Prüfung aus Grundlagen der Thermodynamik, 10.02.2006 — Teil 1

Lösungen

B1 In einem Zylinder mit beweglichem Kolben befinde sich ein ideales Gas. (gegeben: Masse m, konstante Wärmekapazitäten c_p und c_v). Das Gas wird vom Ausgangszustand (p_1, T_1) reversibel adiabat auf den Druck $p_2 > p_1$ (Zustand 2) komprimiert. Danach wird dem Gas solange isobar Wärme entzogen, bis es wieder auf die Ausgangstemperatur abgekühlt ist. (Zustand 3)

Berechnen Sie (ausgedrückt in den gegebenen Grössen):

a) das Volumen V_1,

b) die Arbeit W_{12}, die Temperatur T_2, das Volumen V_2,

c) die Änderung der inneren Energie $U_3 - U_2$,

d) die abgegebene Wärme Q_{23}.

Lösung

a)

$$V_1 = \frac{m(c_p - c_v)T_1}{p_1}$$

b) Zustandsänderung $1 \to 2$ isentrop, $\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa}$, mit $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$, daher:

$$V_2 = V_1 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\kappa}}, \qquad T_2 = \frac{p_2 V_2}{m(c_p - c_v)} = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-\frac{1}{\kappa}}$$

$$W_{12} = U_2 - U_1 = mc_v(T_2 - T_1) = mc_v T_1 \left(\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-\frac{1}{\kappa}} - 1\right) > 0$$

c) $T_3 = T_1$, daher: $\quad U_3 - U_2 = mc_v(T_1 - T_2) = mc_v T_1 \left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-\frac{1}{\kappa}}\right) < 0$

d) Zustandsänderung $2 \to 3$ isobar, $p_3 = p_2$, daher:

$$Q_{23} = H_3 - H_2 = mc_p(T_1 - T_2) = mc_p T_1 \left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-\frac{1}{\kappa}}\right) < 0$$

B2 Ein gegen die Umgebung isolierter, starrer Behälter ist durch eine adiabate Trennwand, deren Volumen gegenüber den Behältervolumen vernachlässigbar klein sein soll, in zwei Kammern geteilt. Zwischen jede der beiden Kammern und die Umgebung ist eine reversibel arbeitende Wärmekraftmaschine geschaltet (Abb.1). Die linke Kammer enthält m_L, die rechte Kammer $m_\mathrm{R} = 2m_\mathrm{L}$ derselben Flüssigkeit (c = const). Die Anfangstemperatur in der linken Kammer sei $T_{\mathrm{L},0}$ und in der rechten Kammer $T_{\mathrm{R},0}$. Die Umgebungstemperatur T_U sei konstant und es gelte $T_{\mathrm{L},0} = 2T_{\mathrm{R},0}$, $T_{\mathrm{R},0} > T_\mathrm{U}$.

a) Wieviel Arbeit könnte aus diesem Zustand mit Hilfe der beiden Wärmekraftmaschinen gewonnen werden?

Vor Inbetriebnahme der Wärmekraftmaschinen wird jedoch die Trennwand entfernt, und es stellt sich wieder ein thermodynamischer Gleichgewichtszustand mit der Mischtemperatur T_M ein (Abb.2).

b) Berechnen Sie die Mischtemperatur T_M.

c) Wieviel Arbeit W_1 kann nun mit den reversibel arbeitenden Wärmekraftmaschinen gewonnen werden (Abb.3)?

d) Ist W_1 größer oder kleiner als W_0? Begründen Sie den Unterschied!

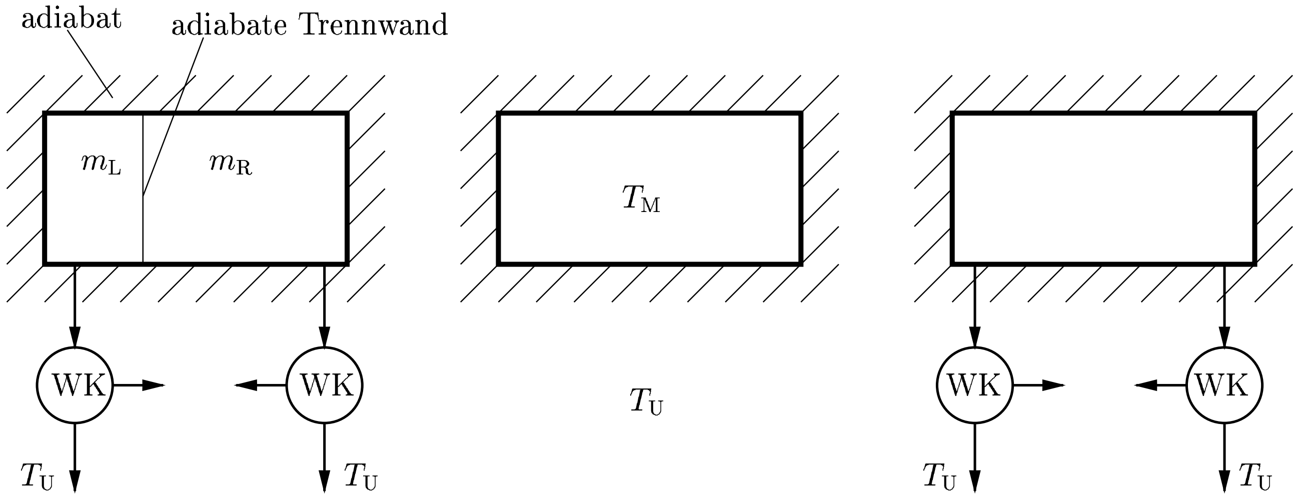


Abb.1 Abb.2 Abb.3

Lösung

a) Die Temperatur des der Carnotmaschine Wärme zuführenden Reservoirs (linke bzw. rechte Kammer) ändert sich und sinkt von $T_{\mathrm{L},0}$ bzw. $T_{\mathrm{R},0}$ auf T_U, daher differentieller Ansatz:

$$\mathrm{d}W_0 = -\eta_c \mathrm{d_e}Q_{zu} = \left(1 - \frac{T_\mathrm{U}}{T_\mathrm{L}}\right) m_\mathrm{L} c\, \mathrm{d}T_\mathrm{L} + \left(1 - \frac{T_\mathrm{U}}{T_\mathrm{R}}\right) m_\mathrm{R} c\, \mathrm{d}T_\mathrm{R} < 0$$

$$W_0 = m_\mathrm{L} c\,(T_\mathrm{U} - T_{\mathrm{L},0} - T_\mathrm{U} \ln\frac{T_\mathrm{U}}{T_{\mathrm{L},0}}) + m_\mathrm{R} c\,(T_\mathrm{U} - T_{\mathrm{R},0} - T_\mathrm{U} \ln\frac{T_\mathrm{U}}{T_{\mathrm{R},0}}) = m_\mathrm{L} c\,(3T_\mathrm{U} - 4T_{\mathrm{R},0} - T_\mathrm{U} \ln\frac{T_\mathrm{U}^3}{2T_{\mathrm{R},0}^3}) < 0$$

b) Gesamtsystem: $\mathrm{d}U = \underbrace{\mathrm{d_e}Q}_{=0,\,\text{adiabat}} + \underbrace{p\mathrm{d}V}_{=0,\,\text{isochor}} = 0 = \mathrm{d}U_\mathrm{R} + \mathrm{d}U_\mathrm{L} = c\,(m_\mathrm{L}\mathrm{d}T_\mathrm{L} + m_\mathrm{R}\mathrm{d}T_\mathrm{R})$

Integration von $T_{\mathrm{L},0}$ bis T_M bzw. von $T_{\mathrm{R},0}$ bis T_M liefert: $T_\mathrm{M} = \frac{4}{3}T_{\mathrm{R},0}$

c)

$$W_1 = (m_\mathrm{L} + m_\mathrm{R})c\,(T_\mathrm{U} - T_\mathrm{M} - T_\mathrm{U} \ln\frac{T_\mathrm{U}}{T_\mathrm{M}}) = m_\mathrm{L} c\,(3T_\mathrm{U} - 4T_{\mathrm{R},0} - 3T_\mathrm{U} \ln\frac{3T_\mathrm{U}}{4T_{\mathrm{R},0}}) < 0$$

d)

$$W_0 - W_1 = m_\mathrm{L} c\, T_\mathrm{U} \ln\frac{27}{32} < 0 \quad \Rightarrow \quad |W_0| > |W_1|$$

Der Mischprozess ist irreversibel, die Anergie wird dabei erhöht.

B3 In siedendes Wasser (Masse $m_\mathrm{W} = 100\,\mathrm{g}$, Temperatur $\vartheta = 100\,°\mathrm{C}$) wird ein Eiswürfel (Masse $m_\mathrm{E} = 10\,\mathrm{g}$, Temperatur $\vartheta = 0\,°\mathrm{C}$) gegeben (Zustand 1). Etwaiger Wärmeaustausch mit der Umgebung kann vernachlässigt werden.
Gegeben: $l_0 = 335\,\mathrm{kJ/kg}$, $c_{p,\mathrm{F}} = 4{,}19\,\mathrm{kJ/kgK}$.

a) Berechnen Sie, ob der Eiswürfel vollständig zum Schmelzen gebracht werden kann.

b) Berechnen Sie die Temperatur des Gleichgewichtszustandes (Zustand 2).

c) Berechnen Sie die Entropieänderung $(S_2 - S_1)$ des Gesamtsystems.

Lösung:

isobare Zustandsänderung: $\mathrm{d}H = 0$. Sei $H = 0$ für flüssiges Wasser bei 0°C.

a)

$$H_2 = H_{\mathrm{W},1} + H_{\mathrm{E},1} = 0{,}1 \cdot 100 \cdot 4{,}19 - 0{,}01 \cdot 335 = 38{,}55\,\mathrm{kJ}.$$

$H_2 > 0 \Rightarrow$ Eis schmilzt vollständig.

b)

$$H_2 = 0{,}11 \cdot \vartheta_2 \cdot 4{,}19 = 38{,}55 \quad \Rightarrow \quad \vartheta_2 = 83{,}64°\mathrm{C}$$

c) Für die Berechnung der Änderung der Entropie werden die ursprünglichen Eis- und Wassermassen als getrennte Systeme betrachtet.

$$\mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d_e}Q}{T} = \frac{\mathrm{d}H}{T} = \frac{mc_{p,\mathrm{F}}\mathrm{d}T}{T} \Rightarrow S_2 - S_1 = mc_{p,\mathrm{F}} \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

$$S_2 - S_1 = S_{\mathrm{W},2} - S_{\mathrm{W},1} + S^{II} - S^{I} + S_{\mathrm{E},2} - S_{\mathrm{E},1}$$

$$S_2 - S_1 = 0{,}1 \cdot 4{,}19 \ln\left(\frac{356{,}79}{373{,}15}\right) + 0{,}01 \frac{335}{273{,}15} + 0{,}01 \cdot 4{,}19 \ln\left(\frac{356{,}79}{273{,}15}\right) = 4{,}66\,\mathrm{J/K}.$$

B4 In einem Zylinder, der durch einen reibungsfrei beweglichen Kolben verschlossen ist, befindet sich ein Zweiphasengemisch aus flüssigem und dampfförmigen Wasser ($V_1 = 100\ \mathrm{dm}^3$; $x_1 = 0{,}25$; $\vartheta_1 = 150\ ^\circ\mathrm{C}$). Es werden folgende Teilprozesse durchgeführt:

$1 \to 2$ reversibel adiabate Expansion bis $p_2 = 1{,}013$ bar;

$2 \to 3$ isochore Wärmezufuhr (Kolben wird in Position 2 gehalten), bis $p_3 = 3{,}614$ bar.

Berechnen Sie

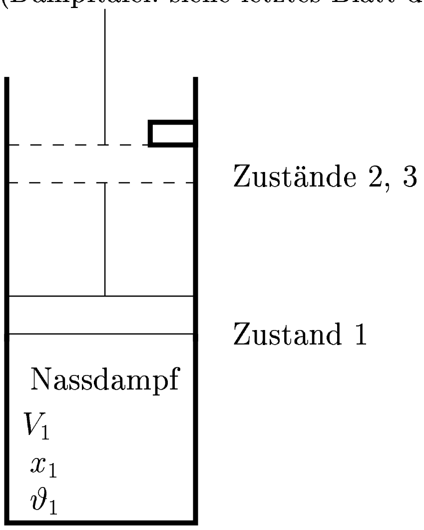
a) die im Zylinder befindliche Masse m,

b) den Dampfgehalt x_2 im Zustand 2,

c) die für die Zustandsänderung $2 \to 3$ zuzuführende Wärme Q_{23}.

d) Stellen Sie die Zustandsänderungen im p,v- und im T,s-Diagramm dar.

(Dampftafel: siehe letztes Blatt des Prüfungsbogens)



Lösung:

a)

$$m = \frac{V_1}{(1-x_1)v_1'(150^\circ\mathrm{C}) + x_1 v_1''(150^\circ\mathrm{C})} = 1{,}01094\ \mathrm{kg}$$

b)

$$s_1 = s_2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{(1-x_1)s_1'(150^\circ\mathrm{C}) + x_1 s_1''(150^\circ\mathrm{C}) - s_2'(1{,}013\ \mathrm{bar})}{s_2''(1{,}013\ \mathrm{bar}) - s_2'(1{,}013\ \mathrm{bar})} = 0{,}2948$$

c)

$$v_2 = v_3 \Rightarrow x_3 = \frac{v_2 - v_3'(3{,}614\ \mathrm{bar})}{v_3''(3{,}614\ \mathrm{bar}) - v_3'(3{,}614\ \mathrm{bar})} = 0{,}9713$$

$$Q_{23} = U_3 - U_2 = m(u_3 - u_2) = m(h_3 - h_2 - v_2(p_3 - p_2)) = 1474{,}7\ \mathrm{kJ}$$

$$h_3 = (1-x_3)h_3'(3{,}614\ \mathrm{bar}) + x_3 h_3''(3{,}614\ \mathrm{bar}) = 2671{,}6\ \mathrm{kJ/kg}$$

$$h_2 = (1-x_2)h_2'(1{,}013\ \mathrm{bar}) + x_2 h_2''(1{,}013\ \mathrm{bar}) = 1084{,}4\ \mathrm{kJ/kg}$$

$$v_2 = (1-x_2)v_2'(1{,}013\ \mathrm{bar}) + x_2 v_2''(1{,}013\ \mathrm{bar}) = 493{,}9\ \mathrm{dm}^3/\mathrm{kg}$$

B5 Ungesättigte feuchte Luft mit der trockenen Luftmasse m_L=50 kg und dem Wassergehalt $x_1 = 0{,}015$ soll durch das Zerstäuben von Wasser ($\vartheta_\mathrm{W} = 10$ °C) isobar (p = 1 bar) in einen Zustand M ($\vartheta_\mathrm{M} = 25$ °C, $x_\mathrm{M} = 0{,}025$) übergeführt werden.

a) Berechnen Sie die zu zerstäubende Wassermasse m_W. In welchem Gebiet befindet sich der Zustand M?

b) Wieviel flüssiges Wasser $m_\mathrm{F,M}$ muß bei einer isobar-isothermen Zustandsänderung ausgehend vom Zustand M entnommen werden, damit der Sättigungszustand erreicht wird?

c) Berechnen Sie die Ausgangstemperatur der feuchten Luft ϑ_1.

$$x_\mathrm{D} = \frac{\mathcal{M}_\mathrm{W}}{\mathcal{M}_\mathrm{L}} \frac{p_\mathrm{D}}{p - p_\mathrm{D}}, \frac{\mathcal{M}_\mathrm{W}}{\mathcal{M}_\mathrm{L}} = 0{,}622. \tag{1}$$

$$c_{p\mathrm{L}} = 1{,}00\,\mathrm{kJ/kgK}, \quad c_{p\mathrm{D}} = 1{,}86\,\mathrm{kJ/kgK}, \quad c_{p\mathrm{F}} = 4{,}19\,\mathrm{kJ/kgK}, \quad r_0 = 2502\,\mathrm{kJ/kg}. \tag{2}$$

Dampfdruck-
tabelle für
Wasser:

ϑ °C	p_s mbar
20	23,38
21	24,86
22	26,43
23	28,09
25	31,66

Lsung fr $x_\mathrm{M} = 0{,}03$! Fr $x_\mathrm{M} = 0{,}025$: $m_\mathrm{W} = 0{,}5$ kg, $m_\mathrm{FM} = 0{,}233$ kg.

a)

$$m_\mathrm{W} = m_\mathrm{L}(x_\mathrm{M} - x_1) = 0{,}75 \text{ kg}$$

$$p_\mathrm{sM}(25°\mathrm{C}) = 31{,}66\,\mathrm{mbar} \qquad x_\mathrm{sM} = 0{,}622\frac{p_\mathrm{sM}}{p - p_\mathrm{sM}} = 0{,}02034 \qquad x_\mathrm{sM} < x_\mathrm{M} \Rightarrow \underline{\text{Nebelgebiet}}$$

b)

$$m_\mathrm{FM} = m_\mathrm{L}(x_\mathrm{M} - x_\mathrm{SM}) = \underline{0{,}483} \text{ kg}$$

c)

$$H_\mathrm{FL} + H_\mathrm{W} = H_\mathrm{M} \;\Rightarrow$$

$$(c_{p\mathrm{L}} + x_1 c_{p\mathrm{D}})\,\vartheta_1 + x_1 r_0 + c_{p\mathrm{F}}\vartheta_\mathrm{W}\frac{m_\mathrm{W}}{m_\mathrm{L}} = (c_{p\mathrm{L}} + x_\mathrm{sM} c_{p\mathrm{D}} + x_\mathrm{FM} c_{p\mathrm{F}})\,\vartheta_M + x_\mathrm{SM} r_0$$

$$\text{mit} \quad x_\mathrm{FM} = x_\mathrm{M} - x_\mathrm{sM} = 0{,}0096636 \Rightarrow \underline{\vartheta_1 = 38{,}6°\mathrm{C}}$$