Prüfung aus Grundlagen der Thermodynamik 06. 06. 2003

B1) Zwei Behälter A und B, die durch eine sehr kleine Öffnung verbunden sind, enthalten ideales Gas. Das Verhältnis der Volumina der beiden Kessel beträgt: $V_\mathrm{A}/V_\mathrm{B} = 4$. Das Gas im Ausgangszustand befindet sich im thermodynamischen Gleichgewichtszustand bei einer Temperatur von $T = T_1$ und einem Druck von $p = p_1$. Die Temperatur im Behälter A wird nun auf $T_2 > T_1$ erhöht, im Behälter B bleibt sie unverändert. Nachdem sich ein stationärer Zustand eingestellt hat, beträgt der Druck in den Behältern $p_2 = 2p_1$. Berechnen Sie das Verhältnis von T_2 zu T_1.

Im Zustand 2 herrscht im Behälter B die Temperatur T_2, im Behälter A die Temperatur T_1. Mit der Zustandsgleichung für ein ideales Gas erhält man

$$m_{\mathrm{A},1} = p_1 V_\mathrm{A}/(RT_1), \quad m_{\mathrm{B},1} = p_1 V_\mathrm{B}/(RT_1),$$

$$m_{\mathrm{A},2} = p_2 V_\mathrm{A}/(RT_2), \quad m_{\mathrm{B},2} = p_2 V_\mathrm{B}/(RT_1).$$

Die Massenerhaltung verlangt $m_{\mathrm{A},1} + m_{\mathrm{B},1} = m_{\mathrm{A},2} + m_{\mathrm{B},2}$, somit nach Substitution

$$\frac{p_1 V_\mathrm{A}}{RT_1} + \frac{p_1 V_\mathrm{B}}{RT_2} = \frac{p_2 V_\mathrm{A}}{RT_2} + \frac{p_2 V_\mathrm{B}}{RT_1} \qquad \Big| \times \frac{RT_1}{p_1 V_\mathrm{B}}$$

$$\frac{V_\mathrm{A}}{V_\mathrm{B}} + 1 - \frac{p_2}{p_1} = \frac{T_1}{T_2}\frac{p_2}{p_1}\frac{V_\mathrm{A}}{V_\mathrm{B}} \qquad \Rightarrow \underline{\frac{T_2}{T_1} = \frac{2 \cdot 4}{4 + 1 - 2} = \frac{8}{3}}$$

B2) Eine Maschine mit idealem Gas als Arbeitsmedium (Molmasse $\mathcal{M}$ und Isentropenexponent κ gegeben) arbeitet nach folgendem reversiblen Kreisprozeß:

$1 \to 2$ Isobare Expansion

$2 \to 3$ Adiabate Expansion

$3 \to 1$ Isotherme Kompression von p_3 auf p_1.

Die universelle Gaskonstante $\mathcal{R}$ ist gegeben.

a) Zeichnen Sie die Zustandsänderungen in ein p,v- und ein T,s-Diagramm ein.
b) Handelt es sich bei dieser Maschine um eine Wärmekraft- oder eine Kältemaschine?
c) Bei welchen Prozessen wird Wärme abgegeben bzw. aufgenommen?
d) Skizzieren Sie in den Diagrammen die Nettoarbeit und die zu- bzw. abgeführten Wärmen.
e) Berechnen Sie den thermischen Wirkungsgrad als Funktion von T_1 und T_2.

b) Wärmekraftmaschine: Es wird mehr Wärme zugeführt als abgegeben, und es wird Arbeit verrichtet.
c) $1 \to 2$: Wärme wird aufgenommen.
$3 \to 1$: Wärme wird abgegeben.
e)
Der thermische Wirkungsgrad ist das Verhältnis von Nutzen zu Aufwand, $\eta = \dfrac{|w_0|}{q_\mathrm{zu}} = 1 - \dfrac{|q_\mathrm{ab}|}{q_\mathrm{zu}}$.

$$q_\mathrm{zu} = q_{12}; \quad 1 \to 2: \text{ Isobare } \Rightarrow \mathrm{d_e}q = \mathrm{d}h + v\mathrm{d}p = c_p \mathrm{d}T; \quad q_{12} = \int_1^2 cp\,\mathrm{d}T = c_p(T_2 - T_1).$$

$$|q_\mathrm{ab}| = |q_{31}| = q_{13}; \quad \mathrm{d_e}q = T\mathrm{d}s \Rightarrow q_{13} = \int_1^3 T_1\,\mathrm{d}s = T_1(s_3 - s_1)$$

Mit $s_2 = s_3$ erhält man $q_{13} = T_1(s_2 - s_1)$.

$$s_2 - s_1: \quad \mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d_e}q}{T} = \frac{\mathrm{d}h - v\mathrm{d}p}{T}; \text{ Isobare } \Rightarrow \mathrm{d}s = \frac{c_p}{T}\mathrm{d}T; \quad s_2 - s_1 = c_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

$$\underline{\eta} = 1 - \frac{q_{13}}{q_{12}} = 1 - \frac{T_1 c_p \ln(T_2/T_1)}{c_p(T_2 - T_1)} = \underline{1 - \frac{T_1}{T_2 - T_1}\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)}$$

Ein aufwendigerer Weg, um q_{13} zu berechnen:

$$\mathrm{d_e}q = \mathrm{d}h - v\mathrm{d}p; \text{ Isotherme, id. Gas } \Rightarrow \mathrm{d_e}q = \frac{-RT}{p}\mathrm{d}p; \quad q_{13} = RT_1 \ln\left(\frac{p_1}{p_3}\right)$$

$$p_1 = p_2,\ T_3 = T_1, \text{ id. Gas } \Rightarrow \frac{p_1}{p_3} = \frac{p_2}{p_3} = \frac{T_2}{T_1}\frac{v_3}{v_2}$$

$$2 \to 3: \text{ isentrope, } pv^\kappa = const. \Rightarrow \frac{v_3}{v_2} = \left(\frac{p_2}{p_3}\right)^{1/\kappa}.$$

Einsetzen ergibt

$$\frac{p_2}{p_3} = \frac{T_2}{T_1}\left(\frac{p_2}{p_3}\right)^{1/\kappa} \Rightarrow \frac{p_2}{p_3} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$$

$$q_{13} = RT_1\frac{\kappa}{\kappa - 1}\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = \frac{c_p - c_v)T_1 c_p}{c_v(\frac{c_p}{c_v} - 1)}\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = T_1 c_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

B3) Eine Carnotmaschine arbeitet zwischen einem Körper (Masse $m = 100\,\mathrm{kg}$, spezifische Wärmekapazität $c = 4{,}19\,\mathrm{kJ/kgK}$, Ausgangstemperatur $\vartheta_0 = 100\,°\mathrm{C}$) und der Umgebung (Umgebungstemperatur $\vartheta_1 = 10\,°\mathrm{C}$).
Wieviel Arbeit kann mittels der Carnotmaschine bei dieser Anordnung maximal gewonnen werden?
Hinweis: Bestimmen Sie die differentielle Arbeit $\mathrm{d_e}W$, die bei einer differentiellen Temperaturänderung $\mathrm{d}T$ des Körpers gewonnen wird.

Der momentane thermische Wirkungsgrad ist für eine Carnotmaschine $\eta = \frac{|\mathrm{d_e}W|}{\mathrm{d_e}Q_{\mathrm{zu}}} = 1 - \frac{T_1}{T}$.
Die dem Körper zugeführte Wärme ist $\mathrm{d_e}Q = mc\mathrm{d}T = -\mathrm{d_e}Q_{\mathrm{zu}}$. Die gewonnene Arbeit ist

$$|\mathrm{d_e}W| = -mc\left(1 - \frac{T_1}{T}\right)\mathrm{d}T,$$

$$\underline{|W|} = -mc\int_{T_0}^{T_1}\left(1 - \frac{T_1}{T}\right)\mathrm{d}T = mc_p\left[T_0 - T_1 - T_1\ln\left(\frac{T_0}{T_1}\right)\right] \underline{= 4965\,\mathrm{kJ}.}$$

B4) In einem mit einem reibungsfrei beweglichen Kolben verschlossenen Zylinder befindet sich im Ausgangszustand trockene Luft mit der Temperatur $\vartheta = 25\,°\mathrm{C}$, dem Druck $p = 1\,\mathrm{bar}$ und dem Volumen $V_1 = 0{,}5\,\mathrm{m}^3$. Es wird nun flüssiges Wasser der Masse $m_\mathrm{W} = 1\,\mathrm{g}$ und der Temperatur $\vartheta = 25\,°\mathrm{C}$ eingespritzt. Man berechne die Mischtemperatur und den Sättigungsgrad ψ bei konstant bleibendem Druck.

$$\mathcal{R} = 8{,}314\,\mathrm{kJ/kmolK}, \quad \mathcal{M}_\mathrm{L} = 29\,\mathrm{kg/kmol},$$

$$c_{\text{p,Luft}} = 1\,\text{kJ/kgK}, \quad c_{\text{p,fl.Wasser}} = 4{,}19\,\text{kJ/kgK}, \quad c_{\text{p,Dampf}} = 1{,}9\,\text{kJ/kgK}, \quad r = 2501\,\text{kJ/kg},$$

$$x_{\text{D}} = 0{,}622\frac{p_{\text{D}}}{p - p_{\text{D}}}, \quad \varphi = \frac{p_{\text{D}}}{p_{\text{s}}}, \quad \psi = \frac{x_{\text{D}}}{x_{\text{s}}}.$$

Masse der Luft: $m_{\text{L}} = \dfrac{pV\mathcal{M}}{\mathcal{R}T} = 0.585\,\text{kg}$.
Der Mischungsvorgang verläuft isobar, mit der Umgebung wird keine Wärme ausgetauscht: $\text{d}_{\text{e}}Q = 0 = \text{d}H \Rightarrow H_1 = H_2$. Nehmen wir vorerst an, das Wasser verdampfe vollständig, dann gilt

$$m_{\text{L}}c_{p,L}\vartheta_1 + m_{\text{W}}c_{p,W}\vartheta_1 = m_{\text{L}}c_{p,L}\vartheta_2 + m_{\text{W}}c_{p,D}\vartheta_2 + m_{\text{W}}r \quad \Rightarrow \underline{\vartheta_2 = 20.8\,^\circ\text{C}}$$

Der Wassergehalt ist $x_2 = m_{\text{W}}/m_{\text{L}} = 1/585 = 1.709 \cdot 10^{-3}$. Aus der Dampfdrucktabelle liest man den Sättigungsdruck $p_{\text{s}}(20.8\,^\circ\text{C}) \approx 24.6\,\text{mbar}$ ab. Der Wassergehalt bei Sättigung ist damit $x_{\text{s}} = 0.622\dfrac{2.46 \cdot 10^3}{(1 - 2.46 \cdot 10^{-2}) \cdot 10^5} = 1.57 \cdot 10^{-2}$. Wegen $x_{\text{s}} > x_2$ stellt sich obige Annahme, das Wasser verdampfe vollständig, als richtig heraus. Der Sättigungsgrad ist $\underline{\psi = \dfrac{x_2}{x_{\text{s}}} = 0.11}$.

B5) Eis ($m_{\text{E}} = 1{,}5\,\text{kg}$, $\vartheta_{\text{E}} = -10\,^\circ\text{C}$) und flüssiges Wasser ($m_{\text{W}} = 2\,\text{kg}$) werden in einem adiabaten Behälter bei konstantem Druck von $p = 1\,\text{bar}$ gemischt. Berechnen Sie die notwendigen Anfangstemperaturen (ϑ_{W1}, ϑ_{W2}) des flüssigen Wassers für zwei verschiedene Endzustände im thermodynamischen Gleichgewicht:

a) Das Eis ist gerade vollständig geschmolzen.
b) Die Massen von Eis und flüssigem Wasser sind die selben wie im Ausgangszustand.

Wieviel Entropie wurde dabei jeweils produziert?

$$c_{\text{p,fest}} = 2{,}1\,\text{kJ/kgK}, \quad c_{\text{p,flüssig}} = 4{,}19\,\text{kJ/kgK}, \quad l = 333{,}5\,\text{kJ/kg}.$$

Isobare Zustandsänderung, deshalb $\text{d}H = \text{d}H_{\text{E}} + \text{d}H_{\text{W}} = \text{d}_{\text{e}}Q + V\text{d}p = 0 \Rightarrow H_{\text{E1}} + H_{\text{W1}} = H_{\text{E2}} + H_{\text{W2}}$.
a)

$$m_{\text{E}}c_{p,\text{E}}\vartheta_{\text{E}} - m_{\text{E}}l + m_{\text{W}}c_{p,\text{W}}\vartheta_{\text{W1}} = 0 \quad \Rightarrow \underline{\vartheta_{\text{W1}}} = \frac{-m_{\text{E}}c_{p,\text{E}}\vartheta_{\text{E}} + m_{\text{E}}l}{m_{\text{W}}c_{p,\text{W}}} \underline{= 63.46\,^\circ\text{C}}$$

b)

$$m_{\text{E}}c_{p,\text{E}}\vartheta_{\text{E}} - m_{\text{E}}l + m_{\text{W}}c_{p,\text{W}}\vartheta_{\text{W2}} = -m_{\text{E}}l \quad \Rightarrow \underline{\vartheta_{\text{W2}}} = \frac{-m_{\text{E}}c_{p,\text{E}}\vartheta_{\text{E}}}{m_{\text{W}}c_{p,\text{W}}} \underline{= 3.76\,^\circ\text{C}}$$

Entropieproduktion: $\text{d}S = \text{d}_{\text{e}}S + \text{d}_{\text{i}}S$, $\text{d}_{\text{e}}S = 0$, $\text{d}_{\text{i}}S = \text{d}S_{\text{E}} + \text{d}S_{\text{W}}$. Während das Gesamtsystem keine Wärme mit der Umgebung austauscht, wird zwischen Eis und Wasser Wärme ausgetauscht, $\text{d}S_{\text{E}} = \dfrac{\text{d}_{\text{e}}Q_{\text{E}}}{T} = \dfrac{\text{d}H_{\text{E}}}{T}$, $\text{d}S_{\text{W}} = \dfrac{\text{d}H_{\text{W}}}{T}$; $\text{d}H = \dfrac{mc}{T}\text{d}T$.
a) Mit der Schmelzentropie, $S^{\text{II}} - S^{\text{I}} = ml/T_{\text{m}}$, $T_2 = T_{\text{m}} = 273.15\,\text{K}$, ergibt sich

$$\underline{S_2 - S_1} = m_{\text{E}}c_{p,\text{E}}\ln\left(\frac{T_2}{T_{\text{E}}}\right) + m_{\text{W}}c_{p,\text{W}}\ln\left(\frac{T_2}{T_{\text{W1}}}\right) + S^{\text{II}} - S^{\text{I}} = \underline{199\,\text{J/K}}$$

b)

$$\underline{S_2 - S_1} = m_{\text{E}}c_{p,\text{E}}\ln\left(\frac{T_2}{T_{\text{E}}}\right) + m_{\text{W}}c_{p,\text{W}}\ln\left(\frac{T_2}{T_{\text{W2}}}\right) = \underline{2.92\,\text{J/K}}$$