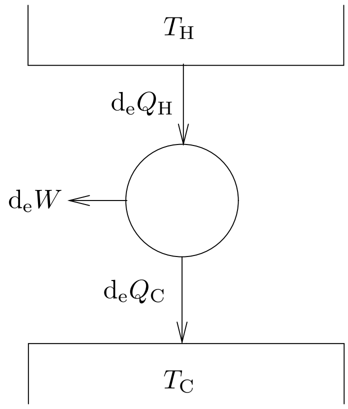
Prüfung aus Grundlagen der Thermodynamik 17. 3. 2006

2) Eine Carnot-Wärmekraftmaschine arbeitet zwischen zwei endlichen Körpern mit den Anfangstemperaturen $T_{\mathrm{H},1}$ und $T_{\mathrm{C},1}$, mit $T_{\mathrm{H},1} > T_{\mathrm{C},1}$. Die Körper haben Wärmekapazitäten $C_{p,\mathrm{H}}$ und $C_{p,\mathrm{C}}$. Im Laufe des Prozesses sinkt die Temperatur T_H, während die Temperatur T_C steigt.

a) Wie groß ist die von der Maschine verrichtete Arbeit für eine bestimmte Endtemperatur $T_{\mathrm{H},2}$ als Funktion von $T_{\mathrm{H},1}$, $T_{\mathrm{C},1}$, $C_{p,\mathrm{H}}$, $C_{p,\mathrm{C}}$, sowie $T_{\mathrm{H},2}$.

b) Wie groß ist die minimal erreichbare Temperatur $T_{\mathrm{H,min}}$?



Lösung

a)

1. HS Körper: $\mathrm{d}H = \mathrm{d_e}Q + V\mathrm{d}p$, für isobare ZÄ und mit H $= C_P\mathrm{d}T \quad\Rightarrow\quad \mathrm{d_e}Q = C_p\mathrm{d}T$.
Vorzeichen: $\mathrm{d_e}Q_\mathrm{H} = -C_{p,\mathrm{H}}\mathrm{d}T_\mathrm{H}$, $\mathrm{d_e}Q_\mathrm{C} = C_{p,\mathrm{C}}\mathrm{d}T_\mathrm{C}$.

2. HS für gesamtes System (beide Körper):

$$\mathrm{d}S = 0 = \frac{-\mathrm{d_e}Q_\mathrm{H}}{T_\mathrm{H}} + \frac{\mathrm{d_e}Q_\mathrm{C}}{T_\mathrm{C}} \quad\Rightarrow\quad \frac{C_{p,\mathrm{H}}}{T_\mathrm{H}}\mathrm{d}T_\mathrm{H} + \frac{C_{p,\mathrm{C}}}{T_\mathrm{C}}\mathrm{d}T_\mathrm{C} = 0,$$

Integration $\int_1^2 \quad\Rightarrow\quad C_{p,\mathrm{H}}\ln\left(\frac{T_{\mathrm{H},2}}{T_{\mathrm{H},1}}\right) = -C_{p,\mathrm{C}}\ln\left(\frac{T_{\mathrm{C},2}}{T_{\mathrm{C},1}}\right) \quad\Rightarrow\quad T_{\mathrm{C},2} = T_{\mathrm{C},1}\left(\frac{T_{\mathrm{H},1}}{T_{\mathrm{H},2}}\right)^{C_{p,\mathrm{H}}/C_{p,\mathrm{C}}}$

(Dasselbe Ergebnis ergibt sich aus dem Wirkungsgrad für eine Carnotmaschine, $\frac{Q_\mathrm{zu}}{|Q_\mathrm{ab}|} = \frac{T_\mathrm{zu}}{T_\mathrm{ab}}$.)

1. HS Carnotmaschine: $W_{12} = Q_{\mathrm{H},12} - Q_{\mathrm{C},12} = C_{p,\mathrm{H}}(T_{\mathrm{H},1} - T_{\mathrm{H},2}) - C_{p,\mathrm{C}}(T_{\mathrm{C},2} - T_{\mathrm{C},1})$

$$\Rightarrow\quad W_{12} = C_{p,\mathrm{H}}(T_{\mathrm{H},1} - T_{\mathrm{H},2}) - C_{p,\mathrm{C}}T_{\mathrm{C},1}\left[\left(\frac{T_{\mathrm{H},1}}{T_{\mathrm{H},2}}\right)^{C_{p,\mathrm{H}}/C_{p,\mathrm{C}}} - 1\right]$$

b)

$T_{\mathrm{H,min}}$ wird erreicht wenn beide Körper die gleiche Temperatur haben, $T_{\mathrm{H},2} = T_{\mathrm{C},2} = T_{\mathrm{H,min}}$. In Gleichung oben einsetzen,

$$C_{p,\mathrm{H}}\ln\left(\frac{T_{\mathrm{H,min}}}{T_{\mathrm{H},1}}\right) = -C_{p,\mathrm{C}}\ln\left(\frac{T_{\mathrm{H,min}}}{T_{\mathrm{C},1}}\right) \quad\Rightarrow\quad \left(\frac{T_{\mathrm{H,min}}}{T_{\mathrm{H},1}}\right)^{C_{p,\mathrm{H}}} = \left(\frac{T_{\mathrm{C},1}}{T_{\mathrm{H,min}}}\right)^{C_{p,\mathrm{C}}}$$

$$\Rightarrow\quad T_{\mathrm{H,min}} = \left(T_{\mathrm{C},1}^{C_{p,\mathrm{C}}}\, T_{\mathrm{H},1}^{C_{p,\mathrm{H}}}\right)^{\frac{1}{C_{p,\mathrm{H}}+C_{p,\mathrm{C}}}}$$

3) In einem Wohnraum mit dem Volumen V_1, der zunächst vollkommen geschlossen ist, wird die Lufttemperatur (geg: c_p, c_v) mittels elektrischer Widerstandsheizung von T_1 auf T_2 erhöht. Im Zustand 1 beträgt der Druck im Raum $p_1 = p_\mathrm{U}$. Anschließend wird ein Fensterspalt geöffnet. Infolge des Druckausgleichs mit der Atmosphäre (Druck p_U) sinkt die Temperatur der Raumluft von T_2 auf T_3.

Gegeben: V_1, spezifische Wärmekapazitäten c_p, c_v der Luft, T_1, T_3, p_U.

a) Berechnen Sie die Masse der ursprünglich eingeschlossenen Luft.

b) Wie viel elektrische Energie wird benötigt, um ausgehend von T_1 eine gewünschte Raumtemperatur T_3 zu erreichen?

Hinweis: Wärmeverluste durch die Wände sind ebenso zu vernachlässigen wie die Wärmekapazität des Heizkörpers.

Lösung

a)

id. Gas: $p_\mathrm{U}V_1 = mRT \;\Rightarrow\; m = \dfrac{p_\mathrm{U}V_1}{(c_p - c_v)T_1}$.

b)

$1 \to 2$ isochore Erwärmung, 1. HS U $= \mathrm{d_e}Q \;\Rightarrow\; mc_v(T_2 - T_1) = Q_{12}$.

id. Gas, $V_1 = \text{const.}$, $m = \text{konst.} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{p_\mathrm{U}}{T_1} = \dfrac{p_2}{T_2} \quad \Rightarrow \quad p_2 = p_\mathrm{U}\dfrac{T_2}{T_1}$.

$2 \to 3$ adiabate Expansion für das geschlossene System Raumluft,

$$p_2 V_1^\kappa = p_\mathrm{U}V_3^\kappa, \;\text{ mit id. Gas: }\; \frac{p_\mathrm{U}V_1}{T_1} = \frac{p_\mathrm{U}V_3}{T_3} \quad \Rightarrow \quad V_3 = V_1\frac{T_3}{T_1}$$

$$p_\mathrm{U}\frac{T_2}{T_1}V_1^\kappa = p_\mathrm{U}V_1^\kappa\left(\frac{T_3}{T_1}\right)^\kappa \quad \Rightarrow \quad T_2 = T_1\left(\frac{T_3}{T_1}\right)^\kappa \quad \Rightarrow \quad Q_{12} = mc_vT_1\left[\left(\frac{T_3}{T_1}\right)^\kappa - 1\right]$$

6) Bestimmen Sie die mittlere spezifische Wärmekapazität $c_{p,\mathrm{Al}}$ von Aluminium aus folgendem Experiment: 20 g Aluminium der Temperatur 50 °C werden in 21,5 g Wasser von 20 °C getaucht. Das Wasser befindet sich in einem Kupferbecher von 21,6 g und ebenfalls 20 °C, der von adiabaten Wänden umgeben ist. Nach dem Temperaturausgleich betrage die gemeinsame Temperatur 24,55 °C ($c_{p,\mathrm{H_2O}} = 4{,}187$ kJ/kgK, $c_{p,\mathrm{Cu}} = 383$ J/kgK).

Berechnen Sie außerdem die Entropieänderung des Gesamtsystems, bestehend aus Aluminium, Wasser und Kupferbecher.

Lösung

a)

isobare ZÄ, 1. HS $\mathrm{d}H = \mathrm{d_e}Q + V\mathrm{d}p$, mit $\mathrm{d_e}Q = 0$ folgt $H_2 - H_1 = 0$

$$H_{1,\mathrm{Al}} - H_{2,\mathrm{Al}} = H_{2,\mathrm{H_2O}} - H_{1,\mathrm{H_2O}} + H_{2,\mathrm{Cu}} - H_{1,\mathrm{Cu}}$$

$$\Rightarrow \quad m_\mathrm{Al}c_{p,\mathrm{Al}}(\vartheta_{1,\mathrm{Al}} - \vartheta_2) = (m_\mathrm{H_2O}c_{p,\mathrm{H_2O}} + m_\mathrm{Cu}c_{p,\mathrm{Cu}})(\vartheta_2 - \vartheta_{1,\mathrm{H_2O,Cu}})$$

$$20 \cdot c_{p,\mathrm{Al}} \cdot 25{,}45 = (21{,}5 \cdot 4{,}187 + 21{,}6 \cdot 0{,}383) \cdot 4{,}55 \quad \Rightarrow \quad c_{p,\mathrm{Al}} = 878 \text{ J/kgK}$$

b)

$\mathrm{d_i}S = \mathrm{d_e}S_\mathrm{Al} + \mathrm{d_e}S_\mathrm{H_2O} + \mathrm{d_e}S_\mathrm{Cu}$, $\mathrm{d_e}S = \dfrac{\mathrm{d_e}Q}{T} = \dfrac{\mathrm{d}H}{T} = \dfrac{mc_p}{T}\mathrm{d}T \;\Rightarrow\; S_2 - S_1 = mc_p \ln\left(\dfrac{T_2}{T_1}\right)$

$$S_2 - S_1 = m_\mathrm{Al}c_{p,\mathrm{Al}} \ln\left(\frac{T_2}{T_{1,\mathrm{Al}}}\right) + (m_\mathrm{H_2O}c_{p,\mathrm{H_2O}} + m_\mathrm{Cu}c_{p,\mathrm{Cu}}) \ln\left(\frac{T_2}{T_{1,\mathrm{H_2O,Cu}}}\right)$$

$$S_2 - S_1 = 20 \cdot 0{,}878 \ln\left(\frac{297{,}7}{323{,}15}\right) + (21{,}5 \cdot 4{,}187 + 21{,}6 \cdot 0{,}383) \ln\left(\frac{297{,}7}{293{,}15}\right) = 0{,}0734 \text{ J/K}$$

4) 2 kg Wasser durchläuft, ausgehend vom Zustand 1 im Zweiphasengebiet ($\vartheta_1 = 10\,°\text{C}$, $V_1 = 40\ \text{dm}^3$) folgende reversiblen Teilprozesse:

   $1 \to 2$ isotherme Verdichtung bis zum Sättigungszustand ($x_2 = 0$);

   $2 \to 3$ isotherme Kompression auf $p_3 = 15{,}55$ bar;

   $3 \to 4$ isobare Expansion bis zum Sättigungszustand ($x_4 = 0$);

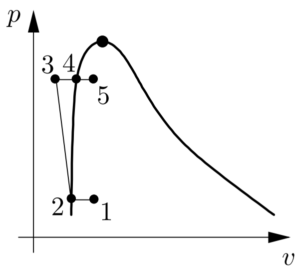
   $4 \to 5$ isobare, teilweise Verdampfung auf $V_5 = V_1$.

   a) Stellen Sie den Gesamtprozess in einem p,v-Diagramm graphisch dar.
   b) Berechnen Sie die Dampfgehalte x_1 und x_5.
   c) Bestimmen Sie unter Verwendung der Dampftafel die Enthalpiedifferenz $H_5 - H_1$ und die Differenz der inneren Energie $U_5 - U_1$.
   d) Berechnen Sie die im Teilprozess $4 \to 5$ zugeführte Wärmemenge Q_{45} und die Arbeit W_{45}.

Dampftafel für Wasser

ϑ °C	p bar	v' dm³/kg	v'' m³/kg	h' kJ/kg	h'' kJ/kg	r kJ/kg
0,01	0,006112	1,0002	206,2	0,000	2501,6	2501,6
5	0,008718	1,0000	147,2	21,01	2510,7	2489,7
10	0,01227	1,0003	106,4	41,99	2519,9	2477,9
15	0,01704	1,0008	77,98	62,94	2529,1	2466,1
20	0,02337	1,0017	57,84	83,86	2538,2	2454,3
160	6,181	1,1022	0,3068	675,5	2756,7	2081,2
170	7,920	1,1145	0,2426	719,1	2767,1	2048,0
180	10,027	1,1275	0,1938	763,1	2776,3	2013,2
190	12,551	1,1415	0,1563	807,5	2784,3	1976,8
200	15,549	1,1565	0,1272	852,4	2790,9	1938,5
210	19,077	1,173	0,1042	897,5	2796,2	1898,7
220	23,198	1,190	0,08604	943,7	2799,9	1856,2

Lösung



b) $v_1 = \frac{V_1}{m} = 20\ \text{dm}^3/\text{kg};\ v = (1-x)v' + xv''$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{v_1 - v_1'}{v_1'' - v_1'} = \frac{20 - 1{,}0003}{106{,}4 \cdot 10^3 - 1{,}0003} = 1{,}786 \cdot 10^{-4}$$

$$x_5 = \frac{v_1 - v_5'}{v_5'' - v_5'} = \frac{20 - 1{,}1565}{127{,}2 - 1{,}1565} = 0{,}1495$$

c)

$$H_5 - H_1 = m(h_5 - h_1) = m[(1-x_5)h_5' + xh_5'' - (1-x_1)h_1' - x_1 h_1'']$$

$$= 2 \cdot [0{,}8505 \cdot 852{,}4 + 0{,}1495 \cdot 2790{,}9 - 1 \cdot 41{,}99 - 1{,}786 \cdot 10^{-4} \cdot 2519{,}9] = 2 \cdot 1099{,}8 = 2200\ \text{kJ}$$

$$U_5 - U_1 = H_5 - H_1 - (p_5 - p_1)V_1 = 2{,}2 \cdot 10^6 - (15{,}55 - 0{,}001227) \cdot 10^5 \cdot 40 \cdot 10^{-3} = 2138\ \text{kJ}$$

d)

$4 \to 5$ isobare ZÄ, aus 1. HS $\mathrm{d}H = \mathrm{d_e}Q + V\mathrm{d}p$ folgt $Q_{45} = H_5 - H_4$,

$$Q_{45} = m[(1-x_5)h_5' + x_5 h_5'' - h_5'] = m x_5 r_5 = 2 \cdot 0{,}1495 \cdot 1938{,}5 = 579{,}6\ \text{kJ}$$

$$W_{45} = -p_5(V_5 - V_4) = -p_5(V_5 - mv_5') = -15{,}55 \cdot 10^5 \cdot (40 - 2 \cdot 1{,}1565) \cdot 10^{-3} = -58{,}6\ \text{kJ}$$

5) Bei der Lüftung eines Wohnraums im Winter wird dem Raum Außenluft ($p_\mathrm{U} = 1$ bar) mit einem Sättigungsgrad von 0,85 bei $\vartheta_\mathrm{U} = -5$ °C zugeführt.

   a) Welchen Sättigungsgrad hat Zimmerluft bei 20 °C ohne künstliche Befeuchtung, wenn beim Lüften die gesamte Luft im Raum durch Außenluft ersetzt wurde?

   b) Welche Wärmemenge ist bei der Lüftung für jeden Kubikmeter zugeführter (feuchter) Außenluft aufzubringen?

$c_{p,\mathrm{L}} = 1$ kJ/kgK, $c_{p,\mathrm{D}} = 1{,}9$ kJ/kgK, $r = 2501{,}6$ kJ/kg, $\mathcal{R} = 8{,}314$ kJ/kmolK, $\mathcal{M}_\mathrm{L} = 29$ g/mol, $\mathcal{M}_\mathrm{W} = 18$ g/mol; $x_\mathrm{D} = 0{,}622\dfrac{p_\mathrm{D}}{p - p_\mathrm{D}}$.

Dampfdrucktabelle
für Wasser:

ϑ °C	p_s mbar
-5	4,01
20	23,38

Lösung

a)

Sättigungsgrad $\psi = \dfrac{x_\mathrm{D}}{x_\mathrm{s}} = 0{,}85$; $x_\mathrm{s} = 0{,}622\,\dfrac{p_\mathrm{s}}{p - p_\mathrm{s}} \;\Rightarrow\; x_\mathrm{D} = 0{,}85 \cdot 0{,}622\dfrac{4{,}01}{996} = 2{,}129 \cdot 10^{-3}$

bei 20 °C: $x_{\mathrm{s},2} = 0{,}622\,\dfrac{23{,}38}{976{,}6} = 1{,}49 \cdot 10^{-2} \;\Rightarrow\; \psi_{\mathrm{s},2} = \dfrac{x_\mathrm{D}}{x_{\mathrm{s},2}} = \dfrac{2{,}129 \cdot 10^{-3}}{1{,}49 \cdot 10^{-2}} = 0{,}143$

b)

isobare ZÄ: $Q_{12} = H_2 - H_1 = m_\mathrm{L}(h_{1-x,2} - h_{1-x,1})$; $h_{1-x,2} - h_{1-x,1} = (c_{p,\mathrm{L}} + x_\mathrm{D} c_{p,\mathrm{D}})(\vartheta_2 - \vartheta_1)$;

$$m_\mathrm{L} = \frac{p_\mathrm{L} V \mathcal{M}}{\mathcal{R}T} = \frac{(p - p_{\mathrm{D},1}) V \mathcal{M}}{\mathcal{R}T}; \quad p_{\mathrm{D},1}(0{,}622 + x_D) = x_\mathrm{D} p_1$$

$$\Rightarrow \quad p_{\mathrm{D},1} = \frac{2{,}129 \cdot 10^{-3} \cdot 1000}{0{,}622 + 2{,}129 \cdot 10^{-3}} = 3{,}41 \text{ mbar}; \quad m_\mathrm{L} = \frac{0{,}9966 \cdot 10^5 \cdot 29}{8314 \cdot 268{,}15} = 1{,}296 \text{ kg}$$

$$Q_{12} = m_\mathrm{L}(c_{p,\mathrm{L}} + x_\mathrm{D} c_{p,\mathrm{D}})(\vartheta_2 - \vartheta_1) = 1{,}296 \cdot (1 + 2{,}129 \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}9) \cdot 25 = 32{,}53 \text{ kJ}$$