Prüfung aus Grundlagen der Thermodynamik 05. 05. 2006

2) Ein ideales Gas (Masse m, spezielle Gaskonstante R und κ gegeben) wird ausgehend vom Umgebungsdruck p_0 und Umgebungstemperatur T_0 auf den Druck p_1 adiabat komprimiert. Die Kompression erfolgt nicht reversibel. Es wird doppelt so viel Arbeit W_{01} aufgewendet, wie bei einer reversiblen, adiabaten Kompression von p_0 auf p_1 notwendig wäre.

   a) Berechnen Sie die aufgewendete Arbeit W_{01}.
   b) Berechnen Sie die Temperatur des Gases im Endzustand.
   c) Berechnen Sie die Entropieänderung $S_1 - S_0$ des Gases.

Lösung

a) Wir bezeichnen den Zustand, der vom Ausgangszustand 0 durch reversible, adiabate Kompression erreicht wird mit 1'. Die dabei verrichtete Arbeit ist:

$$w_{1'} = -\int_{v_0}^{v_{1'}} p\,\mathrm{d}v = v_0 p_0^{1/\kappa} \int_{p_0}^{p_1} \frac{\mathrm{d}p}{\kappa\, p^{1/\kappa}}$$

$$w_{01'} = \frac{RT_0}{\kappa - 1}\left[\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{1-1/\kappa} - 1\right]$$

$$W_{01} = 2m\, w_{01'} = 2m\frac{RT_0}{\kappa - 1}\left[\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{1-1/\kappa} - 1\right]$$

b) 1. Hauptsatz

$$U_1 - U_0 = W_{01}$$

$$c_v(T_1 - T_0) = 2\frac{RT_0}{\kappa - 1}\left[\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{1-1/\kappa} - 1\right]$$

$$T_1 = T_0\left[2\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{1-1/\kappa} - 1\right]$$

c) Entropieänderung

$$S_1 - S_0 = m\left(c_p \ln\frac{T_1}{T_0} - (c_p - c_v)\ln\frac{p_1}{p_0}\right) =$$

$$= mR\frac{\kappa}{\kappa - 1}\ln\left(2 - \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{1-1/\kappa}\right)$$

3) Zwei starre, adiabate Behälter A und B sind mit jeweils derselben Menge einer bestimmten Flüssigkeit vollständig gefüllt. Die Temperatur der Flüssigkeit im Behälter A beträgt $T_{\mathrm{A},1}$ bei einem Druck $p_{\mathrm{A},1}$, im Behälter B $T_{\mathrm{B},1} < T_{\mathrm{A},1}$ bei einem Druck $p_{\mathrm{B},1}$. Diese beiden Behälter werden nun über eine reversibel arbeitende Maschine miteinander verbunden, welche der Flüssigkeit im Behälter A Wärme entzieht und der Flüssigkeit im Behälter B Wärme zuführt, bis der Endzustand $T_{\mathrm{A}}^* = T_{\mathrm{B}}^*$ erreicht ist.

Berechnen Sie

   a) die Temperatur $T^* = T_{\mathrm{A}}^* = T_{\mathrm{B}}^*$ im Endzustand.
   b) die Drücke p_{A}^* und p_{B}^* in den beiden Behältern A und B im Endzustand.
   c) die bei diesem Prozess gewonnene Arbeit W

Geg.: c_v, $\chi_T = \mathrm{const}$, $\beta_p = \mathrm{const}$,
relative Dichteänderungen der Flüssigkeit sind zu vernachlässigen.

Lösung

a) Wegen
$$\mathrm{d}s = c_v \frac{\mathrm{d}T}{T} + p\,\mathrm{d}v$$
gilt
$$S_{A,2} - S_{A,1} = mc_v \ln \frac{T^*}{T_{A,1}}$$
$$S_{B,2} - S_{B,1} = mc_v \ln \frac{T^*}{T_{B,1}}$$
Da die Gesamtentropie gleich bleibt gilt
$$0 = S_{A,2} - S_{A,1} + S_{B,2} - S_{B,1} = mc_v \ln \frac{(T^*)^2}{T_{A,1}T_{B,1}}$$
und somit
$$T^* = \sqrt{T_{A,1}T_{B,1}}$$

b)
$$p_A^* = p_{A,1} + \frac{\beta_p}{\chi_T}\left(\sqrt{T_{A,1}T_{B,1}} - T_{A,1}\right)$$
$$p_B^* = p_{B,1} + \frac{\beta_p}{\chi_T}\left(\sqrt{T_{A,1}T_{B,1}} - T_{B,1}\right)$$

c) Das Gesamtsystem ist adiabat, daher folgt mit dem 1.HS:
$$\Delta W = \Delta U_{\text{zu}} + \Delta U_{\text{ab}} = mc_v(2T^* - T_{A,1} - T_{B,1}) < 0$$

4) Ein Gemisch von flüssigem und dampfförmigem Wasser (geg. Anfangszustand 1 des Wassers: $m_1 = 100$ kg, $T_1 = 393{,}15$ K, $V_1 = 85$ m^3) wird mit 25 kg siedendem Wasser gleichen Druckes isobar gemischt (Zustand 2). Das gesamte Gemisch wird anschließend reversibel adiabat komprimiert, bis nur noch eine Phase vorliegt (Zustand 3).
Berechnen Sie:

a) Den Dampfgehalt x_2.
b) Die Temperatur T_3.
c) Die Volumenänderungsarbeit W_{23}.
d) Ist die Zustandsänderung $1 \to 3$ reversibel? (Begründung!)
e) Skizzieren Sie die Zustandsänderungen im p,v- und im T,s-Diagramm.

Hinweis: Interpolationen zwischen Werten in der Dampftafel (siehe letztes Blatt) nicht notwendig!

Lösung

spezifisches Volumen im Zustand 1: $v_1 = V_1/m_1 = 0{,}85\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}}$
Dampfgehalt im Zustand 1: $x_1 = \frac{v_1 - v_1'}{v_2'' - v_1'} = 0{,}9534$

a) Die Dampfmasse $m_{D1} = m_1 x_1 = 95{,}34\,\mathrm{kg}$ bleibt bei der isobaren Mischung mit 25 kg siedendem Wassers gleich
$$x_2 = \frac{m_{D2}}{m_2} = \frac{m_1}{m_2} x_1 = 0{,}7627$$

b) Zustandsänderung $2 \to 3$ ist reversibel und adiabat daher isentrop: $s_2 = s_3$

$$s_2 = s_1'(1 - x_2) + x_2 s_1'' = 5{,}800\,\mathrm{kJ/kg}$$

$$\Rightarrow \quad s_3 = s_3'', \quad \vartheta_3 \approx 290\,^\circ\mathrm{C}.$$

c) Zur Kompression benötigte Arbeit $W_{23} = m_2 w_{23} = m_2(u_3 - u_2) = m_2(h_3 - h_2 + p_2 v_2 - p_3 v_3)$.

$$h_2 = 2183{,}4\,\mathrm{kJ/kg}, \quad v_2 = 0{,}6802\,\mathrm{m^3/kg}, \quad p_2 = 1{,}9854 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$$

$$h_3 = h_3'' \approx 2767{,}6\,\mathrm{kJ/kg}, \quad v_3 = v_3'' \approx 0{,}02554\,\mathrm{m^3/kg}, \quad p_3 \approx 7{,}464 \times 10^6\,\mathrm{Pa}$$

$$\Rightarrow \quad W_{12} = 66{,}07\,\mathrm{MJ}$$

d) Die zugeführte Menge siedenden Wassers sei Δm_F, sodass $m_2 = m_1 + \Delta m_F$:

$$S_1 = m_1 s_1 + \Delta m_F s_1' = [m_1(1 - x_1) + \Delta m_F] s_1' + m_1 x_1 s_1''$$

$$S_3 = S_2 = m_2[(1 - x_2)s_1' + x_2 s_1'']$$

Mit $x_2 = \frac{m_1}{m_2} x_1$ folgt:

$$S_3 - S_1 = [m_2(1 - x_2) - m_1(1 - x_1) - \Delta m_F] s_1' + [m_2 x_2 - m_1 x_1] s_1'' = 0$$

Der Prozess ist daher reversibel!

5) Feuchte Luft ($m_\mathrm{L} = 500\,\mathrm{kg}$, $\vartheta_1 = -10\,^\circ\mathrm{C}$, $\varphi_1 = 0{,}9$, $p = 1\,\mathrm{bar}$) wird zunächst auf eine Temperatur ϑ_2 isobar erwärmt. Anschließend soll durch isobares Einspritzen von flüssigem Wasser ($\vartheta_\mathrm{W} = 10\,^\circ\mathrm{C}$, m_W) in einer adiabaten Kammer der Zustand 3 mit $\vartheta_3 = 22\,^\circ\mathrm{C}$ und $\varphi_3 = 0{,}6$ erreicht werden.

a) Berechnen Sie den Wassergehalt im Zustand 2 und 3.
b) Welche Wassermasse m_W ist aufzubringen?
c) Berechnen Sie die Temperatur ϑ_2.
d) Welche Wärmemenge Q_{12} ist notwendig?

$$c_{p,\mathrm{L}} = 1\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kgK}}, \quad c_{p,\mathrm{D}} = 1{,}9\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kgK}}, \quad c_{p,\mathrm{W}} = 4{,}2\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kgK}}, \quad r_0 = 2500\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}}, \quad \varphi = \frac{p_\mathrm{D}}{p_\mathrm{s}}, \quad x_\mathrm{D} = 0{,}622\frac{p_\mathrm{D}}{p - p_\mathrm{D}}$$

ϑ [°C]	p_S [mbar]
-10	2,60
22	26,43

Lösung

a)

$$p_{D_{1,3}} = \varphi_{1,3} p_{S_{1,3}} \quad \Rightarrow \quad x_{D_1} = x_{D_2} = 0{,}001459, \quad x_{D_3} = 0{,}010023$$

b)

$$m_\mathrm{W} = m_L(x_{D_3} - x_{D_2}) = 4{,}282\,\mathrm{kg}$$

c)

$$H_3 = m_L\left[(c_{p,L} + x_{D3} c_{p,D})\vartheta_3 + x_{D3} r_0\right]$$

$$H_3 = 23{,}738\,\mathrm{MJ}, \quad H_2 = H_3 - m_\mathrm{W}\, c_{p,\mathrm{W}} \vartheta_\mathrm{W} = 23{,}558\ \mathrm{MJ}, \quad h_{1+x,2} = 47{,}116\,\mathrm{kJ/kg}$$

$$\vartheta_2 = \frac{h_{1+x,2} - x_2 r_0}{c_{p,L} + x_2 c_{p,D}} = 43{,}35\,^\circ\mathrm{C}$$

d)

$$Q_{12} = H_2 - H_1$$

$$H_1 = m_L\left[(c_{p,L} + x_1 c_{p,D})\vartheta_1 + x_1 r_0\right] = -3{,}190\,\mathrm{MJ}, \qquad Q_{12} = 26{,}748\,\mathrm{MJ}$$

6) Die Wärmekraftmaschine eines kalorischen Kraftwerks arbeite zwischen den Temperaturniveaus des Dampferzeugers (mittlere Temperatur: $\vartheta_{\mathrm{DE}} = 313\,^\circ\mathrm{C}$) und eines flußwassergekühlten Kondensators ($\vartheta_K = 20\,^\circ\mathrm{C}$). Die Nutzleistung der Kraftwerks sei $P = 750\,\mathrm{MW}$.

   a) Berechnen Sie den maximal möglichen thermischen Wirkungsgrad η_{max} und die dabei an das Flußwasser abzuführende Wärme.

   b) Wieviel Wärme muß an das Flußwasser abgeführt werden, wenn der tatsächliche Wirkungsgrad des Kraftwerks 60% des Maximalwertes beträgt?

   c) Wieviel Entropie wird dabei produziert?

Lösung

a) Der maximale Wirkungsgrad ist gleich dem Carnotschen Wirkungsgrad,

$$\eta_{\mathrm{max}} = \eta_{\mathrm{c}} = 1 - \frac{T_{\mathrm{ab}}}{T_{\mathrm{zu}}} = 1 - \frac{T_{\mathrm{K}}}{T_{\mathrm{DE}}} = 1 - \frac{293{,}15}{586{,}15}, \qquad \Rightarrow \underline{\eta_{\mathrm{max}} = 0{,}5}\,.$$

Gleichzeitig ist $\eta = |W_0|/Q_{\mathrm{zu}} = P/\dot{Q}_{\mathrm{zu}}$ und $|W_0| = Q_{\mathrm{zu}} - |Q_{\mathrm{ab}}|$ bzw. $P = \dot{Q}_{\mathrm{zu}} - |\dot{Q}_{\mathrm{ab}}|$. Einsetzen ergibt $\eta = P/(|\dot{Q}_{\mathrm{ab}}| + P)$ und nach Umformung

$$|\dot{Q}_{\mathrm{ab}}| = P\left(\tfrac{1}{\eta} - 1\right). \qquad \Rightarrow \underline{|\dot{Q}_{\mathrm{ab}}|} = P\left(\tfrac{1}{0{,}5} - 1\right) \underline{= 750\,\mathrm{MW}}.$$

b) $\eta = 0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}3. \qquad \Rightarrow \underline{|\dot{Q}_{\mathrm{ab}}|} = \dot{Q}_{\mathrm{zu}} - P = P\left(\tfrac{1}{0{,}3} - 1\right) = \tfrac{7}{3}P \underline{= 1750\,\mathrm{MW}}.$

c) $\underline{\dot{S}} = \frac{\dot{Q}_{\mathrm{zu}}}{T_{\mathrm{zu}}} + \frac{\dot{Q}_{\mathrm{ab}}}{T_{\mathrm{ab}}} = \frac{P}{\eta T_{\mathrm{DE}}}\left(1 - (1-\eta)\frac{T_{\mathrm{DE}}}{T_{\mathrm{K}}}\right) \underline{= 1{,}706\,\mathrm{MW/K}}.$