2) Aufgrund der Auftriebskraft $F_\mathrm{A} = \rho_\mathrm{L} V_\mathrm{S} g$ eines Festkörpers S (isobarer Volumensausdehnungskoeffizient β_S) in einer Flüssigkeit L (β_L) kann aus der Lage des Festkörpers auf die Temperatur des Systems im thermischen Gleichgewicht geschlossen werden (*Galileisches Thermometer*). Im gegebenen Ausgangszustand (Temperatur ϑ_1, Dichten $\rho_{\mathrm{L},1}$, $\rho_{\mathrm{S},1}$) liegt der Festkörper am Gefäßboden.

Berechnen Sie die Temperatur ϑ_c, bei der der Festkörper schwebt, d.h., die Auftriebskraft ist gleich der Schwerkraft, $F_\mathrm{A} = m_\mathrm{S} g$. Der hydrostatische Druck sei vernachlässigbar.

$$\rho_\mathrm{L} V_\mathrm{s} g = m_\mathrm{S} g \quad \Rightarrow \quad \frac{v_\mathrm{S}}{v_\mathrm{L}} = 1$$

Nun v_S und v_L als Funktion der Temperatur ausdrücken.
Isobare ZÄ, daher

$$\mathrm{d}v = \left(\frac{\partial v}{\partial \vartheta}\right)_p \mathrm{d}\vartheta, \ \times \frac{1}{v} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}v}{v} = \beta_p \mathrm{d}\vartheta$$

Exakte Lösung durch Integration,

$$\ln\left(\frac{v_\mathrm{c}}{v_1}\right) = \beta_p(\vartheta_\mathrm{c} - \vartheta_1) \quad \Rightarrow \quad v_\mathrm{S} = v_{\mathrm{S},1} \exp[\beta_\mathrm{S}(\vartheta_\mathrm{c} - \vartheta_1)], \text{ analog für } v_\mathrm{L}$$

$$\frac{v_{\mathrm{S},1} \exp[\beta_\mathrm{S}(\vartheta_\mathrm{c} - \vartheta_1)]}{v_{\mathrm{L},1} \exp[\beta_\mathrm{L}(\vartheta_\mathrm{c} - \vartheta_1)]} = 1 \quad \Rightarrow \quad \beta_\mathrm{S}(\vartheta_\mathrm{c} - \vartheta_1) - \beta_\mathrm{L}(\vartheta_\mathrm{c} - \vartheta_1) = \ln\left(\tfrac{\rho_{\mathrm{S},1}}{\rho_{\mathrm{L},1}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vartheta_\mathrm{c} = \vartheta_1 + (\beta_\mathrm{S} - \beta_\mathrm{L})^{-1} \ln\left(\tfrac{\rho_{\mathrm{S},1}}{\rho_{\mathrm{L},1}}\right)$$

Oder: Für kleine Änderungen kann der Differenzenquotient verwendet werden, $\beta_\mathrm{S} = \frac{1}{v}\frac{\Delta v}{\Delta \vartheta}$, somit $v_\mathrm{S} = v_{\mathrm{S},1}[1 + \beta_\mathrm{S}(\vartheta_\mathrm{c} - \vartheta_1)]$ und ebenso $v_\mathrm{L} = v_{\mathrm{L},1}[1 + \beta_\mathrm{L}(\vartheta_\mathrm{c} - \vartheta_1)]$.

$$\Rightarrow \quad v_{\mathrm{S},1}[1 + \beta_\mathrm{S}(\vartheta_\mathrm{c} - \vartheta_1)] = v_{\mathrm{L},1}[1 + \beta_\mathrm{L}(\vartheta_\mathrm{c} - \vartheta_1)]$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{\beta_\mathrm{S}}{\rho_{\mathrm{S},1}} - \frac{\beta_\mathrm{L}}{\rho_{\mathrm{L},1}}\right)(\vartheta_\mathrm{c} - \vartheta_1) = \frac{1}{\rho_{\mathrm{L},1}} - \frac{1}{\rho_{\mathrm{S},1}} \quad \Rightarrow \quad \vartheta_\mathrm{c} = \vartheta_1 + \frac{\rho_{\mathrm{S},1} - \rho_{\mathrm{L},1}}{\beta_\mathrm{S}\rho_{\mathrm{L},1} - \beta_\mathrm{L}\rho_{\mathrm{S},1}}$$

Auch: Mit $\beta_\mathrm{L} = -\frac{1}{\rho_{\mathrm{L},1}}\frac{\Delta\rho_\mathrm{L}}{\Delta\vartheta}$ folgt für $\rho_\mathrm{L} v_\mathrm{S} = 1$

$$\rho_{\mathrm{L},1} v_{\mathrm{S},1}[1 + \beta_\mathrm{S}(\vartheta_\mathrm{c} - \vartheta_1)][1 - \beta_\mathrm{L}(\vartheta_\mathrm{c} - \vartheta_1)] = 1$$

und somit die quadratische Gleichung

$$1 + \beta_\mathrm{S}\Delta\vartheta - \beta_\mathrm{L}\Delta\vartheta - \beta_\mathrm{S}\beta_\mathrm{L}\Delta\vartheta^2 = \frac{\rho_{\mathrm{S},1}}{\rho_{\mathrm{L},1}}$$

$$\Delta\vartheta_{1,2} = \frac{\beta_\mathrm{S} - \beta_\mathrm{L}}{2\beta_\mathrm{S}\beta_\mathrm{L}} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta_\mathrm{S} - \beta_\mathrm{L}}{2\beta_\mathrm{S}\beta_\mathrm{L}}\right)^2 - \frac{\frac{\rho_{\mathrm{S},1}}{\rho_{\mathrm{L},1}} - 1}{\beta_\mathrm{S}\beta_\mathrm{L}}}; \quad \left\{ \begin{array}{l} + \text{ für } \rho_{\mathrm{S},1} > \rho_{\mathrm{L},1},\ \beta_\mathrm{S} > \beta_\mathrm{L} \text{ und } \rho_{\mathrm{S},1} < \rho_{\mathrm{L},1},\ \beta_\mathrm{S} < \beta_\mathrm{L} \\ - \text{ für } \rho_{\mathrm{S},1} > \rho_{\mathrm{L},1},\ \beta_\mathrm{S} < \beta_\mathrm{L} \text{ und } \rho_{\mathrm{S},1} < \rho_{\mathrm{L},1},\ \beta_\mathrm{S} > \beta_\mathrm{L} \end{array} \right.$$

3) Eine Maschine mit idealem Gas geg. konstanter spezifischer Wärmekapazitäten c_v, c_p, arbeitet nach folgendem reversiblen Kreisprozess:

$1 \rightarrow 2$ isobare Expansion von v_1 auf $v_2 = 2\,v_1$;

$2 \rightarrow 3$ adiabate Expansion auf $p_3 = 0{,}5\,p_1$;

$3 \rightarrow 4$ isobare Verdichtung und

$4 \rightarrow 1$ adiabate Verdichtung.

a) Stellen Sie diesen Prozess im p,v- und im T,s-Diagramm dar.

b) Zeichnen Sie die Nettoarbeit und die zu- bzw. abgeführten Wärmen in die Diagramme ein.

c) Handelt es sich um eine Wärmekraftmaschine oder Wärmepumpe (bzw. Kältemaschine)?

d) Berechnen Sie die Nettoarbeit und die zu- bzw. abgeführten Wärmen in Abhängigkeit von p_1 und v_1.

e) Berechnen Sie den thermischen Wirkungsgrad η.

c) Wärmekraftmaschine.

d) $1 \rightarrow 2$: isobar, 1.HS: $\mathrm{d_e}q = \mathrm{d}h$, id. Gas: $\mathrm{d}h = c_p \mathrm{d}T \;\Rightarrow\; q_{12} = q_{\text{zu}} = c_p(T_1 - T_2)$,

$$\text{id. Gas: } T_1 = \frac{p_1 v_1}{c_p - c_v},\, T_2 = \frac{p_1 2 v_1}{c_p - c_v} \quad \Rightarrow \quad q_{12} = q_{\text{zu}} = \frac{c_p}{c_p - c_v} p_1 v_1$$

$2 \rightarrow 3$: isentrop, $p_2 v_2^\kappa = p_3 v_3^\kappa \quad \Rightarrow \quad v_3 = 2 \cdot 2^{\frac{1}{\kappa}} v_1,\; T_3 = 2^{\frac{1}{\kappa}} \frac{p_1 v_1}{c_p - c_v}$

$3 \rightarrow 4$: isobar, wie oben: $q_{34} = q_{\text{ab}} = c_p(T_4 - T_3)$. T_4 aus Isentrope $4 \rightarrow 1$ berechnen oder, mit $s_4 - s_3 = -(s_2 - s_1)$,

$$s_2 - s_1 = \int_1^2 \frac{\mathrm{d_e}q}{T} = \int_1^2 \frac{c_p}{T}\,\mathrm{d}T = c_p \ln\left(\tfrac{T_2}{T_1}\right); \quad \text{analog } s_4 - s_3 = c_p \ln\left(\tfrac{T_4}{T_3}\right)$$

$$\Rightarrow -\ln\left(\tfrac{T_4}{T_3}\right) = \ln\left(\tfrac{T_2}{T_1}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{T_3}{T_4} = \frac{T_2}{T_1} = 2 \quad \Rightarrow \quad T_4 = 2^{\frac{1}{\kappa}-1} \frac{p_1 v_1}{c_p - c_v}$$

$$q_{34} = q_{\text{ab}} = -\frac{c_p}{c_p - c_v} p_1 v_1 2^{\frac{1}{\kappa}-1}$$

$$w_0 = -q_{\text{zu}} - q_{\text{ab}} = \frac{c_p}{c_p - c_v} p_1 v_1 \left(-1 + 2^{\frac{1}{\kappa}-1}\right)$$

e)

$$\eta = \frac{|w_0|}{q_{\text{zu}}} = 1 - 2^{\frac{1}{\kappa}-1}$$

4) Stickstoff wird ausgehend vom Zustand 1 ($p_1 = 10$ bar, $T_1 = 270$ K) adiabat auf den Druck $p_2 = 3$ bar gedrosselt. Danach wird der Stickstoff isobar wieder auf T_1 erwärmt.

Berechnen Sie unter der Annahme konstanter Stoffwerte,

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_h = 0{,}23 \text{ K/bar}, \quad c_p = 1{,}05 \text{ kJ/kg K},$$

a) die Temperatur T_2 nach der Drosselung,

b) die Wärmemenge q_{23}, die notwendig ist, um den Stickstoff isobar auf die Temperatur T_1 zu erwärmen.

c) Wie groß ist T_2, wenn anstatt Stickstoff ein ideales Gas adiabat gedrosselt wird? (Begründung).

a) adiabate Drosselung, $h = const.$ $\quad\Rightarrow\quad T_2 - T_1 = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_h (p_1 - p_2)$

$$\Rightarrow\quad T_2 = 270 - 0{,}23 \cdot 7 = 268{,}39 \text{ K}$$

b)

$$q_{23} = c_p(T_3 - T_2) = 1{,}05 \cdot 1{,}61 = 1{,}69 \text{ kJ/kg}$$

c) id. Gas: $h = h(T)$, mit $h = const.$ $\Rightarrow$ $T = const.$, $T_2 = T_1$

5) Ein volumenbeständiger Behälter, V_K=50 dm^3, enthält im Ausgangszustand 1 flüssiges und dampfförmiges Isobutan ($x_1 = 0{,}25$, $\vartheta_1 = 18{,}33$ °C). Ausgehend von diesem Zustand wird Wärme zugeführt bis im Zustand 2 ein Druck $p_2 = 3{,}17$ bar vorliegt, ohne dass Isobutan zugeführt oder entfernt wird. Danach wird solange gesättigter Dampf abgeführt, bis die Gesamtmasse in einem Zustand 3 nur noch 60% der Ausgangsmasse beträgt, die Temperatur im Behälter aber konstant bleibt, $\vartheta_3 = \vartheta_2$.

a) Zeichnen Sie die drei Zustände in einem p,v- und einem T,s-Diagramm ein.

b) Berechnen Sie jene Wärmemengen, die dem Behälter während der Zustandsänderungen 1 $\to$ 2 und 2 $\to$ 3 zuzuführen sind.

Dampftafel für Isobutan

ϑ °C	p bar	v' dm^3/kg	v'' dm^3/kg	h' kJ/kg	h'' kJ/kg
-3,89	1,388	1,709	270	456,1	815,0
4,44	1,861	1,737	204	475,7	826,0
18,33	2,916	1,789	134	507,5	843,6
21,11	3,170	1,799	124	514,0	847,1

Zustand 1: $v_1 = (1-x_1)v_1' + x_1 v_2'' = 0{,}75 \cdot 1{,}789 + 0{,}25 \cdot 134 = 34{,}84$ dm^3/kg; $m_1 = V_\mathrm{K}/v_1 = 1{,}435$ kg; $h_1 = 0{,}75 \cdot 507{,}5 + 0{,}25 \cdot 843{,}6 = 591{,}5$ kJ/kg.

1 $\to$ 2: isochor, $v_2 = v_1$

$$\Rightarrow\quad x_2 = \frac{v_1 - v_2'}{v_2'' - v_2'} = \frac{34{,}84 - 1{,}799}{124 - 1{,}799} = 0{,}2704; \quad h_2 = 0{,}7296 \cdot 514 + 0{,}2704 \cdot 847 = 604 \text{ kJ/kg}.$$

isochor, $\mathrm{d_e}Q = \mathrm{d}U$ $\quad\Rightarrow$

$$Q_{12} = U_2 - U_1 = H_2 - H_1 - p_2 V_\mathrm{K} + p_1 V_\mathrm{K} = 1{,}435(604 - 591{,}35) - (3{,}17 - 2{,}916) \cdot 10^5 \cdot 50 \cdot 10^{-6} = 16{,}71 \text{ kJ}$$

2 $\to$ 3: Das Isobutan im Behälter als offenes System oder das gesamte Isobutan als geschlossenes System betrachten. Für ein offenes System gilt

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d_e}Q + \mathrm{d}^{(m)}H_\mathrm{ges} \quad\Rightarrow\quad U_3 - U_2 = Q_{23} + H_\mathrm{ges}^{(m)}$$

$$H_\mathrm{ges}^{(m)} = -0{,}4 m_1 h_2'' = -486{,}2 \text{ kJ}; \quad U_3 - U_2 = H_3 - H_2 - (p_3 - p_2)V_\mathrm{K} = H_3 - H_2$$

$H_3 = 0{,}6 m_1 h_3$; h_3 aus x_3, das wiederum aus v_3 berechnen,

$$v_3 = \frac{V_\mathrm{K}}{0{,}6 m_1} = \frac{v_1}{0{,}6} = 58{,}07 \text{ dm}^3/\text{kg}; \quad x_3 = \frac{v_3 - v_2'}{v_2'' - v_2'} = \frac{58{,}07 - 1{,}799}{124 - 1{,}799} = 0{,}4605;$$

$h_3 = 0{,}5395 \cdot 514 + 0{,}4605 \cdot 847{,}1 = 667{,}4$ kJ/kg; $Q_{23} = 1{,}435(0{,}6 \cdot 667{,}4 - 604) + 486{,}2 = 194{,}0$ kJ

Anmerkung: Für das gesamte Isobutan als geschlossenes System gilt $V_3 = V_\mathrm{K} + 0{,}4 m_1 v_2''$.

6) Ein Erfinder behauptet, eine Maschine erfunden zu haben, mit der man 35 kJ an Arbeit aufwenden muss um 2,5 kg Eis mit einer Anfangstemperatur $\vartheta_1 = 0$ °C beim Umgebungsdruck $p_U = 1$ bar auf $\vartheta_2 = 25$ °C zu erwärmen. Dabei steht eine Umgebung mit $\vartheta_U = 10$ °C zur Verfügung. Ist die Aussage des Erfinders glaubwürdig?

$$l_0 = 333 \text{ kJ/kg}, \; c_{p,\mathrm{W}} = 4{,}19 \text{ kJ/kgK}$$

Um das Eis auf Umgebungstemperatur aufzuwärmen, braucht überhaupt keine Arbeit aufgewendet werden, sondern nur lange genug gewartet werden. Für das Aufwärmen von 10 °C auf 25 °C wird eine Carnot-Maschine als Wärmepumpe verwendet. Wärme wird der Carnot-Maschine beim niedrigeren Temperaturniveau der Umgebung zugeführt und an das Wasser abgeführt.

$$\frac{Q_{\mathrm{zu}}}{|Q_{\mathrm{ab}}|} = \frac{T_{\mathrm{zu}}}{T_{\mathrm{ab}}} \;\Rightarrow\; Q_{\mathrm{ab}} = -\frac{T_{\mathrm{zu}}}{T_{\mathrm{ab}}} Q_{\mathrm{ab}}; \quad \mathrm{d_e}Q_{\mathrm{ab}} = -mc_{p,\mathrm{W}}\mathrm{d}T_{\mathrm{ab}}$$

Der 1.HS wird in differentieller Form angewendet,

$$\mathrm{d_e}W_0 = -\mathrm{d_e}Q_{\mathrm{zu}} - \mathrm{d_e}Q_{\mathrm{ab}} = -\left(-\frac{T_{\mathrm{zu}}}{T_{\mathrm{ab}}} + 1\right)\mathrm{d_e}Q_{\mathrm{ab}} = mc_{p,\mathrm{W}}\left(1 - \frac{T_{\mathrm{zu}}}{T_{\mathrm{ab}}}\right)\mathrm{d}T_{\mathrm{ab}}$$

$$W_0 = mc_{p,\mathrm{W}} \int_{T_U}^{T_2} 1 - \frac{T_U}{T_{\mathrm{ab}}}\,\mathrm{d}T_{\mathrm{ab}} = mc_{p,\mathrm{W}}\left[T_2 - T_U - T_U \ln\left(\frac{T_2}{T_U}\right)\right]$$

$$W_0 = 2{,}5 \cdot 4{,}19 \cdot \left[15 - 283{,}15 \ln\left(\frac{298{,}15}{283{,}15}\right)\right] = 4{,}02 \text{ kJ}$$

Es müssen mindestens 4,02 kJ Arbeit zugeführt werden. Die Aussage des Erfinders ist glaubwürdig.

Anmerkung: Beim Aufwärmen kann Arbeit gewonnen werden. Die Wärme wird bei Umgebungstemperatur einer als Wärmekraftmaschine arbeitenden Carnot-Maschine zugeführt und die Abwärme dem Eis bzw. kälteren Wasser zugeführt.

$$W_0 = -Q_{\mathrm{zu}} - Q_{\mathrm{ab}} = \left(\frac{T_{\mathrm{zu}}}{T_{\mathrm{ab}}} - 1\right) Q_{\mathrm{ab}}$$

Schmelzen des Eises, $Q_{\mathrm{ab}} = -ml_0$:

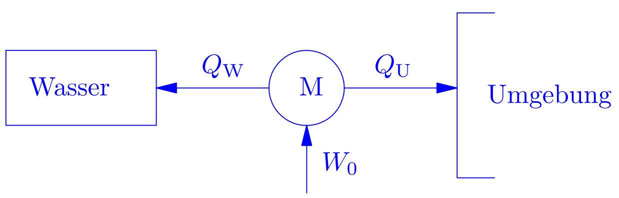
$$\Rightarrow \quad W_0 = -\left(\frac{T_U}{T_1} - 1\right) ml_0 = -30{,}478 \text{ kJ}$$

Aufwärmen des Wassers von 0 °C auf 10 °C, $Q_{\mathrm{ab}} = -mc_{p,\mathrm{W}}\mathrm{d}T_{\mathrm{ab}}$:

$$W_0 = -mc_{p,\mathrm{W}} \int_{T_1}^{T_U} \frac{T_U}{T_{\mathrm{ab}}} - 1\,\mathrm{d}T_{\mathrm{ab}} = mc_{p,\mathrm{W}}\left[T_U \ln\left(\frac{T_U}{T_1}\right) - (T_U - T_1)\right] = -1{,}8945 \text{ kJ}$$

Insgesamt können bei dem Prozess 28,35 kJ an Arbeit gewonnen werden.

Alternativ: Man betrachte einen reversiblen, zwischen Wasser und Umgebung stattfindenden Prozess.



1.HS Maschine: $W_0 - Q_W - Q_U = 0$

$$\Rightarrow Q_U = -m[l_0 + c_p(\vartheta_2 - \vartheta_1)] + W_0 = -2{,}5 \cdot (333 + 4{,}19 \cdot 25) + 35 = -1094{,}4 + 35 = 1059{,}4 \text{ kJ}$$

2. HS: Die Entropie des gesamten Systems muss steigen, $S_2 - S_1 \geq 0$, $S_2 - S_1 = \Delta S_\mathrm{W} + \Delta S_\mathrm{U}$.

$$\Delta S_\mathrm{W} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\mathrm{d_e}Q_\mathrm{W}}{T} = m\frac{l_0}{T_1} + \int_{T_1}^{T_2} \frac{mc_p\mathrm{d}T}{T} = m\left[\frac{l_0}{T} + c_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)\right]$$

$$\Delta S_\mathrm{W} = 2{,}5\left[\frac{333}{273{,}15} + 4{,}19 \cdot \ln\left(\frac{298{,}15}{273{,}15}\right)\right] = 3{,}96513\ \mathrm{kJ/K}$$

$$\Delta S_\mathrm{U} = \frac{Q_\mathrm{U}}{T_\mathrm{U}} = -\frac{1059{,}4}{283{,}15} = -3{,}74148\ \mathrm{kJ/K}$$

$$\Delta S_\mathrm{W} + \Delta S_\mathrm{U} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Der Prozess ist möglich.}$$

Anmerkung: Mit der Forderung $S_2 - S_1 = 0$ erhält man die mindestens aufzuwendende Arbeit.

$$\Delta S_\mathrm{U} = -\Delta S_\mathrm{W} \quad \Rightarrow \quad Q_\mathrm{U} = -\Delta S_\mathrm{W} T_\mathrm{U} = -3{,}96513 \cdot 283{,}15 = -1122{,}7\ \mathrm{kJ}$$

$$W_0 = Q_\mathrm{U} + Q_\mathrm{W} = -1122{,}7 + 1094{,}4 = -28{,}3\ \mathrm{kJ}$$

Es können bis zu 28,3 kJ Arbeit gewonnen werden.