Prüfung aus Grundlagen der Thermodynamik: Teil 1 14. 10. 2005

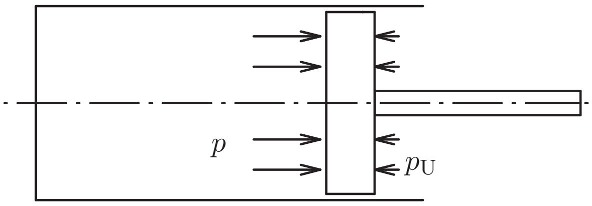
2) In einem Zylinder, der durch einen reibungslosen Kolben verschlossen ist, befindet sich ein ideales Gas mit geg. konstanten spez. Wärmekapazitäten. Gegebener Anfangszustand: p_1, V_1, $T_1 = T_\mathrm{U}$ (Umgebungstemperatur). Durch eine reversible isotherme Expansion von p_1 auf den gegebenen Umgebungsdruck p_U soll an der Kolbenstange die Arbeit W_K gewonnen werden.

a) Berechnen Sie die im Zylinder enthaltene Gasmasse m.

b) Berechnen Sie die Arbeit W_K. (Auf Umgebungsdruck achten!)

c) Berechnen Sie die Änderung der Entropie des Gases.

d) Stellen Sie diesen Prozess in einem p,v- und einem T,s-Diagramm dar und zeichnen Sie die zugeführte Wärme und die entnommene Arbeit W_K ein.



a) $$p\frac{V}{m} = RT \;\Rightarrow\; \underline{m = \frac{p_1 V_1}{(c_p - c_v)T_1}}$$

b) W_K ist die dem System entnommene Verschiebungsarbeit, abzüglich der an der Umgebung verrichteten Verschiebungsarbeit:

$$\mathrm{d}W_\mathrm{K} = -(p - p_\mathrm{U})\mathrm{d}V \Rightarrow W_\mathrm{K} = -\int_{V_1}^{V_\mathrm{U}} p\mathrm{d}V + \int_{V_1}^{V_\mathrm{U}} p_\mathrm{U}\mathrm{d}V$$

Nun wird p durch V ausgedrückt. Isotherme Zustandsänderung, deshalb

$$pV = const. = p_1V_1 \Rightarrow p = p_1V_1\frac{1}{V},\; V = p_1V_1\frac{1}{p}$$

(Man kann natürlich auch mit $p = RT_1m/V$ rechnen.)

$$\int_{V_1}^{V_\mathrm{U}} p\mathrm{d}V = p_1V_1\int_{V_1}^{V_\mathrm{U}} \frac{1}{V}\mathrm{d}V = p_1V_1\ln\left(\frac{V_\mathrm{U}}{V_1}\right) = p_1V_1\ln\left(\frac{p_1}{p_\mathrm{U}}\right)$$

$$\int_{V_1}^{V_\mathrm{U}} p_\mathrm{U}\mathrm{d}V = p_\mathrm{U}(V_\mathrm{U} - V_1) = p_\mathrm{U}p_1V_1\left(\frac{1}{p_\mathrm{U}} - \frac{1}{p_1}\right) = p_1V_1\left(1 - \frac{p_\mathrm{U}}{p_1}\right)$$

$$\Rightarrow \underline{W_\mathrm{K} = -p_1V_1\left[\ln\left(\frac{p_1}{p_\mathrm{U}}\right) - 1 + \frac{p_\mathrm{U}}{p_1}\right]}$$

c) Gibbssche Fundamentalgleichung: $T\mathrm{d}S = \mathrm{d}U + p\mathrm{d}V$
ideales Gas: $U = mu(T)$, $T = T_1 = const.$, $m = const.$ $\;\Rightarrow \mathrm{d}U = 0$; $T\mathrm{d}S = p\mathrm{d}V$.

$$\underline{S_\mathrm{U} - S_1} = \int_{V_1}^{V_\mathrm{U}} \frac{p}{T}\mathrm{d}V = \frac{p_1V_1}{T_1}\int_{V_1}^{V_\mathrm{U}} \frac{1}{V}\mathrm{d}V = \frac{p_1V_1}{T_1}\ln\left(\frac{V_\mathrm{U}}{V_1}\right) = \underline{\frac{p_1V_1}{T_1}\ln\left(\frac{p_1}{p_\mathrm{U}}\right)}$$

3) Eine Maschine mit einem idealen Gas gegebener konstanter spezifischer Wärmekapazitäten als Arbeitsmedium arbeitet nach folgendem reversiblen Kreisprozess:
$1 \rightarrow 2$ isobare Expansion,
$2 \rightarrow 3$ isotherme Expansion,
$3 \rightarrow 4$ isobare Verdichtung,
$4 \rightarrow 1$ isotherme Verdichtung.

a) Stellen Sie diesen Prozess in einem p,v- bzw. T,s-Diagramm dar. Zeichnen Sie die Nettoarbeit und die zu- bzw. abgeführten Wärmen in die Diagramme ein.

b) Berechnen Sie die Nettoarbeit und die zu- bzw. abgeführten Wärmen. Gegeben seien T_1, T_2, p_2 und p_3.

c) Berechnen Sie den Wirkungsgrad als Funktion von $\varepsilon = T_2/T_1$ und $\varphi = p_2/p_3$.

b) Berechnung der zu- und abgeführten Wärmen. Mit 1. HS für ein ruhendes, geschlossenes System und der idealen Gasgleichung gilt

$$ds = \frac{d_e q}{T} = \frac{du + pdv}{T} = c_p \frac{dT}{T} - R\frac{dp}{p}$$

$$q_{\text{zu}} = \int\limits_{1\to2\to3} Tds = q_{1-2} + q_{2-3} = c_p(T_2 - T_1) + RT_2 \ln\left(\frac{p_2}{p_3}\right)$$

$$q_{\text{ab}} = \int\limits_{3\to4\to1} Tds = q_{3-4} + q_{4-1} = -c_p(T_2 - T_1) - RT_1 \ln\left(\frac{p_2}{p_3}\right)$$

Nettoarbeit:

$$w_0 = -\sum q = -R(T_2 - T_1) \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$$

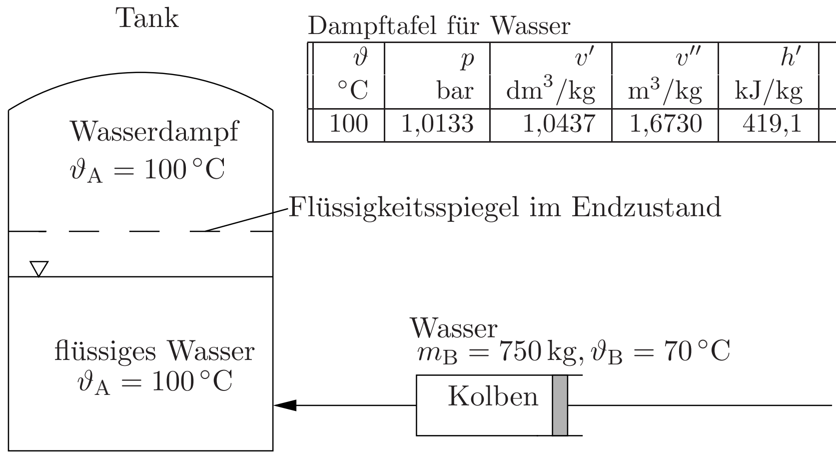
$w_0 < 0$, das System verrichtet Arbeit an der Umgebung.

c)

$$\eta = \frac{-w_0}{q_{\text{zu}}} = \frac{\ln\varphi}{\frac{\kappa}{\kappa-1} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\ln\varphi}$$

mit $\kappa = c_p/c_v$ und $R = c_p - c_v$.

4) Ein starrer Tank mit einem Volumen $V_\mathrm{T} = 2{,}5\,\mathrm{m}^3$ beinhaltet ein Zweiphasengemisch aus flüssigem und dampfförmigem Wasser (Masse des flüssigen Wassers $m_\mathrm{F,A} = 500\,\mathrm{kg}$, $\vartheta_\mathrm{A} = 100\,°\mathrm{C}$, $p_\mathrm{A} = 1{,}0133\,\mathrm{bar}$).
Über einen Kolben werden dem Tank $m_\mathrm{B} = 750\,\mathrm{kg}$ Wasser ($\vartheta_\mathrm{B} = 70\,°\mathrm{C}$, $p_\mathrm{B} = p_\mathrm{A}$, $h_\mathrm{B} = 293\,\mathrm{kJ/kg}$) zugeführt. Berechnen Sie die erforderliche Wärmemenge, die zu- oder abgeführt werden muss, damit im Tank Druck und Temperatur konstant bleiben.



Dampftafel für Wasser

ϑ	p	v'	v''	h'	h''
°C	bar	dm³/kg	m³/kg	kJ/kg	kJ/kg
100	1,0133	1,0437	1,6730	419,1	2676,0

Rechengang: Zur Enthalpie des Systems wird die Enthalpie des Wassers zugefügt. Andererseits folgt aus der Massenbilanz und der Forderung nach konstantem Volumen die Enthalpie H_2, die den geforderten Zustand im Tank ($p = 1\mathrm{bar}$, $\vartheta = 100°\mathrm{C}$) ergibt. Die erforderliche Wärmemenge ergibt sich aus der Enthalpiedifferenz.

1. HS für ein offenes System mit raumfesten Systemgrenzen: $\mathrm{d}E = \mathrm{d_e}W_t + \mathrm{d_e}Q + \mathrm{d_e}^{(m)}H_\mathrm{ges}$. Mit $\mathrm{d}E = \mathrm{d}H - p\mathrm{d}V - V\mathrm{d}p$ folgt wegen $\mathrm{d}V = 0$ und $\mathrm{d}p = 0$

$$\mathrm{d}H = \mathrm{d_e}Q + \mathrm{d_e}^{(m)}H_\mathrm{ges}, \quad \Rightarrow H_2 - H_\mathrm{A} = Q_{\mathrm{A}-2} + m_\mathrm{B}h_\mathrm{B}.$$

Enthalpie A:
$V_\mathrm{T} = m_{l,\mathrm{A}}v' + m_{g,\mathrm{A}}v'' \;\Rightarrow m_{g,\mathrm{A}} = (V_\mathrm{T} - m_{l,\mathrm{A}}v')/v'' = 1.1824\mathrm{kg}$.

$$H_\mathrm{A} = m_{l,\mathrm{A}}h' + m_{g,\mathrm{A}}h'' = 212.7\mathrm{MJ}$$

H_2 ergibt sich aus der Massenbilanz und der Forderung nach konstantem Volumen,

$$m_2 = m_{l,\mathrm{A}} + m_{g,\mathrm{A}} + m_\mathrm{B} = 1251.18\mathrm{kg}$$

$$V_\mathrm{T} = m_\mathrm{ges}[(1-x_2)v' + x_2v''] \;\Rightarrow x_2 = \left(\frac{V_\mathrm{T}}{m_2} - v'\right)\Big/ (v'' - v') = 5.708 \cdot 10^{-4}$$

$$H_2 = m_2[(1-x_2)h' + x_2h''] = 525.9\mathrm{MJ}$$

$$\underline{Q_{\mathrm{A}-2} = H_2 - H_\mathrm{A} - m_\mathrm{B}h_\mathrm{B} = 93.5\mathrm{MJ}}$$

Dem System müssen 93.5MJ Wärme zugeführt werden.

5) In einem leeren, luftgefüllten Kühlraum befindet sich eine Glühbirne mit einer Leistung von 100 W. Das Kühlaggregat fällt aus. Welche mittlere Temperatur herrscht nach einer Stunde in dem Raum, wenn Temperatur und Druck zu Beginn $\vartheta_1 = 4\,°\mathrm{C}$ und $p_1 = 1\,\mathrm{bar}$ waren. Die Wände des Kühlraumes können als adiabat angenommen werden.
Gegeben: $V = 25\,\mathrm{m}^3$, $\kappa = 1.4$.

Der 1. Hs für ein ruhendes, geschlossenes System lautet

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d_e}W + \mathrm{d_e}Q \;\Rightarrow \mathrm{d_e}Q = \mathrm{d}U.$$

Für ein ideales Gas ist $U = mu(T)$, $\mathrm{d}U = mc_v\mathrm{d}T$. Einsetzen ergibt, mit $m = p_1V/(RT_1)$,

$$\int \mathrm{d_e}Q = P\Delta t = mc_v \int \mathrm{d}T \quad \Rightarrow P\Delta t = \frac{p_1V}{(c_p - c_v)T_1}c_v(T_2 - T_1)$$

$$\underline{\vartheta_2 = \vartheta_1 + P\Delta t(\kappa - 1)T_1/\,(p_1V) = 19.96°\mathrm{C}}$$

6) Ein Stahlblock (Anfangstemperatur $\vartheta_{\mathrm{St}} = 700\,°\mathrm{C}$, $c_{\mathrm{St}} = 460\,\mathrm{J/kgK}$, Masse $m = 10\,\mathrm{kg}$) wird in Wasser ($c_{\mathrm{W}} = 4{,}19\,\mathrm{kJ/kgK}$) bis zum Erreichen der gemeinsamen Endtemperatur $\vartheta_{\mathrm{E}} = 50\,°\mathrm{C}$ abgeschreckt. Berechnen Sie die Entropieerhöhung ($S_2 - S_1$) des Systems Stahlblock-Wasser für eine Wasseranfangstemperatur von 10 °C.
Hinweis: Berechnen Sie zuerst die Wassermasse.

Wasser und Stahlblock werden als getrennte Systeme betrachtet. Die Wassermasse ergibt sich aus dem Gleichsetzen der ausgetauschten Wärmen,

$$-m_{\mathrm{St}}c_{\mathrm{St}}(\vartheta_{\mathrm{E}} - \vartheta_{\mathrm{St}}) = m_{\mathrm{W}}c_{\mathrm{W}}(\vartheta_{\mathrm{E}} - \vartheta_{\mathrm{W}}), \quad \Rightarrow m_{\mathrm{W}} = 17.84\mathrm{kg}.$$

In beiden Systemen gilt $T\mathrm{d}S = \mathrm{d}Q$, $\mathrm{d}Q = mc\mathrm{d}T$, daher

$$S_2 - S_1 = mc\int_1^2 \frac{1}{T}\mathrm{d}T = mc\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

$$\underline{S_2 - S_1 = m_{\mathrm{St}}c_{\mathrm{St}}\ln\left(\frac{T_{\mathrm{E}}}{T_{\mathrm{St}}}\right) + m_{\mathrm{W}}c_{\mathrm{W}}\ln\left(\frac{T_{\mathrm{E}}}{T_{\mathrm{W}}}\right) = 9877.4 - 5071.1 = 4806\mathrm{kJ/K}}$$