mathrm{Luft} = 29\,\mathrm{kg/kmol} \quad \mathcal{R} = 8314\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kmol\,K}}$$

$$\varphi = \frac{p_\mathrm{D}}{p_\mathrm{s}}, \quad x_\mathrm{D} = 0{,}622\frac{p_\mathrm{D}}{p - p_\mathrm{D}}$$

| $\vartheta$ °C | $p_\mathrm{s}$ mbar |
|---|---|
| 5 | 8,72 |
| 10 | 12,27 |
| 15 | 17,04 |
| 16 | 18,17 |
| 17 | 19,37 |
| 18 | 20,63 |
| 19 | 21,96 |
| 20 | 23,38 |
| 21 | 24,86 |
| 22 | 26,43 |
| 23 | 28,09 |
| 25 | 31,66 |
| 30 | 42,41 |

**Lösung:**

a) DT: $p_{\mathrm{S},1}\,(10°\mathrm{C}) = 12{,}27\,\mathrm{mbar} \Rightarrow p_{\mathrm{D},1} = p_{\mathrm{S},1}\varphi_1 = \underline{7{,}98\,\mathrm{mbar}}$,
$p_{\mathrm{L},1} = p - p_{\mathrm{D},1} = \underline{992{,}02\,\mathrm{mbar}}$
DT: $p_{\mathrm{S,M}}\,(30°\mathrm{C}) = p_{\mathrm{D,M}} = \underline{42{,}41\,\mathrm{mbar}}$, $\quad p_{\mathrm{L,M}} = p - p_{\mathrm{D,M}} = \underline{957{,}59\,\mathrm{mbar}}$

b) $R = \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}_\mathrm{Luft}}, \quad V_1 = A_1 h, \quad V_\mathrm{M} = (A_1 + A_2)h$
$m_{\mathrm{L},1} = \frac{p_{\mathrm{L},1}V_1}{RT_1} = \underline{48{,}88\,\mathrm{kg}}, \quad m_{\mathrm{L,M}} = \frac{p_{\mathrm{L,M}}V_\mathrm{M}}{RT_\mathrm{M}} = \underline{112{,}94\,\mathrm{kg}},$
$m_{\mathrm{L},2} = m_{\mathrm{L,M}} - m_{\mathrm{L},1} = \underline{64{,}06\,\mathrm{kg}}$

c) $x_{\mathrm{F,M}} = \frac{m_{\mathrm{F,M}}}{m_{\mathrm{L,M}}} = 3{,}54 \cdot 10^{-4},$
$x_{\mathrm{D,M}} = x_{\mathrm{S,M}} = 0{,}622\frac{p_{\mathrm{S,M}}(30°\,\mathrm{C})}{p - p_{\mathrm{S,M}}(30°\mathrm{C})} = 0{,}02755,$
$x_\mathrm{M} = x_{\mathrm{S,M}} + x_{\mathrm{F,M}} = \underline{0{,}02790}, \quad x_{\mathrm{D},1} = 0{,}622\frac{p_{\mathrm{D},1}}{p - p_{\mathrm{D},1}} = \underline{5{,}00 \cdot 10^{-3}},$
$m_{\mathrm{D},2} = x_\mathrm{M} m_{\mathrm{L,M}} - x_{\mathrm{D},1} m_{\mathrm{L},1} = 2{,}907\,\mathrm{kg}, \quad x_{\mathrm{D},2} = \frac{m_{\mathrm{D},2}}{m_{\mathrm{L},2}} = \underline{0{,}04537}$

d) $h_{(1+x),\mathrm{M}} = (c_{p,\mathrm{Luft}} + x_{\mathrm{S,M}}c_{p,\mathrm{Dampf}} + x_{\mathrm{F,M}}c_{p,\mathrm{flüssig}})\vartheta_\mathrm{M} + x_{\mathrm{S,M}}r_0 = \underline{100{,}50\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}}}$