Prüfung aus Grundlagen der Thermodynamik: 30. 6. 2006

2) Vergleichen Sie zwei Wärmekraftmaschinen, die nach folgenden reversiblen Kreisprozessen arbeiten: (Arbeitsmedium ist jeweils ein ideales Gas mit konstanten spezifischen Wärmekapazitäten)

Prozess I	Prozess II
$1 \to 2$: isentrope Kompression	$1' \to 2$: isotherme Kompression
$2 \to 3$: isobare Expansion	$2 \to 3$: isobare Expansion
$3 \to 1$: isochore Druckverminderung	$3 \to 1'$: isochore Druckverminderung

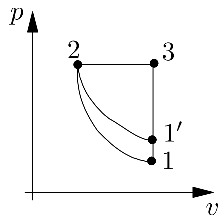
a) Stellen Sie beide Prozesse in einem $p,v-$Diagramm und einem $T,s-$Diagramm dar.

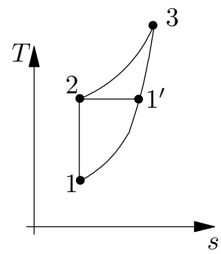
b) Bestimmen Sie mittels des T,s-Diagramms, welcher Prozess den größeren Wirkungsgrad hat. Geben Sie eine Begründung dafür an.

c) Berechnen Sie den Wirkungsgrad η_1 als Funktion des Verdichtungsverhältnisses $\varepsilon = v_1/v_2$ und des Isentropenexponenten κ für den Prozess I, $\eta_1 = \eta_1(\varepsilon,\kappa)$.

Lösung:

a)





b) $\eta = \dfrac{|w_0|}{q_{\text{zu}}}$; q_{zu} für beide Prozesse gleich, $q_{\text{zu}} = q_{23} \;\hat{=}\;$ Fläche unter der Kurve 2–3.

$|w_{0,\text{I}}| \;\hat{=}\;$ Fläche 1–2–3, $|w_{0,\text{II}}| \;\hat{=}\;$ Fläche 1′–2–3; $\quad \Rightarrow |w_{0,\text{I}}| > |w_{0,\text{II}}|$, $\eta_{\text{I}} > \eta_{\text{II}}$.

c) $\eta_{\text{I}} = \dfrac{|w_{0,\text{I}}|}{q_{\text{zu}}} = \dfrac{q_{\text{zu}} - |q_{\text{ab,I}}|}{q_{\text{zu}}} = 1 - \dfrac{q_{13}}{q_{23}}$

$2 \to 3$: isobare, 1. Hs: $\mathrm{d}h = \mathrm{d_e}q + v\mathrm{d}p$, $\mathrm{d}p = 0 \quad \Rightarrow \quad q_{23} = h_3 - h_2 = c_p(T_3 - T_2)$

$1 \to 3$: isochore, 1. Hs: $\mathrm{d}u = \mathrm{d_e}q - p\mathrm{d}v$, $\mathrm{d}v = 0 \quad \Rightarrow \quad q_{13} = u_3 - u_1 = c_v(T_3 - T_1)$

id. Gas: $\dfrac{p_2 v_2}{T_2} = \dfrac{p_3 v_3}{T_3}$; $\quad p_2 = p_3,\ v_3 = v_1 \quad \Rightarrow \quad T_3 = \varepsilon T_2$

isentrope: $p_1 v_1^\kappa = p_2 v_2^\kappa$, $\dfrac{p_1 v_1}{T_1} = \dfrac{p_2 v_2}{T_2} \quad \Rightarrow \quad T_1 = \dfrac{p_1 v_1}{p_2 v_2} T_2 = \left(\dfrac{v_1}{v_2}\right)^{1-\kappa} T_2$

$$\Rightarrow \quad \eta_{\text{I}} = \frac{c_v(\varepsilon - \varepsilon^{1-\kappa})T_2}{c_p(\varepsilon - 1)T_2} = 1 - \frac{\varepsilon(1 - \varepsilon^{-\kappa})}{\kappa(\varepsilon - 1)}$$

3) Ein Druckbehälter ist durch eine Wand vernachlässigbaren Volumens in zwei Teile A und B geteilt. In beiden Behälterteilen befindet sich das gleiche ideale Gas mit den gegebenen spezifischen Wärmekapazitäten c_p und c_v. Im Teil A herrscht ein Druck $p = p_\mathrm{A}$, bei einem Volumen von $V = V_\mathrm{A}$ und einer Temperatur von $T = T_\mathrm{A}$. Das Gas im Behälter B steht unter einem Druck $p = p_\mathrm{B}$, das Volumen beträgt $V = V_\mathrm{B}$ und die Temperatur $T = T_\mathrm{B}$. Berechnen Sie den sich einstellenden Enddruck p_2 und die sich einstellende Endtemperatur T_2 wenn die Wand entfernt wurde und sich ein gemeinsamer Endzustand eingestellt hat.

Lösung:

Es gilt $pV = m(c_p - c_v)T$ für A, B, 2; Sowie

$$m_2 = m_\mathrm{A} + m_\mathrm{B} \quad (1); \qquad V_2 = V_\mathrm{A} + V_\mathrm{B} \quad (2); \qquad U_2 = U_\mathrm{A} + U_\mathrm{B} \quad (3);$$

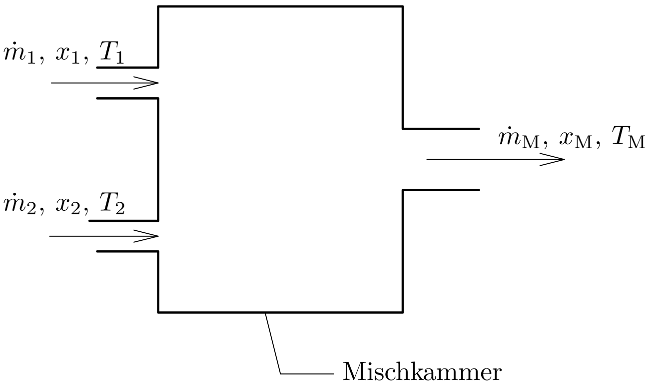
$$(3) \;\Rightarrow\; c_v m_2 T_2 = c_v m_\mathrm{A} T_\mathrm{A} + c_v m_\mathrm{B} T_\mathrm{B} \;\Rightarrow\; T_2 = \frac{m_\mathrm{A} T_\mathrm{A} + m_\mathrm{B} T_\mathrm{B}}{m_\mathrm{A} + m_\mathrm{B}} = \frac{p_\mathrm{A} V_\mathrm{A} + p_\mathrm{B} V_\mathrm{B}}{p_\mathrm{A} V_\mathrm{A}/T_\mathrm{A} + p_\mathrm{B} V_\mathrm{B}/T_\mathrm{B}}$$

$$p_2 = \frac{m_2(c_p - c_v)T_2}{V_2} = \frac{p_\mathrm{A} V_\mathrm{A} + p_\mathrm{B} V_\mathrm{B}}{V_\mathrm{A} + V_\mathrm{B}}$$

4) In einer adiabaten Mischkammer MK werden zwei Massenströme von Nassdampf ($\dot m_1 = 2$ kg/s, $x_1 = 0{,}4$, $\vartheta_1 = 90\,°\mathrm{C}$; $\dot m_2 = 0{,}8$ kg/s, $x_2 = 0{,}6$, $\vartheta_2 = 110\,°\mathrm{C}$) stationär gemischt. Als Ergebnis verläßt die Mischkammer ein Massenstrom $\dot m_\mathrm{M}$ von Nassdampf des Druckes $p_\mathrm{M} = 0{,}47367$ bar.

a) Geben Sie die Temperatur T_M an.
b) Berechnen Sie den Dampfgehalt x_M des Nassdampfes, der die Mischkammer verläßt (kinetische und potentielle Energieanteile sind zu vernachlässigen).
c) Berechnen Sie die Entropieproduktionsrate $\mathrm{d_i}S/\mathrm{d}t$ im System Mischkammer.

Beachten Sie die Dampftafel am Ende der Prüfungsangaben.



Lösung:

a) Dampftafel: $T_\mathrm{M} = 80\,°\mathrm{C}$.

b) 1. Hauptsatz für offene Systeme: $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \dot Q + \dot W_\mathrm{t} + \dot H^{(m)}_\mathrm{ges}$, stationärer Vorgang: $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = 0$

$$\dot m_1 h_1 + \dot m_2 h_2 = (\dot m_1 + \dot m_2) h_\mathrm{M}$$

$$h_1 = 1290{,}2\,\mathrm{kJ/kg}, \quad h_2 = 1799{,}3\,\mathrm{kJ/kg}; \quad h_\mathrm{M} = 1435{,}7\,\mathrm{kJ/kg}, \quad x_\mathrm{M} = 0{,}4767$$

c) Entropiebilanz $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \dot S + \frac{\mathrm{d_i}S}{\mathrm{d}t}$, stationärer Vorgang: $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = 0$

$$\dot m_1 s_1 + \dot m_2 s_2 - (\dot m_1 + \dot m_2) s_\mathrm{M} + \frac{\mathrm{d_i}S}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$s_1 = 3{,}70746\,\mathrm{kJ/kg\,K} \quad s_2 = 4{,}91068\,\mathrm{kJ/kg\,K} \quad s_\mathrm{M} = 4{,}19389\,\mathrm{kJ/kg\,K}$$

$$\frac{\mathrm{d_i}S}{\mathrm{d}t} = 0{,}3994\,\mathrm{kW/K} > 0$$

Der Mischvorgang ist irreversibel!

5) Zwei völlig gleichartigen Behältern A und B, die mit flüssigem Wasser ($m_\mathrm{A} = 50$ kg, $c_{p\mathrm{A}} = 4{,}19$ kJ/kgK, $\beta = 0{,}4 \cdot 10^{-3}$ K^{-1}) bzw. idealem Gas ($c_{p\mathrm{B}} = 1$ kJ/kgK, $\mathrm{R_B} = 287$ J/kgK) gefüllt sind, wird ausgehend von einem Zustand 1 ($V_{\mathrm{A}1} = V_{\mathrm{B}1} = 50$ l) bei konstantem Druck $p = 1$ bar jeweils 30 kJ Wärme zugeführt, bis ein Zustand 2 erreicht ist.

Berechnen Sie für beide Systeme die Volumenänderungsarbeiten $W_{\mathrm{A},12}$ bzw. $W_{\mathrm{B},12}$.

Lösung:

$W_{12} = -\int_1^2 p\,\mathrm{d}V$, isobare ZÄ, $p = konst.$ $\quad\Rightarrow\quad W_{12} = -p(V_2 - V_1) = -p\Delta V$

1. Hs: $\mathrm{d}H = \mathrm{d_e}Q + V\mathrm{d}p$, $\mathrm{d}p = 0$ $\quad\Rightarrow\quad Q_{12} = H_2 - H_1 = mc_p\Delta T$

Wasser: $\dfrac{\mathrm{d}V}{V} = \beta\mathrm{d}T$, wegen $\dfrac{\Delta V}{V} \ll 1$: $\dfrac{\Delta V}{V} \approx \beta\Delta T$

$$\Delta T = \frac{Q_{12}}{m_\mathrm{A}c_{p\mathrm{A}}} = \frac{30}{50 \cdot 4{,}19} = 0{,}143\ \mathrm{K}, \quad \Delta V = 0{,}4 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}143 \cdot 50 \cdot 10^{-3} = 2{,}86 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}^3$$

$$W_{\mathrm{A},12} = -10^{-5} \cdot 2{,}86 \cdot 10^{-6} = -0{,}286\ \mathrm{J}$$

id. Gas: $p(V_2 - V_1) = mR(T_2 - T_1) = mR\Delta T$;

$$\Delta T = \frac{Q_{12}}{m_\mathrm{B}c_{p\mathrm{B}}}, \quad\Rightarrow\quad W_{\mathrm{B},12} = -m_\mathrm{B}R\frac{Q_{12}}{m_\mathrm{B}c_{p\mathrm{B}}} = -\frac{287 \cdot 30}{1} = -8610\ \mathrm{J}$$

6) Ein Eisblock mit der Masse $m_{\mathrm{E},1} = 20$ kg und der Temperatur $\vartheta_{\mathrm{E},1} = -15\,^\circ\mathrm{C}$ und ein Behälter, der $m_\mathrm{W} = 30$ kg Wasser mit der Temperatur $\vartheta_{\mathrm{W},1} = 40\,^\circ\mathrm{C}$ enthält, stehen als Energiespeicher für eine Carnotmaschine zur Verfügung. Man berechne

a) wieviel Arbeit man mit einer zwischen diesen Energiespeichern arbeitenden Carnotmaschine gewinnen kann,

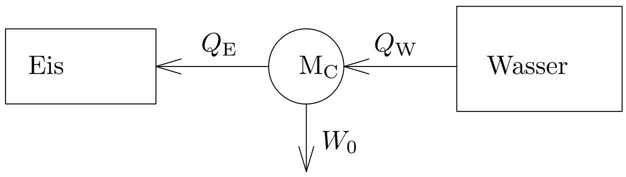
b) die gemeinsame Endtemperatur der Energiespeicher,

c) die gemeinsame Endtemperatur der beiden Energiespeicher, wenn der Temperaturausgleich durch eine diatherme Wand erfolgt,

d) die Entropieänderung des Gesamtsystems in beiden Fällen.

Stoffwerte: $c_{p,\mathrm{W}} = 4{,}19$ kJ/kgK, $c_{p,\mathrm{Eis}} = 2{,}05$ kJ/kgK, $l_0 = 333$ kJ/kg.

Lösung:



a) Carnotmaschine, 1. Hs: $\mathrm{d}W_0 = \mathrm{d_e}Q_\mathrm{W} - \mathrm{d_e}Q_\mathrm{E}$; 2. Hs: $\mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d_e}Q_\mathrm{W}}{T_\mathrm{W}} - \frac{\mathrm{d_e}Q_\mathrm{E}}{T_\mathrm{E}}$.
Vorzeichen: $\mathrm{d_e}Q_\mathrm{W} = -m_\mathrm{W}c_{p,\mathrm{W}}\mathrm{d}T_\mathrm{W}$, $\mathrm{d_e}Q_\mathrm{E} = m_\mathrm{E}c_{p,\mathrm{E}}\mathrm{d}T_\mathrm{E}$.
1. Schritt, $1 \to 2$: Aufwärmen des Eises bis $\vartheta_\mathrm{E} = 0\,^\circ\mathrm{C}$:

$$0 = -m_\mathrm{W}c_{p,\mathrm{W}} \ln\left(\frac{T_{\mathrm{W},2}}{T_{\mathrm{W},1}}\right) - m_\mathrm{E}c_{p,\mathrm{E}} \ln\left(\frac{T_{\mathrm{E},2}}{T_{\mathrm{E},1}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad T_{\mathrm{W},2} = T_{\mathrm{W},1}\left(\frac{T_{\mathrm{E},2}}{T_{\mathrm{E},1}}\right)^{-\frac{m_\mathrm{E}c_{p,\mathrm{E}}}{m_\mathrm{W}c_{p,\mathrm{W}}}} = 313{,}5\left(\frac{273{,}15}{258{,}15}\right)^{-\frac{20\cdot 2{,}05}{30\cdot 4{,}19}} = 307{,}43\ \mathrm{K}$$

2. Schritt, Abkühlen des Wassers bis $\vartheta_\mathrm{W} = 0\,^\circ\mathrm{C}$; $\mathrm{d_e}Q_\mathrm{E} = -l_0\mathrm{d}m_\mathrm{E}$.

$$0 = -m_\mathrm{W}c_{p,\mathrm{W}} \ln\left(\frac{T_{\mathrm{W},3}}{T_{\mathrm{W},2}}\right) - \frac{l_0\Delta m_\mathrm{E}}{T_{\mathrm{E},2}} \quad \Rightarrow \quad \Delta m_\mathrm{E} = \frac{30\cdot 4{,}19\cdot 273{,}15}{333}\ln\left(\frac{273{,}15}{307{,}43}\right) = 12{,}19\ \mathrm{kg}$$

b) $\vartheta_\mathrm{W} = \vartheta_\mathrm{E} = 0\,^\circ\mathrm{C}$, Endzustand erreicht: $\vartheta_3 = 0\,^\circ\mathrm{C}$.

$$W_{0,13} = Q_{\mathrm{W},13} - Q_{\mathrm{E},13} = m_\mathrm{W}c_{p,\mathrm{W}}\cdot 40 - m_\mathrm{E}c_{p,\mathrm{E}}\cdot 15 - l_0\cdot 12{,}19 = 353{,}73\ \mathrm{kJ}$$

c) Endtemperatur ebenfalls $0\,^\circ\mathrm{C}$, Nachweis: Masse des schmelzenden Eises Δm_E berechnen – diese muss kleiner als $m_{\mathrm{E},1}$ sein.
$Q_\mathrm{E} = Q_\mathrm{W}$, Q_W... Abkühlen des Wassers bis $0\,^\circ\mathrm{C}$, Q_E... Aufwärmen des Eises bis $0\,^\circ\mathrm{C}$ und Schmelzen

$$\Delta m_\mathrm{E} = \frac{m_\mathrm{W}c_{p,\mathrm{W}}\cdot 40 - m_\mathrm{E}c_{p,\mathrm{E}}\cdot 15}{l_0} = 13{,}25\ \mathrm{kg}$$

d) Carnotmaschine: $S_2 - S_1 = 0$
diatherme Wand:

$$S_2 - S_1 = m_\mathrm{W}c_{p,\mathrm{W}}\ln\left(\frac{273{,}15}{313{,}15}\right) - m_\mathrm{E}c_{p,\mathrm{E}}\ln\left(\frac{273{,}15}{258{,}15}\right) - \frac{\Delta m_\mathrm{E}l_0}{273{,}15} = 1{,}29\ \mathrm{kJ/K}$$