Zusätzliche Beispiele zu Ein- und Mehrphasenströmungen

Beispiel: Ähnlichkeit

1)
Der Wellenwiderstand eines 210 Fuß langen und 14 Knoten schnell fahrenden Schiffes soll anhand eines Schleppmodells im Maßstab 1:20 bestimmt werden. 1 Fuß = 30,48 cm, 1 nautische Meile = 1,852 km.

a) Mit welcher Geschwindigkeit muss das Modell bewegt werden, um dasselbe Wellenbild und damit denselben Widerstandsbeiwert zu erzeugen?

b) Wie groß ist der Widerstand im Vergleich zum Original?

c) Was kann über die Reibungskräfte gesagt werden?

2)
Der Luftwiderstand eines Autos bei einer Geschwindigkeit von 120 km/h soll untersucht werden.

a) Mit welcher Geschwindigkeit muss ein Modell im Maßstab 1:2 im Windkanal angeströmt werden, um den selben Widerstandsbeiwert zu erhalten?

b) Wie groß ist die Widerstandskraft im Original und im Modell? Nehmen Sie eine Querschnittsfläche von 2,5 m^2 und einen Widerstandsbeiwert von $c_W = 0{,}3$ an.

Lösung

1)
1a)
Für den Wellenwiderstand spielen U, ρ, g und die Länge L eine Rolle. Die dimensionslose Kennzahl, die sich damit bilden lässt, ist die Froude-Zahl. Mit $\mathrm{Fr} = U/\sqrt{gL}$ und der Bedingung, dass die Froude-Zahlen im Original und im Modell gleich sein sollen, folgt

$$\mathrm{Fr_O} = \mathrm{Fr_M} \quad \Rightarrow \quad \frac{U_\mathrm{O}}{\sqrt{gL_\mathrm{O}}} = \frac{U_\mathrm{M}}{\sqrt{gL_\mathrm{M}}}, \qquad U_\mathrm{M} = U_\mathrm{O}\sqrt{\frac{L_\mathrm{M}}{L_\mathrm{O}}}.$$

$$U_\mathrm{M} = U_\mathrm{O}\sqrt{\frac{1}{20}} = \frac{14 \cdot 1{,}852}{3{,}6}\sqrt{\frac{1}{20}} = 1{,}61 \text{ m/s}.$$

($U_\mathrm{O} = 25{,}9$ km/h $= 7{,}2$ m/s.)

1b)
In dimensionsloser Form ist die Widerstandskraft F_W durch den Widerstandsbeiwert c_w gegeben. Dies zeigt eine Dimensionsanalyse mit den 4 Einflussgrößen ρ, L, U und g und der Zielgröße F_W,

$$\begin{array}{lrrr}
 & \mathrm{M} & \mathrm{L} & \mathrm{T} \\
\rho & 1 & -3 & 0 \\
L & 0 & 1 & 0 \\
U & 0 & 1 & -1 \\
g & 0 & 1 & -2 \\
F_\mathrm{W} & 1 & 1 & -2
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{llll}
\rho L^3 & 1 & 0 & 0 \\
L & 0 & 1 & 0 \\
LU^{-1} & 0 & 0 & 1 \\
\multicolumn{4}{l}{gL^{-1}\left(LU^{-1}\right)^2 = gLU^{-2}} \\
\multicolumn{4}{l}{F_\mathrm{W}\left(\rho L^3\right)^{-1} L^{-1}\left(LU^{-1}\right)^2 = F_\mathrm{W}\rho^{-1}L^{-2}U^{-2} = c_\mathrm{w}/2}
\end{array}$$

Wegen $c_\mathrm{w} = c_\mathrm{w}(\mathrm{Fr})$, $\mathrm{Fr_M} = \mathrm{Fr_O}$ ist $c_\mathrm{w,M} = c_\mathrm{w,O}$.

$$\frac{F_\mathrm{W,M}}{F_\mathrm{W,O}} = \frac{c_\mathrm{w,M}\frac{1}{2}\rho U_\mathrm{M}^2 A_\mathrm{M}^2}{c_\mathrm{w,O}\frac{1}{2}\rho U_\mathrm{O}^2 A_\mathrm{O}^2} = \frac{U_\mathrm{M}^2 L_\mathrm{M}^2}{\underbrace{U_\mathrm{O}^2}_{\frac{L_\mathrm{M}}{L_\mathrm{O}}} L_\mathrm{O}^2} = \frac{L_\mathrm{M}^3}{L_\mathrm{O}^3} = \frac{1}{20^3} = \frac{1}{8000}.$$

(Im Original 2×470 PS, im Modell ca. 1 kW.)

1c)
Beim Modellversuch und im Original wird das gleiche Medium verwendet. Das Verhältnis der Reynolds-Zahlen in Modell und Original ist nicht gleich eins, sondern

$$\frac{\mathrm{Re_M}}{\mathrm{Re_O}} = \frac{U_\mathrm{M}L_\mathrm{M}}{U_\mathrm{O}L_\mathrm{O}} = \frac{\sqrt{L_\mathrm{M}}L_\mathrm{M}}{\sqrt{L_\mathrm{O}}L_\mathrm{O}} = \frac{1}{20^{3/2}} = \frac{1}{89}.$$

Der Umschlag von laminarer zu turbulenter Strömung wird am Modell und im Original an verschiedenen Stellen stattfinden. Über das Verhältnis der Reibungskräfte kann nichts gesagt werden.

2) 2a)
Die Reynoldszahlen in Original und Modell sollen gleich sein,

$$\frac{U_\mathrm{M}L_\mathrm{M}}{\nu} = \frac{U_\mathrm{O}L_\mathrm{O}}{\nu}, \qquad U_\mathrm{M} = U_\mathrm{O}\frac{L_\mathrm{O}}{L_\mathrm{M}} = 2U_\mathrm{O}$$

$$U_\mathrm{M} = 240 \text{ km/h} = 66{,}6 \text{ m/s}.$$

2b) Bei gleicher Reynoldszahl sind auch die Widerstandsbeiwerte gleich, $c_\mathrm{w} = c_\mathrm{w}(\mathrm{Re})$,

$$\frac{F_\mathrm{W,M}}{F_\mathrm{W,O}} = \frac{c_\mathrm{w,M}\frac{1}{2}\rho U_\mathrm{M}^2 A_\mathrm{M}^2}{c_\mathrm{w,O}\frac{1}{2}\rho U_\mathrm{O}^2 A_\mathrm{O}^2} = \frac{L_\mathrm{O}^2 L_\mathrm{M}^2}{L_\mathrm{M}^2 L_\mathrm{O}^2} = 1,$$

$$F_\mathrm{W} = 0{,}3 \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}2 \cdot (120/3{,}6)^2 \cdot 2{,}5 = 500 \text{ N}.$$

Beispiel: Bandstahl

Ein 2 mm dickes und 4 m breites Stahlband wird zweifach beschichtet. Auf dem Band befindet sich eine $\delta_1 = 0{,}3$ mm dicke Schicht eines Bingham Fluids. Es wird durch einen $l = 10$ cm langen Spalt gezogen. Im Spalt wird bis zur Gesamtdicke $\delta = 0{,}5$ mm eine zweite Schicht eines Newtonschen Fluides aufgebracht. Mit welcher Kraft muss gezogen werden, damit sich das Band mit $u_\mathrm{w} = 4$ m/s bewegt? Die Druckdifferenz entlang des Spaltes sei vernachlässigbar. Die Wirkung der Schwerkraft kann ebenfalls vernachlässigt werden.

a) Skizzieren Sie die Schubspannungsverteilung in beiden Spalten.

b) Skizzieren Sie die Geschwindigkeitsverteilung in beiden Spalten.

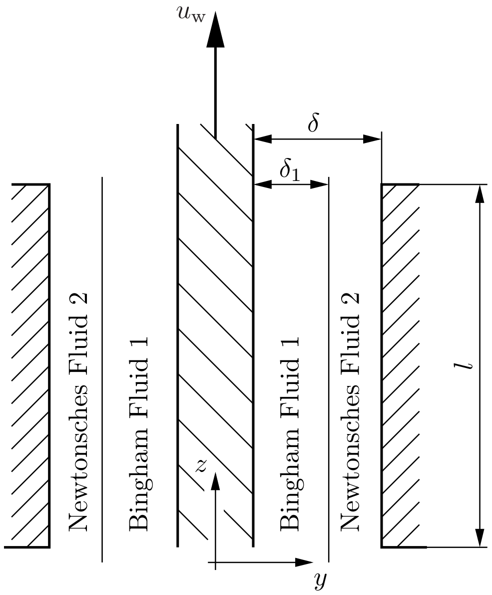
c) Berechnen Sie die Kraft, mit der das Band gezogen werden muss.

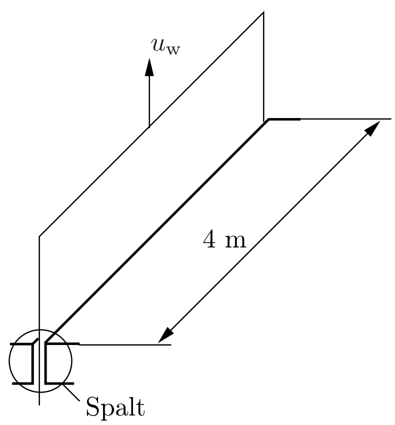
d) Welche Menge an Newtonschem Fluid wird pro Stunde verbraucht?

e) Begründen Sie, weshalb die Schwerkraft vernachlässigt werden kann.

Angaben: $\delta_1 = 0{,}3$ mm, $\delta = 0{,}5$ mm, $l = 10$ cm, $u_\mathrm{w} = 4$ m/s; $g = 9{,}81$ m/s^2.
Bingham Fluid 1: $\tau_0 = 8$ N/m^2, $\mu_\mathrm{B} = 1{,}2$ Pa s, $\rho_1 = 1120$ kg/m^3.
Newtonsches Fluid 2: $\mu_2 = 0{,}15$ Pa s, $\rho_2 = 800$ kg/m^3.

Für die Beantwortung der Fragen werden womöglich nicht alle Angaben benötigt.

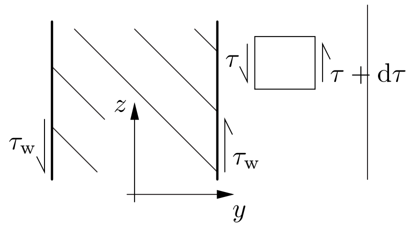




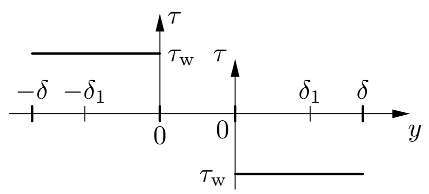
Lösung

Rechengang:
– Schubspannung $\tau = \text{const}$, Schubspannungsansätze einsetzen
– integrieren $\Rightarrow$ Geschwindigkeitsverteilung
– Randbedingungen, ergibt bisher unbekanntes τ_w
– Geschwindigkeitsverteilung für Fluid 2 integrieren $\Rightarrow$ Volumenstrom

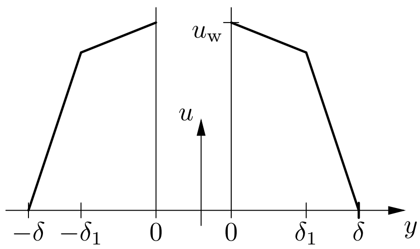
a)
positive Richtung der Schubspannungen:



Schubspannungsverteilung:



b)
Die Geschwindigkeitsverteilung lässt sich auch schon skizzieren. Das Bingham-Fluid bewegt sich, falls $|\tau| \leq \tau_0$, wie ein Festkörper mit dem Band mit, oder es fließt wie ein Newtonsches Fluid. Bei einem 0,5 mm breite Spalt und einer Geschwindigkeit von 4 m/s müsste das Newtonsche Fluid von sehr geringer Viskosität sein, damit die Schubspannung in der Strömung geringer als die Grenzschubspannung τ_0 des Binghamschen Fluides bleibt. Falls $|\tau| > \tau_0$, was im Nachhinein zu überprüfen ist, fliessen beide Fluide.



c)
Schubspannungsverteilung in einer Couette-Stromung: $\tau = \text{const} = \tau_\text{w}$. Im Spalt auf der rechten Seite ist $\tau < 0$, im Spalt links $\tau > 0$, falls die Richtungen des angegebenen Koordinatensystems beibehalten werden. Die Rechnung wäre einfacher, falls der Ursprung an die Wand rechts gesetzt wird und y nach links in das Fluid weist. Wir fahren mit den angegebene Richtungen fort.
Schubspannungsansätze:

$$\tau_\text{w} = -\tau_0 + \mu_\text{B} \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}y}, \qquad \tau_w = \mu_2 \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}y}.$$

Integrieren, $\int \mathrm{d}y$:

$$u_1 = \frac{\tau_\text{w} + \tau_0}{\mu_\text{B}} y + c_1, \qquad u_2 = \frac{\tau_\text{w}}{\mu_2} y + c_2.$$

Randbedingungen:

$$u_1(y = 0) = u_\text{w} \quad \Rightarrow \quad c_1 = u_\text{w},$$

$$u_2(y = \delta) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = -\frac{\tau_\text{w}}{\mu_2}\delta,$$

sowie Kontinuitätsbedingung an der Grenzfläche zwischen den Fluiden,

$$u_1(y = \delta_1) = u_2(y = \delta_1) \quad \Rightarrow \quad \tau_\text{w}\mu_\text{B}\delta_1 + \frac{\tau_0}{\mu_\text{B}}\delta_1 + u_\text{w} = \frac{\tau_\text{w}}{\mu_2}\delta_1 - \frac{\tau_\text{w}}{\mu_2}\delta,$$

$$\tau_\text{w}\left(\frac{\delta_1}{\mu_\text{B}} + \frac{\delta - \delta_1}{\mu_2}\right) = -u_\text{w} - \frac{\tau_0}{\mu_\text{B}}\delta_1, \quad \tau_\text{w} = \frac{-4 - 8 \cdot 0{,}3 \cdot 10^{-3}/1{,}2}{(0{,}3/1{,}2 + 0{,}2/0{,}15) \cdot 10^{-3}} = -2528\ \text{N/m}^2.$$

Es gilt $\tau_\text{w} > \tau_0$, die in b) skizzierte Schubspannungsverteilung stimmt.
Kraft, mit $B = 4$ m:

$$|F_\text{W}| = 2|\tau_\text{w}|lB = 2 \cdot 2528 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}4 = 2022\ \text{N}.$$

d)

Der längenbezogene Volumenstrom auf einer Seite (deshalb $\dot{V}_2/\underline{2}B$) ist

$$\dot{V}_2/(2B) = \int\limits_{\delta_1}^{\delta} u_2 \,\mathrm{d}y = \frac{\tau_\mathrm{w}}{\mu_2} \int\limits_{\delta_1}^{\delta} y - \delta \,\mathrm{d}y = \frac{\tau_\mathrm{w}}{\mu_2} \left[\frac{y^2}{2} - \delta y \right]_{\delta_1}^{\delta} = \frac{\tau_\mathrm{w}}{\mu_2} \left[-\frac{\delta^2}{2} - \frac{\delta_1}{2} + \delta\delta_1 \right] = -\frac{\tau_\mathrm{w}}{\mu_2} \frac{1}{2} (\delta - \delta_1)^2$$

$$\dot{V}_2 = 2 \cdot 4 \cdot \frac{2528}{0{,}15 \cdot 2} (0{,}2^2 \cdot 10^{-6} = 2{,}697 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}.$$

Vom Fluid 2 werden $\dot{V}_2 = 9{,}7$ m^3/h verbraucht.

e)

Im Vergleich zu $F_\mathrm{W} = 2022$ N ist die auf das Fluid im Spalt wirkende Schwerkraft klein. Nachrechnen wäre nicht nötig, ergibt aber $F_\mathrm{G} = \rho\delta 2 l B = 1000 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}8 = 0{,}4$ N.