

## Ein- und Mehrphasenströmungen

Vorlesung im WS 2006/2007 von H. Steinrück nach Unterlagen von Prof. Wilhelm Schneider, der diese Vorlesung von ca 1975-2006 entwickelt und abgehalten hat.

Danksagung: Ich möchte mich bei Prof. Schneider für die Unterstützung bei der Vorbereitung, die immer spannenden Diskussionen über Grundlagenfragen und die Überlassung seiner Unterlagen herzlich bedanken.- H. St.

Technische Universität Wien Institut für Strömungsmechanik und Wärmeübertragung

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung und Überblick</b>	<b>1</b>
<b>1.1</b>	<b>Was ist Strömungslehre?</b>	<b>1</b>
<b>1.2</b>	<b>Betrachtungsweisen</b>	<b>2</b>
<b>1.3</b>	<b>Teilgebiete der Strömungslehre</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Nicht - Newtonsche Flüssigkeiten</b>	<b>5</b>
<b>2.1</b>	<b>Viskose Flüssigkeiten</b>	<b>6</b>
<b>2.1.1</b>	<b>spezielle Fließgesetze</b>	<b>6</b>
<b>2.2</b>	<b>Normalspannungseffekte</b>	<b>13</b>
<b>2.3</b>	<b>Viskoelastische Stoffe</b>	<b>24</b>
<b>2.4</b>	<b>Flüssigkeiten mit Gedächtnis</b>	<b>27</b>
<b>3</b>	<b>Einfache Scherströmungen</b>	<b>29</b>
<b>3.1</b>	<b>Laminare Couette-Strömung</b>	<b>29</b>
<b>3.2</b>	<b>Laminare Rohrströmung</b>	<b>33</b>
<b>3.2.1</b>	<b>Newtonsche Flüssigkeit</b>	<b>38</b>
<b>3.2.2</b>	<b>Ostwald-de Waele-Flüssigkeit</b>	<b>39</b>
<b>3.2.3</b>	<b>Bingham Flüssigkeit</b>	<b>40</b>
<b>3.2.4</b>	<b>Kapillar-Viskosimeter</b>	<b>42</b>
<b>3.3</b>	<b>Filmströmungen</b>	<b>43</b>
<b>3.3.1</b>	<b>Strömungsformen</b>	<b>43</b>
<b>3.3.2</b>	<b>Laminare Filmströmung</b>	<b>45</b>
<b>3.3.3</b>	<b>Turbulente Filmströmung (Ergebnisse)</b>	<b>47</b>
<b>4</b>	<b>Bewegung von festen Teilchen, Tropfen und Blasen</b>	<b>50</b>

4.1	Grundgleichungen	50
4.1.1	Diff.-Gleichungen für inkompressible Strömungen	50
4.1.2	Randbedingungen	53
4.2	Mechanische Ähnlichkeit	56
4.3	Hydrostatischer Auftrieb	62
4.4	Schleichende Strömung $Re \ll 1$	66
4.4.1	Feste Kugel	67
4.4.2	Kugelförmige Tropfen und Blasen	75
4.4.3	Einfluss adsorbierter (oberflächenaktiver) Stoffe	78
4.5	Strömungen bei größeren Reynolds-Zahlen	79
4.5.1	Euler-Gleichungen	79
4.5.2	Drehungsfreiheit und Helmholtz'scher Wirbelsatz	80
4.5.3	Beispiele von Potentialströmungen	85
4.5.4	Vergleich Potentialströmung mit realer Strömung um feste Körper, Grenzschicht und Totwasser	89
4.5.5	Tropfenzerfall	94
4.5.6	Vergleich von Potentialströmung mit realer Strömung; Widerstands- berechnung aus Dissipation	98
4.5.7	Stabilität der Blasenbewegung, Abweichungen von der Kugelgestalt, Schirmblasen und Blasen im Rohr	101
4.6	Kavitationsblasen	111
4.7	Zerfall von Flüssigkeitsstrahlen in Gasen	121
5	Zweiphasenströmungen	126
5.1	Strömungsformen	127
5.2	Homogene Gleichgewichtsströmungen	129
5.2.1	Zustandsgrößen des Gemisches	130

<b>5.2.2</b>	Schallgeschwindigkeit	<b>133</b>
<b>5.2.3</b>	Viskosität von Suspensionen	<b>137</b>
<b>5.3</b>	Eindimensionale homogene Strömung	<b>141</b>
<b>5.3.1</b>	Reibungsfreie Düsenströmung	<b>145</b>
<b>5.3.2</b>	Rohrströmung mit Reibung	<b>150</b>
<b>5.3.3</b>	Reibungsbeiwert $\lambda_R$	<b>156</b>
<b>5.3.4</b>	Widerstandsverringerng durch Additiva	<b>157</b>
<b>5.4</b>	Zweiphasenströmungen mit Relativgeschwindigkeit	<b>158</b>
<b>5.4.1</b>	Allgemeine Beziehungen	<b>158</b>
<b>5.4.2</b>	Driftfluss	<b>161</b>
<b>5.4.3</b>	Stationäre Strömungszustände, Wirbelschicht	<b>168</b>
<b>5.4.4</b>	Druckverluste	<b>170</b>
<b>5.4.5</b>	Sedimentation, kinematische Wellen	<b>171</b>

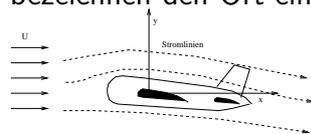
# 1 Einleitung und Überblick

## 1.1 Was ist Strömungslehre?

- Strömungslehre = Mechanik (insbes. Dynamik) der Flüssigkeiten und Gase (Fluid) "Strömungsmechanik"
- Bei Beschränkung auf Flüssigkeiten (konst. Dichte): "Hydro-mechanik", "Hydrodynamik"
- Bei Berücksichtigung der Kompressibilität der Gase: "Gas-dynamik"

## 1.2 Betrachtungsweisen

- Lagrange: Betrachtung der Zustandsänderung eines bewegten Masseteilchens. Ortskoordinate bezeichnet bewegtes Masseteilchen. (Bei Festkörpermechanik üblich, aber nicht bei Strömungsmechanik)
- Euler: Die Zustände der Flüssigkeit des strömenden Fluid werden in Abhängigkeit von Ort und Zeit beschrieben. Ortskoordinaten bezeichnen den Ort eines laborfesten Beobachters.



Koordinatensystem mit um- bzw. durchströmten Körper verbunden. (Bsp. gleichförmig fliegendes Flugzeug)

Strömung wird beschrieben durch

- Geschwindigkeitsvektor  $\vec{u} = (u, v, w)$
- Druck  $p$
- Temperatur  $T$

als Funktion des Ortes  $(x, y, z)$  und eventuell der Zeit  $t$ .

- Stromlinien: Linien, deren Tangenten in jedem Punkt mit der Richtung des Geschwindigkeitsvektors übereinstimmen.
- Falls Strömung unabhängig von Zeit: stationäre Strömung
- falls Strömung abhängig von Zeit: instationäre Strömung

### 1.3 Teilgebiete der Strömungslehre

Luft- und Raumfahrt

Verkehrstechnik (Autos, Züge, Tunnel)

Schiffstechnik

Ozeanographie (Meeresstr., Oberflächenwellen)

Astrophysik, Geophysik, Meteorologie

Strömungsmaschinen (Dampf-, Gas- und Wasserturbinen, Pumpen)

Motorenbau (incl. Vorgänge im Zylinder und Auspuffleitung)

Bauwerksaerodynamik

Heizungs- Klima- und Lüftungstechnik

chemische Verfahrenstechnik (Str. mit chem. Reaktionen, Mehrphasenstr.)

Elektrochemie (Str. von Elektrolyten)

Metallurgie (Str. von Metallschmelzen)

Glastechnologie (Glasschmelzen)

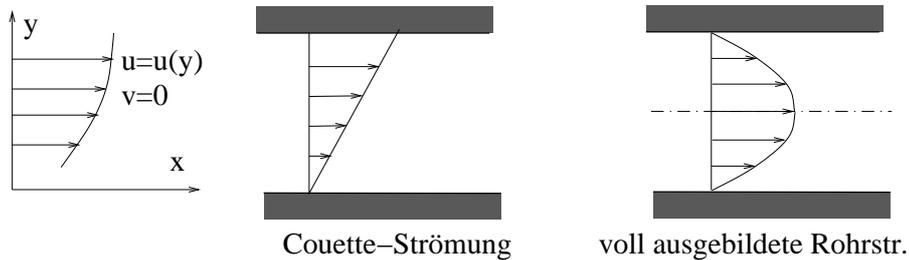
Wärme- und Stoffübergang

Str. in elektrischen Maschinen (zwischen Rotor und Stator)

Magnetohydrodynamik

## 2 Nicht - Newtonsche Flüssigkeiten

Vereinfachung: Einfache "reine" Scherströmungen  $u = u(y)$ ,  $v = 0$ .



Folge der inneren Reibung: Schubspannung  $\tau$  im Inneren des Fluids.

### 2.1 Viskose Flüssigkeiten

Schubspannung  $\tau$  hängt von der Schergeschwindigkeit ab!

Reibungsgesetz des Fluids, Fließgesetz:  $\tau = f\left(\frac{du}{dy}\right)$

$f$  ist eine monoton wachsende Funktion (folgt aus 2.HS der TD)

#### 2.1.1 spezielle Fließgesetze

Newtonscher Schubspannungsansatz:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (1)$$

$\mu$ ... (dynamische) Viskosität (Zähigkeit)

$[\mu] = \text{Kraft} \times \text{Zeit} / \text{Fläche}$ , Einheit = Pa.s,

$\mu$  unabhängig von  $du/dy$  und  $t$ !

Viele Gase und Flüssigkeiten folgen dem Newtonschen Reibungsgesetz, aber nicht alle.

### Eigenschaften der dynamischen Viskosität

- $\mu$  ist praktisch unabhängig vom Druck, ausgenommen in der Nähe des kritischen Punktes und bei sehr hohen Temperaturen.
- $\mu$  ändert sich i.a. mit der Temperatur:  
Gase steigt mit wachsendem  $T$ , Flüssigkeiten sinkt mit wachsendem  $T$ .
- kinematische Viskosität

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (2)$$

$[\nu] = \text{Fläche/Zeit, Einheit: m}^2/\text{s}.$

### Temperaturabhängigkeit von $\mu$ :

- Flüssigkeiten: Bei Scherung müssen vor allem intermolekulare Kräfte überwunden werden.  
 $T$  steigt ...  $\rho$  sinkt (Ausnahme Wasser zw.  $0^\circ\text{C}$  und  $4^\circ\text{C}$ )...Molekülabstand steigt... Anziehungskraft sinkt.  
 $T$  steigt .... Amplitude der thermischen Bewegung steigt...  
 Häufigkeit von Platzwechsln steigt.  
 beide Effekte bewirken:  $\mu$  sinkt, wenn  $T$  steigt.
- Gase: In Gasen entsteht die Schubspannung durch Impulsaustausch (quer zur Strömungsrichtung) als Folge der molekularen Bewegung und der Stöße zwischen den Molekülen:  
 $T$  steigt...kinetische Energie der Moleküle steigt... $\mu$  steigt

### Potenzansatz von Ostwald und de Waele

$$\tau = m \left| \frac{du}{dy} \right|^{n-1} \frac{du}{dy} \quad (3)$$

$m, n = \text{const}$ ,

- $n = 1$  Newtonsche Fluid
- $n < 1$  strukturviskoses Fluid
- $n > 1$  dilatantes Fluid

Ostwald - de Waele Ansatz ist unrealistisch für  $du/dy \rightarrow 0$  bzw.  $\tau \rightarrow 0..$

### Ansatz von Prandtl und Eyring

$$\tau = A \cdot \text{arsinh} \left( \frac{1}{B} \frac{du}{dy} \right) \quad A, B = \text{const} \quad (4)$$

Falls  $\frac{1}{B} \frac{du}{dy} \ll 1$ :

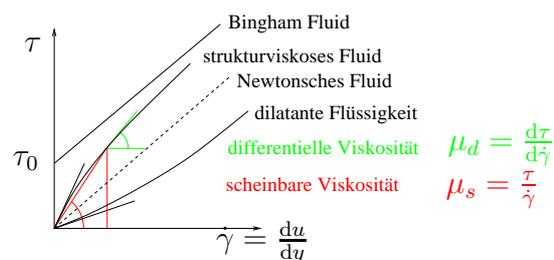
$$\tau = A \left[ \frac{1}{B} \frac{du}{dy} - \frac{1}{6} \left( \frac{1}{B} \frac{du}{dy} \right)^3 + \dots \right]$$

Prandtl - Eyring - Ansatz für  $\frac{du}{dy} \rightarrow 0$  brauchbar,  $\mu = A/B$ . Beschreibt strukturviskose Flüssigkeiten, Theoretisch mit Molekulardynamik begründbar.

## Ansatz von Bingham

$$\tau = \pm\tau_0 + \mu_B \frac{du}{dy} \quad \tau_0, \mu_B = \text{const} \quad (5)$$

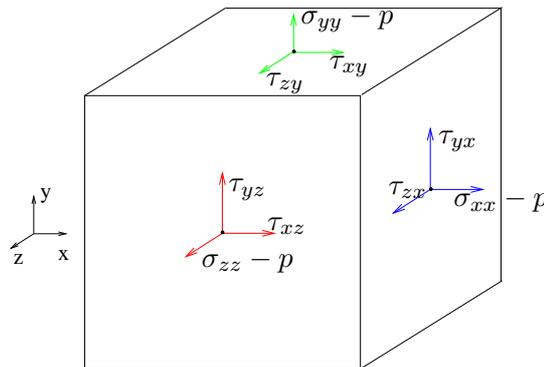
Vorzeichen von  $\tau_0$  entsprechend Vorzeichen von  $\frac{du}{dy}$ .



- Strukturviskose Flüssigkeiten: Langkettige Moleküle; im Ruhezustand verknäult, mit zunehmender Schubspannung entflochten → scheinbare und differentielle Viskosität nimmt ab.
- Dilatante Flüssigkeiten: Suspension fester Teilchen in Flüssigkeiten bei hoher Teilchenkonzentration.
- Bingham Medium: Fließspannung (Anfangsschubspannung)  $\tau_0$ . damit Medium zu fließen beginnt. Zahnpasta, Farben und Lacke (damit sie nicht verlaufen)

## 2.2 Normalspannungseffekte

13



Für reine Scherströmung gilt (Symmetrie bezüglich  $z$  bzw.  $x$ -Richtung)

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = 0, \quad \text{bzw.} \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = 0$$

Normalspannungseffekt, wenn  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz} \neq 0$ .

14

$$\sigma_{xx} - \sigma_{yy} = \varphi(\dot{\gamma}) \quad (= 0 \text{ für New. Fl.})$$

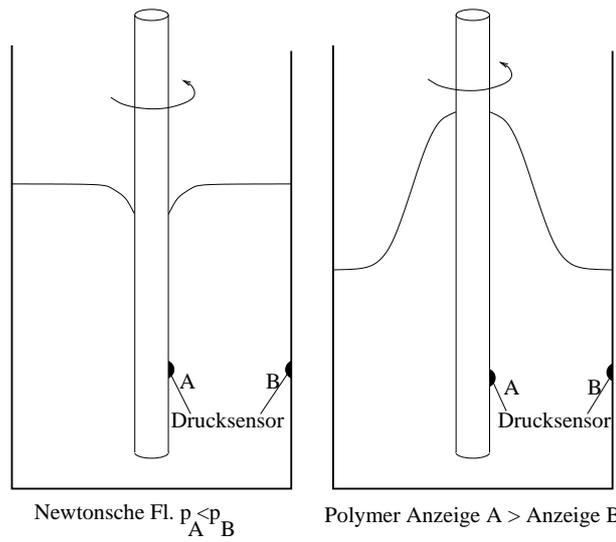
$$\sigma_{yy} - \sigma_{zz} = \psi(\dot{\gamma}) \quad (= 0 \text{ für New. Fl.})$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = f(\dot{\gamma}) \quad (= \mu \dot{\gamma} \text{ für New. Fl.})$$

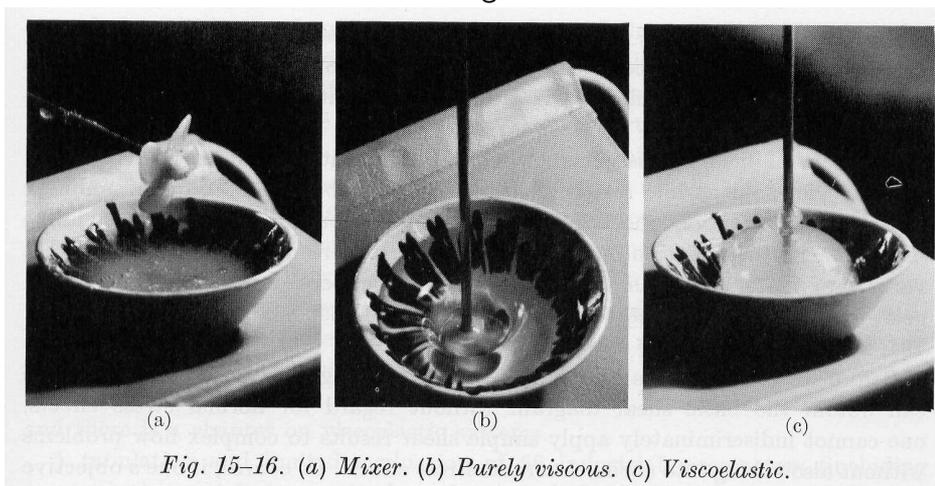
Beispiele:

- “Weissenbergeffekt”
- “Strangaufweitung”

## Weissenbergeffekt

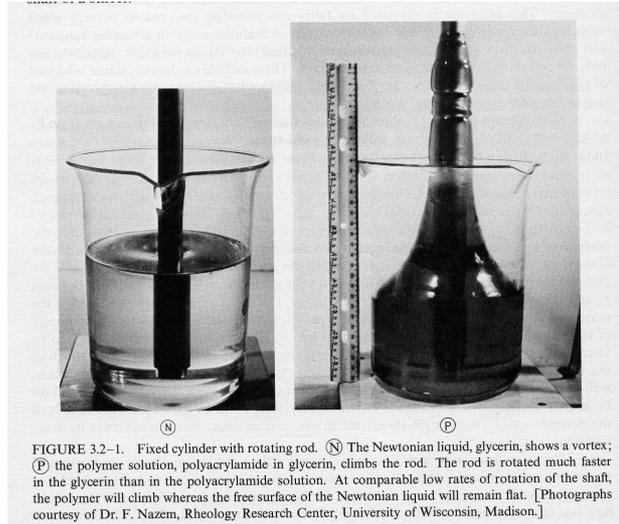


## Weissenberg-Effekt

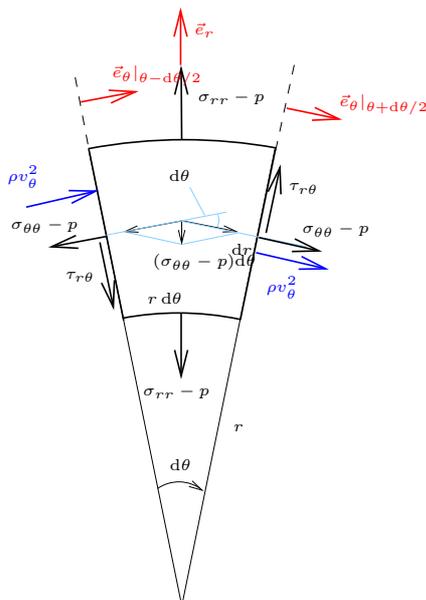


Quelle Brodkey (1967)

## Weissenberg-Effekt



Quelle: Bird (1977)



Impulsbilanz für ein Kontrollvolumen

Annahme:  $v_r = 0$ ,  $v_\theta = v_\theta(r)$ ,  $v_z = 0$ , $S$  Kraft pro Volumeneinheit

$$S r dr d\theta \sim [(r + dr)(\sigma_{rr} - p) - r(\sigma_{rr} - p)] d\theta$$

$$- (\sigma_{\theta\theta} - p) d\theta dr + [\tau_{r\theta}|_{\theta+d\theta/2} - \tau_{r\theta}|_{\theta-d\theta/2}] dr$$

$$S = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rr}) - \sigma_{\theta\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} \right]$$

Nettoimpulsstrom in  $r$ -Richtung

$$(\rho v_\theta^2 \vec{e}_\theta|_{\theta-d\theta/2} - \rho v_\theta^2 \vec{e}_\theta|_{\theta+d\theta/2}) \cdot \vec{e}_r dr \sim$$

$$\sim \frac{1}{r} \rho v_\theta^2 r dr d\theta$$

## Impulsbilanz in radialer Richtung

$$0 = \underbrace{\frac{\rho v_\theta^2}{r}}_{\substack{\text{Divergenz der r-Komp.} \\ \text{des Impulsstromes} \\ \text{'Zentrifugalbeschl.'}}} - \underbrace{\frac{\partial p}{\partial r}}_{\text{Druckgrad.}} + \underbrace{\left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \sigma_{rr}) - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} \right)}_{\text{Spannungen}}$$

Umformung ergibt

$$\frac{d}{dr} (p - \sigma_{rr}) = \frac{\rho v_\theta^2}{r} - \frac{\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}}{r}$$

Drucksensoren bei A bzw. B zeigen  $p - \sigma_{rr}$  an!Newtonsche Fl:  $p_A < p_B$  da  $\rho v_\theta^2 / r > 0$ Polymer: Falls  $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}$  hinreichend groß und positiv:

$$p_A - \sigma_{rr,A} > p_B - \sigma_{rr,B}$$

## Kräftegleichgewicht in z-Richtung

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \tau_{rz}) + \rho g$$

Annahme unendlich langer Zylinder, keine Randeinflüsse:  $\tau_{rz} = 0$ . Somit

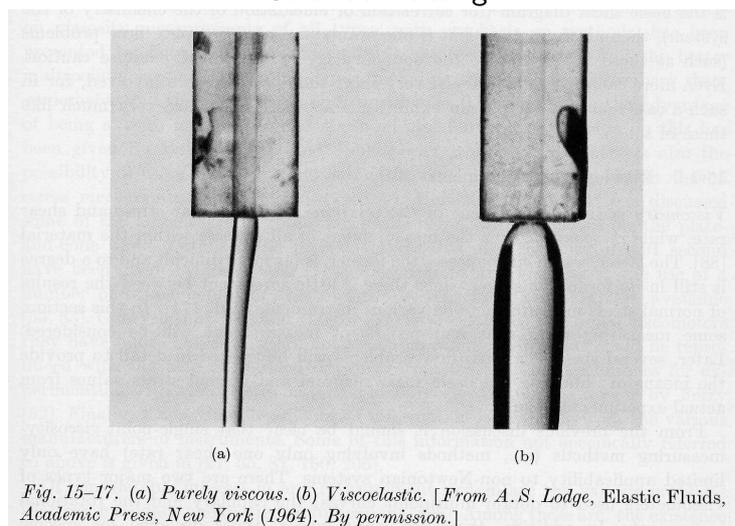
$$\begin{aligned} p(r, z) &= \rho g (z - z_0) + p(r, z_0) = \\ &= \rho g (z - z_0) + \sigma_{rr}(r) + \int_{r_0}^r \left( \rho \frac{v_\theta^2}{r} - \frac{\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}}{r} \right) dr + p(r_0, z_0) - \sigma_{rr}(r_0) \end{aligned}$$

Gesucht Flächen mit konstanter Gesamtspannung in  $z$ -Richtung.

$$\text{const} = p(r, z_h(r)) - \sigma_{zz}(r)$$

$$z_h(r) = z_0 + \frac{1}{\rho g} \left[ -\text{const} - \rho \int_{r_0}^r \frac{v_\theta^2}{r'} dr' - p(r_0, z_0) - (\sigma_{rr}(r) - \sigma_{zz}(r)) + \int_{r_0}^r \frac{\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}}{r'} dr' \right] + \sigma_{rr}(z_0)$$

### Strahlaufweitung



Quelle: Brodkey (1967)

## Strahlaufweitung

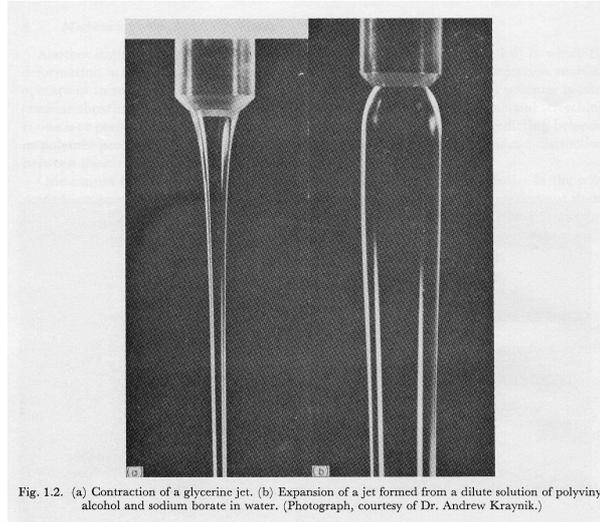


Fig. 1.2. (a) Contraction of a glycerine jet. (b) Expansion of a jet formed from a dilute solution of polyvinyl alcohol and sodium borate in water. (Photograph, courtesy of Dr. Andrew Kraynik.)

Quelle: Schowalter (1978)

### 2.3 Viskoelastische Stoffe

Weisen neben Eigenschaften einer Flüssigkeit (Fließen unter Scherspannung) auch elastische Eigenschaften eines Festkörpers auf. Beim Beenden der Scherbeanspruchung wird eine Teil der durch die Scherung verursachten Deformation rückgängig gemacht.

Maxwellsche Flüssigkeit:

$$\tau + \lambda \frac{d\tau}{dt} = \mu \dot{\gamma}$$

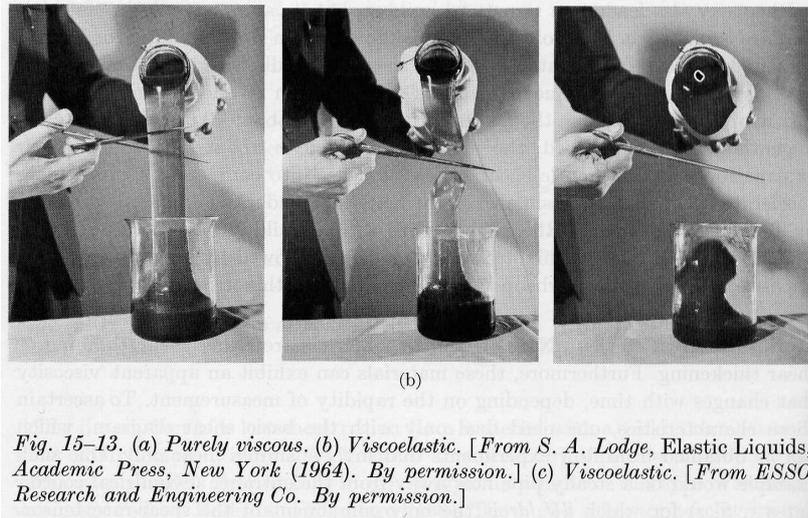
$(\mu, \lambda = \text{const})$ ,  $[\lambda] = \text{Zeit}$ , Relaxationszeit

hüpfender Kitt:

$\lambda \frac{d\tau}{dt} \ll \tau$ : langsame Spannungsänderung: Fließen

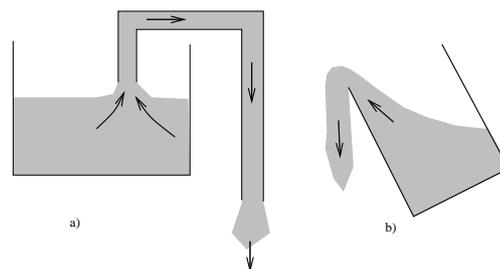
$\lambda \frac{d\tau}{dt} \gg \tau$ : schnelle Spannungsänderung: wie elastischer Festkörper

## Zurückfedern



Quelle: Brodkey (1967)

## Selbstaussuß "Self Syphonig" hoch polymerer Lösungen

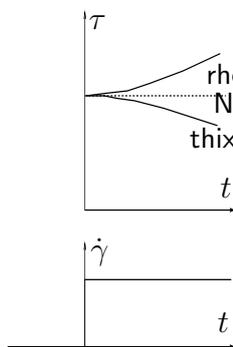


- Zum Starten des Vorganges wird Rohr eingetaucht, sodass Strömung startet, und dann herausgezogen. Bei Newtonscher Fl. reißt Strömung ab.
- Zum Starten wird Gefäß geneigt und dann aufgerichtet. Bei Newtonschem Fluid kommt des Ausfließen zum Stillstand.

## 2.4 Flüssigkeiten mit Gedächtnis

$$\tau(t) = F_{t'=0}^{\infty}(\dot{\gamma}(t-t'))$$

Spannung  $\tau$  hängt nicht nur vom momentanen Wert von  $\dot{\gamma}$ , sondern auch von  $\dot{\gamma}$  zu früheren Zeitpunkten.



Umrühren der Farbe: scheinbare Viskosität sinkt: thixotrop.  
In Wasser suspendierter Gips wird durch Umrühren schneller fest (rheopex).

Beispiel:

$$\tau(t) = \frac{\mu}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-t'/\lambda} \dot{\gamma}(t-t') dt' \quad \mu, \lambda = \text{const}$$

Substitution  $s = t - t'$

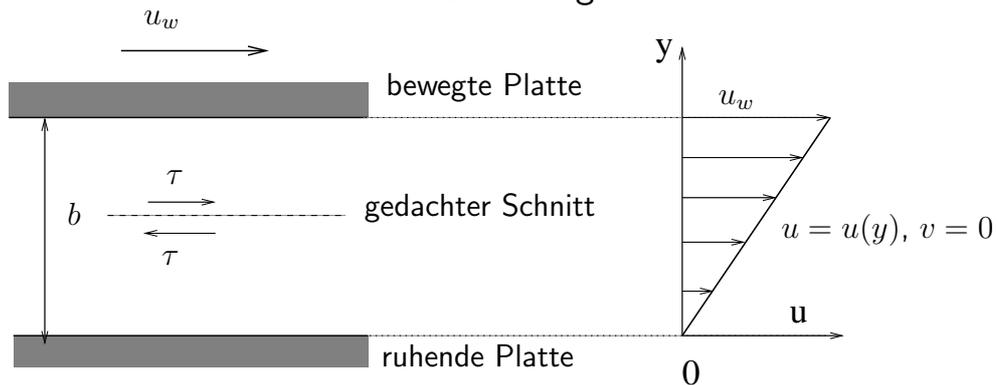
$$\tau(t) = \frac{\mu}{\lambda} \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)/\lambda} \dot{\gamma}(s) ds$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{\mu}{\lambda} \left[ \dot{\gamma}(t) - \underbrace{\frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)/\lambda} \dot{\gamma}(s) ds}_{\tau/\mu} \right]$$

$$\lambda \frac{d\tau}{dt} = \mu \dot{\gamma} - \tau \quad \text{Maxwell-Flüssigkeit}$$

### 3 Einfache Scherströmungen

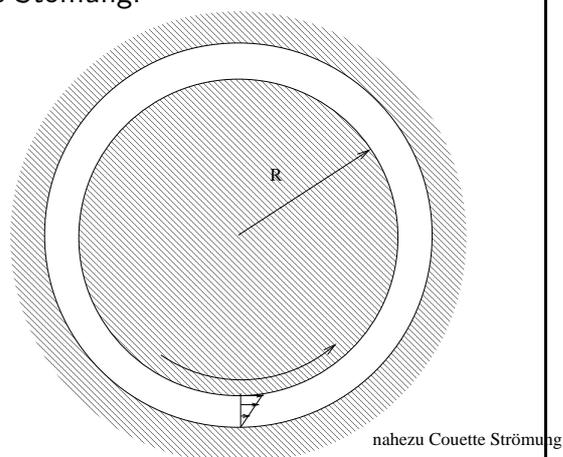
#### 3.1 Laminare Couette-Strömung



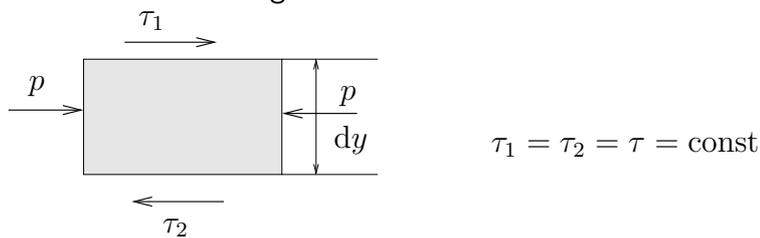
Fluid haftet als Folge der inneren Reibung an Wand. (Braucht bei reibungsfreiem Fluid nicht erfüllt zu sein)

praktische Realisierung der Couette-Stömung:

Dünner Spalt zwischen konzentrischen Zylindern, Anwendung: Lagerschmierung (leichte Exzentrizität nötig, damit Lagerkraft aufgenommen werden kann)



Geschwindigkeitsverteilung in der Couette-Strömung  
 Voraussetzung: kein Druckgefälle, keine Volumenkraft, Flüssigkeitsteilchen bewegen sich mit konstanter Geschwindigkeit.



Zeitunabhängiges Fließgesetz.:

$$\tau = f(\dot{\gamma}) = \text{const} \quad \rightarrow \quad \dot{\gamma} = \frac{du}{dy} = \text{const} = C_1$$

$$u = C_1 y + C_2$$

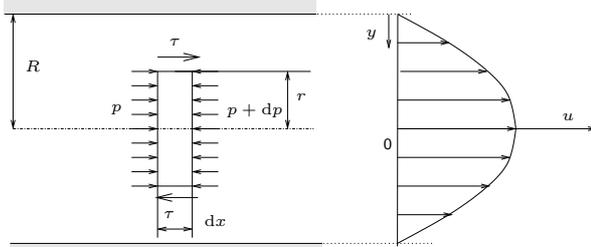
$$\begin{aligned} \text{Haftbedingung } y = 0: \quad u = 0 &\quad \rightarrow \quad C_2 = 0 \\ y = b: \quad u = u_w &\quad \rightarrow \quad C_1 = u_w/b \end{aligned}$$

lineares Geschwindigkeitsprofil

$$\frac{u}{u_w} = \frac{y}{b}$$

### 3.2 Laminare Rohrströmung

#### Voll ausgebildete Strömung



In einiger Entfernung vom Rohreinlauf: Stromlinien gerade und parallel zur Achse, Geschwindigkeit ändert sich nicht in Längsrichtung:

$$u = u(r), \quad v = 0$$

Flüssigkeit muss gegen hemmende Wirkung der inneren Reibung durch das ruhende Rohr bewegt werden: Druckgefälle in  $x$ -Richtung erforderlich. Da die Stromlinien gerade sind, und die Schwerkraft keine Rolle spielt:  $p = p(x)$ .

Impulssatz für zylindrisches Flüssigkeitselement:  
Kräftegleichgewicht, da sich die Geschwindigkeit in  $x$ -Richtung nicht ändert.

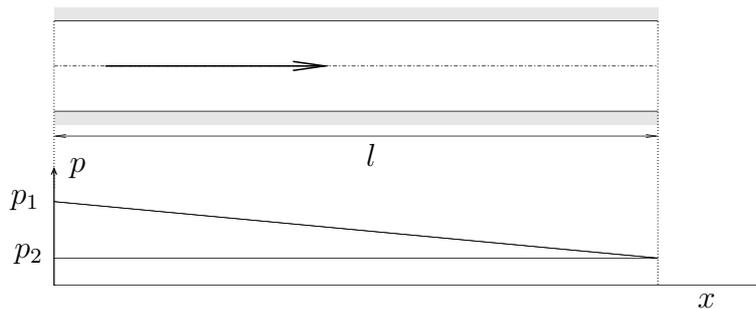
$$\pi r^2 \left[ p - \left( p + \frac{dp}{dx} dx \right) \right] - 2\pi r \tau dx = 0$$

$$\underbrace{\frac{2}{r} \tau}_{\text{hängt nur von } r \text{ ab}} = - \underbrace{\frac{dp}{dx}}_{\text{hängt nur von } x \text{ ab}}$$

beide Seiten sind const!

$$\frac{dp}{dx} = \text{const}$$

Druck ändert sich linear!



$$\frac{dp}{dx} = \frac{p_2 - p_1}{l} = -\frac{p_1 - p_2}{l}$$

Beachte  $\frac{p_2 - p_1}{l} < 0$  folgt  $\tau > 0$

$$\frac{2}{r}\tau(r) = \text{const} = \frac{p_1 - p_2}{l} \rightarrow \tau(r) = \frac{p_1 - p_2}{2l}r$$

Es gilt daher:

$$\tau_w = \frac{p_1 - p_2}{2l}R \quad (6)$$

$$\frac{\tau}{\tau_w} = \frac{r}{R} \quad (7)$$

Geschwindigkeitsverteilung (Haftbedingung  $u(R) = 0$ )

$$u = \int_R^r \underbrace{\frac{du}{dr'}}_{=-\dot{\gamma}} dr' = \frac{R}{\tau_w} \int_\tau^{\tau_w} \dot{\gamma}(\tau') d\tau' \quad (8)$$

Volumenstrom

$$\dot{V} = \int_A u \, dA = \int_0^R u \cdot 2\pi r \, dr = 2\pi \left[ \underbrace{u \frac{r^2}{2}}_{=0 \text{ Haftbed.}} \Big|_0^R - \int_0^R \frac{r^2}{2} \frac{du}{dr} \, dr \right]$$

mit  $r = \frac{R}{\tau_w} \tau$  erhalten wir

$$\frac{\dot{V}}{\pi R^3} = \frac{1}{\tau_w^3} \int_0^{\tau_w} \dot{\gamma}(\tau) \tau^2 \, d\tau \quad (9)$$

### 3.2.1 Newtonsche Flüssigkeit

Voraussetzung  $\mu = \text{const}$ ,  $\dot{\gamma} = \tau/\mu$

$$\frac{\dot{V}}{\pi R^3} = \frac{1}{\tau_w^3} \frac{1}{\mu} \int_0^{\tau_w} \tau^3 \, d\tau = \frac{\tau_w}{4\mu}$$

einsetzen von  $\tau_w$

$$\dot{V} = \frac{\pi(p_1 - p_2)}{8\mu l} R^4 \quad \text{Gesetz von Hagen und Poiseuille}$$

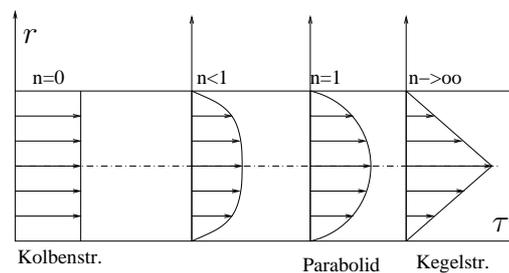
$$u = \frac{R}{\tau_w} \int_{\tau}^{\tau_w} \frac{1}{\mu} \tau \, d\tau = \frac{R}{\mu \tau_w} \left( \frac{\tau_w^2}{2} - \frac{\tau^2}{2} \right)$$

$$u = \underbrace{\frac{(p_1 - p_2) R^2}{4\mu l}}_{u_{\max}} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

mittlere Durchflussgeschw.  $u_m = \frac{\dot{V}}{A} = u_{\max}/2$

### 3.2.2 Ostwald-de Waele-Flüssigkeit

$$u = \frac{(\tau_w/m)^{1/n} R}{1 + 1/n} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^{1+1/n} \right], \quad \frac{u_{\text{mmax}}}{u_m} = \frac{1 + 3n}{1 + n}$$



### 3.2.3 Bingham Flüssigkeit

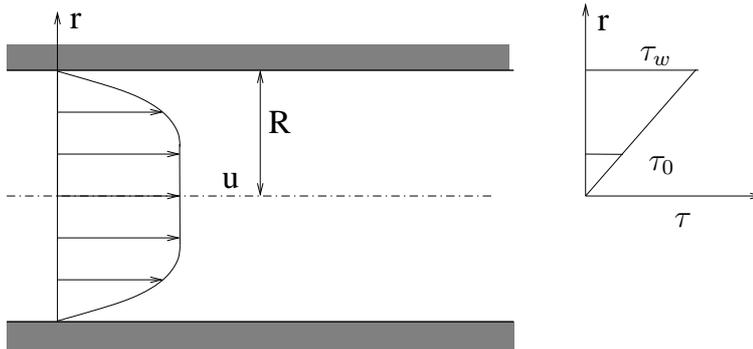
$$\tau > 0 \quad \frac{du}{dr} = \frac{\tau - \tau_0}{\mu_B} \quad \text{für } \tau \geq \tau_0 > 0$$

$$\frac{du}{dr} = 0 \quad \text{für } \tau_0 > \tau \geq 0$$

$$\dot{V} = \frac{\pi(p_1 - p_2)}{8\mu_B l} R^4 \left[ 1 - \frac{4}{3} \frac{\tau_0}{\tau_w} + \frac{1}{3} \left( \frac{\tau_0}{\tau_w} \right)^4 \right]$$

Buckingham-Reiner Glg. mit  $\tau_w = \frac{R}{2} \frac{p_1 - p_2}{l}$

$$u = \frac{(p_1 - p_2) R^2}{4\mu_B l} \begin{cases} 1 - \frac{r^2}{R^2} - 2 \frac{\tau_0}{\tau_w} \left(1 - \frac{r}{R}\right) & \text{für } R \geq r \geq R \frac{\tau_0}{\tau_w} \\ \left(1 - \frac{\tau_0}{\tau_w}\right)^2 = \text{const} & \text{für } r \leq R \frac{\tau_0}{\tau_w} \end{cases}$$

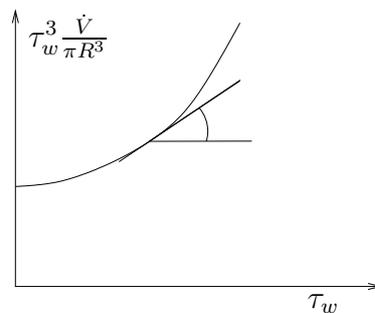


konstante Geschwindigkeit in Kernzone (wie fester Körper)

### 3.2.4 Kapillar-Viskosimeter Aus Gleichung (9)

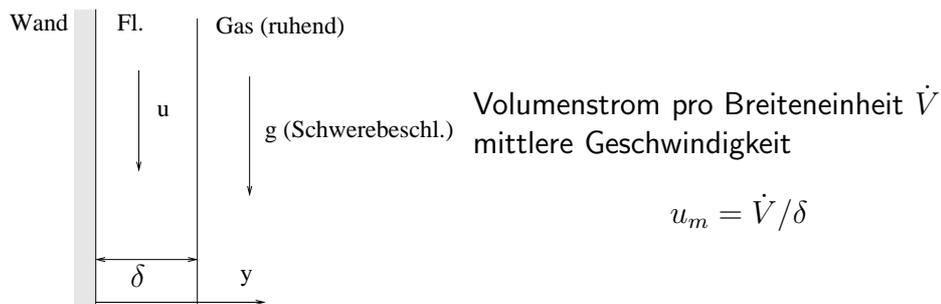
$$\frac{d}{d\tau_w} \left( \tau_w^3 \frac{\dot{V}}{\pi R^3} \right) = \tau_w^2 \dot{\gamma}$$

$$\dot{\gamma}(\tau_w) = \frac{1}{\tau_w^2} \frac{d}{d\tau_w} \left( \tau_w^3 \frac{\dot{V}}{\pi R^3} \right)$$



### 3.3 Filmströmungen

43



3.3.1 Strömungsformen Experimenteller Befund ( $Re = u_m \delta / \nu = \dot{V} / \nu$ ):

- (i)  $Re < 4$  nahezu einfache Scherströmung
- (ii)  $4 < Re < 400$ : Wellenbewegung (Oberflächenwellen)
- (iii)  $Re > 400$  turbulente Filmströmung

44

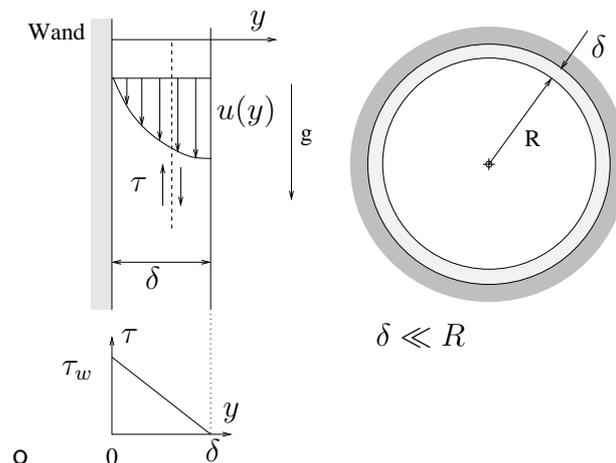
- Bei Filmen mit welliger Oberfläche (ii) bleibt laminarer Zusammenhang zwischen Mittelwerten von  $u_m$  und  $\delta$  nahezu erhalten.
- Übergang (i), (ii) nicht scharf.
- Plötzlicher Übergang (ii),(iii) bei

$$Re = Re^* = 400$$

kein Übergangsbereich wie bei Rohrströmung!

- $Re^*$  ist keine Stabilitätsgrenze! JFM 2 (1957), 554.
- Wellengebiet relativ schwierig zu behandeln, Einfluss der Oberflächenspannung.

## 3.3.2 Laminare Filmströmung



Kräftegleichgewicht  $\tau = \rho g(\delta - y)$

## Geschwindigkeitsprofil

## Voraussetzungen

- Newtonsche Flüssigkeit,  $\nu = \mu/\rho = \text{const}$
- Reine, stationäre Schichtenströmung
- |   |   |
|---|---|
| keine Gasströmung   | } $\Rightarrow$ Randbed. $\tau(\delta) = 0$ |
| entlang Oberfläche, $\rho_{\text{Gas}} \ll \rho_{\text{Fl.}}$ |   |
- Haftbedingung an Wand  $u(0) = 0$

Geschwindigkeitsprofil: 
$$u(y) = \frac{g\delta^2}{\nu} \left[ \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{\delta} \right)^2 \right]$$

Volumenstrom: 
$$\dot{V} = \int_0^\delta u(y) dy = \frac{1}{3} \frac{g\delta^3}{\nu}, \quad u_m = \frac{\dot{V}}{\delta} = \frac{1}{3} \frac{g\delta^2}{\nu} \quad (10)$$

### 3.3.3 Turbulente Filmströmung (Ergebnisse)

Ergebnis aus asymptotischer Theorie der Turbulenz: Logarithmisches Geschwindigkeitsprofil (gilt mit Ausnahme der viskosen Unterschicht und dünner Schicht in Nähe der freien Oberfläche)

$$\frac{u}{u_\tau} = C_1 \ln \frac{u_\tau y}{\nu} + C_2, \quad C_1 \sim 2,5; \quad C_2 \sim 5,5 \quad \text{aus Exp.}$$

$$\text{mit } u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = \sqrt{g\delta}$$

Mittlere Geschwindigkeit:

$$\frac{u_{\max}}{u_\tau} = C_1 \ln \frac{u_\tau \delta}{\nu} + C_2$$

$$\frac{u_{\max} - u}{u_\tau} = C_1 \ln \frac{\delta}{y}$$

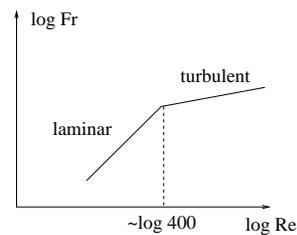
Integration über Querschnitt

$$\frac{u_{\max} - u_m}{u_\tau} = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \frac{u_{\max} - u}{u_\tau} dy = -C_1 \int_0^1 \ln \frac{y}{\delta} d\left(\frac{y}{\delta}\right) = C_1$$

$$\frac{u_m}{\sqrt{g\delta}} = C_1 \ln \frac{g^{1/2} \delta^{3/2}}{\nu} + C_3, \quad \text{mit } C_3 = C_2 - C_1 \sim 3,0 \quad (11)$$

$$\text{Froudezahl } Fr = \frac{u_m^2}{g\delta} \quad (12)$$

(Anm: Manchmal  $u_m/\sqrt{g\delta}$  oder  $g\delta/u_m^2$  als Froudezahl bezeichnet).  
Froude-Zahl beschreibt Schwerkrafteinfluss auf Strömung!



$$\sqrt{Fr} = C_1 \ln \frac{Re}{\sqrt{Fr}} + C_3 \quad (13)$$

Laminare Filmströmung aus (10)

$$Fr = \frac{1}{3} Re$$

## 4 Bewegung von festen Teilchen, Tropfen und Blasen

### 4.1 Grundgleichungen

#### 4.1.1 Diff.-Gleichungen für inkompressible Strömungen

inkompressibel:  $\rho = \text{const}$ , Voraussetzungen:

- 1.)  $|\vec{v}|^2 \ll c^2$ ,
- 2.) hinreichend kleine Temperaturunterschiede,

unabhängige Variable:  $x, y, z, t$

abhängige Variable:  $\vec{v} = (u, v, w), p$

Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (14)$$

Bewegungsgleichung für inkompressibles Newtonsches Fluid

$$\underbrace{\frac{D\vec{v}}{Dt}}_{\text{Beschl.}} = \underbrace{-\frac{1}{\rho}\nabla p}_{\text{Druckkraft}} + \underbrace{\nu\Delta\vec{v}}_{\text{Reibungskraft}} + \underbrace{\vec{g}}_{\text{Schwerkraft}} \quad (15)$$

mit  $\nu = \mu/\rho$  kinematische Visk. [ $m^2/s$ ].

Schreibweisen:

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \quad \text{Laplace-Operator}$$

$$\text{grad } p = \nabla p = \left( \frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z} \right)^T; \quad \text{Gradient}$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}, \quad \text{substantielle Ableitung}$$

Substantielle Ableitung

$\frac{D\vec{v}}{Dt}$  ...zeitliche Änderung der Geschwindigkeit, in einem mit dem Flüssigkeitselement mitbewegten Koordinatensystem ("mitbewegter Beobachter")

Bsp: eindimensionale stationäre Düsenströmung,

Beobachter bewegt sich in der Zeit  $dt = dx/u$  um die Strecke  $dx = u dt$  weiter. Er erfährt dabei die Beschleunigung

$$\left( \frac{du}{dt} \right)_B = \frac{du}{d(x/u)} = u \frac{du}{dx} = \frac{Du}{Dt}$$

#### 4.1.2 Randbedingungen

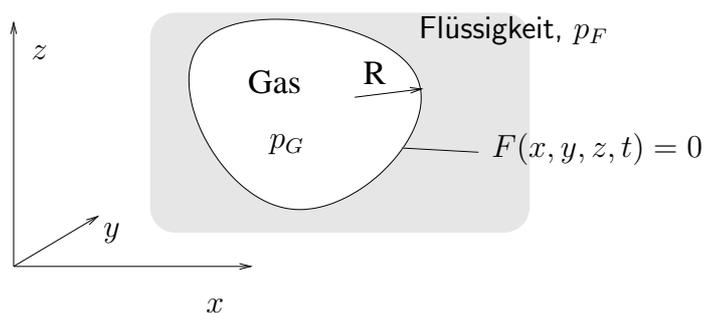
- vollst. Glgssystem:
- Erhaltungsgesetze + Zustandsgleichungen
  - Randbedingungen
  - Anfangsbedingungen

feste Wand:

$$\vec{v}_{\text{fest}} = \vec{v}_{\text{fl.}}$$

- Übereinstimmung der Tangentialkomponente  $\vec{v}_t$  (Haften) kann nur bei zähen Fl. (reibungsbefaheten Strömungen) gefordert werden, Ausnahme bei hochverdünnten Gasen: "Gleiten"
- Übereinstimmung der Normalkomponente  $v_n$ : Undurchlässigkeit der Wand

Randbed. an Flüssigkeitsoberfläche (Grenzfläche Flüssigkeit/Gas)



kinematische Randbedingung: An der Oberfläche befindliche Flüssigkeitsteilchen bleiben an der Oberfläche. Bahnkurve eines solchen Teilchens:  $(x(t), y(t), z(t))$ . Mit  $\frac{dx}{dt} = u$ ,  $\frac{dy}{dt} = v$ ,  $\frac{dz}{dt} = w$  gilt daher

$$\frac{d}{dt}F(x(t), y(t), z(t), t) = \boxed{u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0} \quad (16)$$

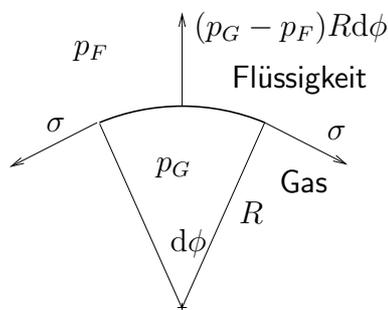
Dynamische Randbedingungen:

Spannungsgleichgewicht an Oberfläche (zu berücksichtigen sind: Druck, Reibungsspannungen, Oberflächenspannung)

bei Vernachlässigung der Reibungsnormalspannung Druckdifferenz an Oberfläche gegeben durch

$$|p_G - p_F| = \sigma \left( \frac{1}{R_I} + \frac{1}{R_{II}} \right) \quad \text{auf} \quad F(x, y, z, t) = 0 \quad (17)$$

$R_I, R_{II}$  Hauptkrümmungsradien der Oberfläche in  $(x, y, z)$ .



$\sigma$  Oberflächenspannung,  
 $R$  Krümmungsradius

$$\sigma d\phi = (p_G - p_F) R d\phi$$

## 4.2 Mechanische Ähnlichkeit

Stoffwerte  $\rho, \mu$ , oder  $\nu, \sigma$  als const angenommen,  
dimensionslose Größen:

$$x', y', z' = \frac{x}{L}, \frac{y}{L}, \frac{z}{L}, \quad t' = \frac{U}{L} t, \quad \vec{v}' = \frac{1}{U} \vec{v}, \quad p' = \frac{p}{\rho U^2},$$

Referenzgeschw.  $U$ , Referenzlänge  $L$ , Referenzdruck = doppelter Staudruck  $\rho u^2$

Navier-Stokes Gleichungen

$$\frac{D\vec{v}'}{Dt'} = -\nabla' p' + \underbrace{\frac{\nu}{UL}}_{1/Re} \Delta' \vec{v}' + \underbrace{\frac{gL}{U^2}}_{1/Fr} \vec{g}' \quad (18)$$

mit  $\vec{g}' = \frac{1}{g} \vec{g}$ .

## Randbedingungen

- feste Wände: stationäre RB: (Wand ruhend):  $\vec{v}'_{Fl} = 0$   
instationäre RB, z.B. schwingende Wände

$$\vec{v}'_{Fl} = \vec{v}'_{fest}(\omega t) = \vec{v}'_{fest}\left(\frac{\omega L}{U} t'\right) = \vec{v}'_{fest}(Sr t')$$

$\omega$  charakteristische Frequenz,

$$\text{Strouhal-Zahl } Sr = \frac{\omega L}{U} \quad (19)$$

- freie Oberfläche

$$|p'_G - p'_F| = \frac{\sigma}{\rho U^2 L} \left( \frac{1}{R'_I} + \frac{1}{R'_{II}} \right)$$

$$\text{Weber-Zahl } We = \frac{\rho U^2 L}{\sigma} \quad (20)$$

- Vergleichströmungen "Original" und "Modell", mind. eine Referenzgröße verschieden (z.B. Länge)
- Original und Modell müssen geometrisch ähnlich sein
- Die Vergleichsströmungen sind darüber hinaus mechanisch ähnlich (Übereinstimmung der dimensionslosen Variablen in entsprechenden Punkten), wenn die dimensionslosen Kennzahlen

$Re = \frac{UL}{\nu}$	Reynolds-Zahl
$Fr = \frac{U^2}{gL}$	Froude-Zahl
$Sr = \frac{\omega L}{U}$	Strouhal-Zahl
$We = \frac{\rho U^2 L}{\sigma}$	Weber-Zahl

übereinstimmen.

- Nicht immer sind alle Kennzahlen wichtig, We nur bei freier Oberfl. (Blasen, Tropfen), Sr nur bei instationären Randbedingungen, Fr nur, wenn Schwerkraft eine Rolle spielt.
- Nicht immer sind alle Kennzahlen unabhängig voneinander. z.B. Rieselfilm.  $U$  ist nicht gegeben, sondern muss aus dimensionsloser Beziehung der Form  $Fr = f(Re)$  bestimmt werden. Sr bzw. We spielen dabei keine Rolle
- Aus Re, Fr, We lässt sich eine weitere Kennzahl (Morton-Zahl) bilden, die nur Stoffeigenschaften enthält:

$$Mo = \frac{We^3}{Re^4 Fr} = g \nu^4 \frac{\rho^3}{\sigma^3}$$

Wasser bei 20 °C:  $Mo = 3,0 \times 10^{-11}$ .

- Neben den Feldgrößen  $p$  und  $\vec{v}$  sind vor allem die Kräfte auf umströmte Körper von Interesse.  
Auftrieb: normal auf Anströmrichtung (hier nicht behandelt)  
Widerstand  $F_w$ : parallel zur Anströmrichtung  
dimensionsloser Widerstand (Widerstandsbeiwert)

$$c_w = \frac{F_w}{\frac{1}{2} \rho U^2 L^2}$$

(für Kugel  $\pi R^2$ ). Aus Ähnlichkeitsgesetz folgt:

$$c_w = c_w(Re, Fr, Sr, We)$$

Widerstandsbeiwert stimmt bei Modell und Original überein

- Wenn zwei Flüssigkeiten vorkommen: Weitere Kennzahlen:  $\rho_1/\rho_2, \mu_1/\mu_2$ .
- Wenn Kompressibilität eine Rolle spielt:  $M_\infty = U/c_\infty$  Machzahl

Beispiel: Schiffskanal

$$\text{Re}_1 = \text{Re}_2 \quad \rightarrow \quad \frac{U_1 L_1}{\nu_1} = \frac{U_2 L_2}{\nu_2}$$

$$\text{Fr}_1 = \text{Fr}_2 \quad \rightarrow \quad \frac{U_1^2}{g L_1} = \frac{U_2^2}{g L_2}$$

daraus folgt

$$\frac{U_2}{U_1} = \left( \frac{L_2}{L_1} \right)^{1/2}$$

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{U_2 L_2}{U_1 L_1} = \left( \frac{L_2}{L_1} \right)^{3/2}$$

Für Modellversuch mit  $L_2 \ll L_1$  wäre Flüssigkeit mit  $\nu_2 \ll \nu_1 = \nu_{H_2O}$  nötig. Die gibt es aber nicht!

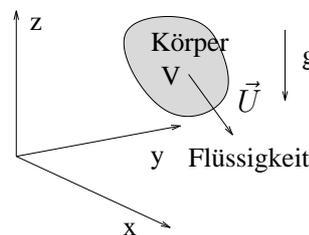
### 4.3 Hydrostatischer Auftrieb

Bewegungsglg für Flüssigkeit

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \Delta \vec{v} + \vec{g}$$

Zerlegung des Druckes  $p = p_h + p_U$  mit  $\frac{1}{\rho} \text{grad} p_h = \vec{g}$ . Es bleibt

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p_U + \nu \Delta \vec{v}$$



Bewegungsglg. ohne Schwerkraft,  $p_h$  hydrostatischer Druckanteil zufolge  $\vec{g}$ ,  $p_U$  Druckanteil zufolge Bewegung  $\vec{U} \neq 0$ .

Von Flüssigkeit auf Körper ausgeübte resultierende Kraft:

$$\vec{F} = \vec{F}_h + \vec{F}_U$$

$\vec{F}_h$  Kraft als Folge von  $p_h$

$\vec{F}_U$  Kraft als Folge von  $p_u$  + Reibungsspannungen

$$\vec{F}_U = \vec{F}_W + \vec{F}_A$$

$\vec{F}_W$  parallel  $\vec{U}$ , Widerstand

$\vec{F}_A$  normal zu  $\vec{U}$ , dyn. Auftrieb, *lift*

Archimedessches Prinzip: Körper wird durch Flüssigkeit ersetzt gedacht. Flüssigkeit bleibt in Ruhe, d.h. resultierende Druckkraft auf Oberfläche = -Gewicht.

$$\vec{F}_h = -\vec{g}\rho_{F1}V$$

Schlussfolgerung:

- Zur Berechnung der Strömung um einen festen Körper, Tropfen, oder Blase gegebener Gestalt wird von der Bewegungsglg. ohne Schwerkraftterm ausgegangen. Der sich daraus ergebende Druck gibt die Abweichung vom hydrostatischen Druck an. (Auf die Gestalt von Blasen und Tropfen kann die Schwerkraft einen wesentlichen Einfluss haben!)
- Für stationäres Steigen oder Fallen gilt Kräftegleichgewicht:

$$\vec{F}_h + \vec{F}_w + \vec{F}_G = 0$$

somit gilt

$$c_w \frac{\rho U^2}{2} L^2 = g|\rho_V - \rho_{F1}|V$$

mit  $L^2$  Querschnittsfläche

$\rho_V$  Dichte des Körpers, der  $V$  ausfüllt

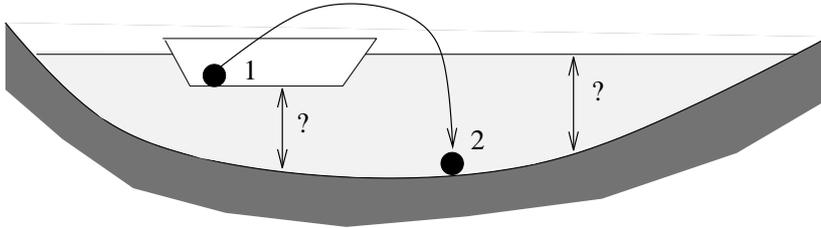
$\rho_{F1}$  Dichte der Flüssigkeit

Berechnung der Steig- bzw. Sinkgeschwindigkeit  $U$  erfordert Kenntnis von  $c_w = c_w(\text{Re}, \text{We})$ .

dimensionslose Darstellung

$$\text{Fr} = \frac{U^2}{gV/L^2} = \frac{2}{c_w} \left| \frac{\rho_v}{\rho} - 1 \right|$$

Aufgabe: Steine werden aus einem Boot in einen See versenkt. a) Wie verhält sich der Wasserspiegel des Sees? Wie verhält sich das Boot (der Kiel) gegenüber dem Grund des Sees?



#### 4.4 Schleichende Strömung $\text{Re} \ll 1$

Hier Referenzwert für Druck  $\mu U/d = \rho U^2/\text{Re}$ :  $p' = \frac{pd}{\mu U}$ ,

Referenzlänge Kugeldurchmesser  $d = 2R$

$$\left( \Delta' - \text{Re} \frac{D}{Dt} \right) \vec{v}' = \nabla' p'$$

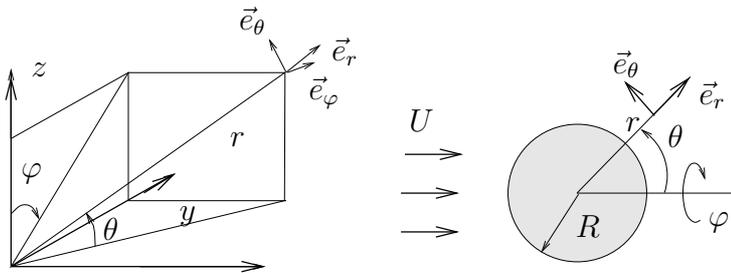
$$\text{Re} \ll 1 : \quad \Delta' \vec{v}' = \nabla' p'$$

$$\text{div}' \vec{v}' = 0$$

weglassen von ' im folgenden. Wegen  $\text{rot grad } p = 0$  Elimination von  $p$ :

$$\boxed{\text{rot } \Delta \vec{v} = 0}$$

## 4.4.1 Feste Kugel



Kugelkoordinaten

Aus Bronstein-Semendjajew (1993) Kap.10: Divergenz in Kugelkoordinaten

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta v_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta v_\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r v_\varphi) \right) = 0$$

## Rotation in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} \vec{v} &= v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta + v_\varphi \vec{e}_\varphi \\ \operatorname{rot} \vec{v} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_r + \\ &+ \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r v_\varphi)}{\partial r} \right] \vec{e}_\theta + \\ &+ \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

Definiere Stokessche Stromfunktion  $\psi = \psi(r, \theta)$  und setze

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad v_\varphi = 0.$$

somit ist die Kontinuitätsgleichung erfüllt. Wegen

$$\text{grad } \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

gilt  $\vec{v} \cdot \text{grad } \psi = 0$  und daher ist  $\psi = \text{const}$  eine Stromlinie

$$\text{rot } \vec{v} = -\frac{1}{r \sin \theta} L\psi \vec{e}_\varphi$$

$$\Delta \vec{v} = \text{rot rot } \vec{v} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial L\psi}{\partial r} \vec{e}_\theta - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial L\psi}{\partial \theta} \vec{e}_r$$

mit

$$L = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$$

$$\text{rot } \Delta \vec{v} = \frac{1}{r \sin \theta} L^2 \psi \vec{e}_\varphi,$$

d.h.

$$L^2 \psi = \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right]^2 \psi = 0$$

Randbedingungen

- Haftbedingung bei  $r = 1$ :  $v_r = v_\theta = 0$  bzw.  $\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$
- Anströmbedingung  $v_r = \cos \theta$ ,  $v_\theta = -\sin \theta$

$$\psi \sim \frac{1}{2} r^2 \sin^2 \theta, \quad \text{für } r \rightarrow \infty$$

Lösungsansatz

$$\psi(r, \theta) = r^\lambda \sin^2 \theta$$

$$Lr^\lambda \sin^2 \theta = ((\lambda - 1)\lambda - 2)r^{\lambda-2} \sin^2 \theta$$

$$L^2 r^\lambda \sin^2 \theta = ((\lambda - 1)\lambda - 2)((\lambda - 3)(\lambda - 2) - 2)r^{\lambda-4} \sin^2 \theta$$

führt auf die Gleichung vierten Grades

$$((\lambda - 1)\lambda - 2)((\lambda - 3)(\lambda - 2) - 2) = 0$$

mit den Lösungen

$$\lambda = -1, 1, 2, 4$$

$$f(r) = Ar^4 + Br^2 + Cr + \frac{D}{r}$$

Anpassen an die Randbedingungen ergibt

$$\psi'(r', \theta) = \frac{1}{4} \left( 2(r')^2 - 3r' + \frac{1}{r'} \right) \sin^2 \theta$$

$$\psi(r, \theta) = \frac{UR^2}{4} \left( 2 \frac{r^2}{R^2} - 3 \frac{r}{R} + \frac{R}{r} \right) \sin^2 \theta$$

$$v_r = U \left( 1 - \frac{3R}{2r} + \frac{1}{2} \frac{R^3}{r^3} \right) \cos \theta$$

$$v_\theta = -U \left( 1 - \frac{3R}{4r} - \frac{1}{4} \frac{R^3}{r^3} \right) \sin \theta$$

- $\psi, v_r, v_\theta$  unabhängig von  $\nu$
- $\psi = \text{const}$  symmetrisch bezgl.  $\theta = \pi/2$
- $|\vec{v}| \leq U$
- bei  $r = 10R$  ca 10% Geschwindigkeitsstörung

Berechnung des Druckfeldes:

72

Einsetzen in die Bewegungsgleichung:

$$\text{grad } p = \mu \Delta \vec{v}$$

ergibt

$$\begin{aligned} \text{grad } p &= \frac{\partial p}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \vec{e}_\theta = \\ &= \mu \Delta \vec{v} = \frac{\mu}{r \sin \theta} \frac{\partial L\psi}{\partial r} \vec{e}_\theta - \frac{\mu}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial L\psi}{\partial \theta} \vec{e}_r \end{aligned}$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\mu}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial L\psi}{\partial \theta} = \frac{2\mu}{r^2} F(r) \cos \theta \quad \text{mit } F(r) = \frac{3}{2} U \frac{R}{r}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = -\frac{\mu}{r \sin \theta} \frac{\partial L\psi}{\partial r} = -\mu F'(r) \sin \theta$$

$$p = -\frac{3\mu U R}{2r^2} \cos \theta + p_\infty$$

73

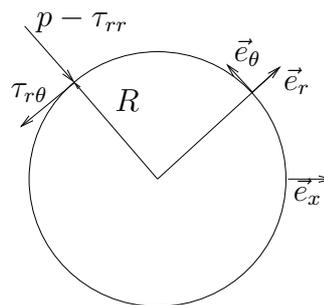
Widerstand

$$F_w = F_p + F_\tau$$

$$\tau_{rr} = 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} = 0$$

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta} &= \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) = \\ &= -\frac{3\mu U R^3}{2r^4} \sin \theta \end{aligned}$$

$U \rightarrow$



$$F_p = \int_S -p \vec{e}_r \cdot \vec{e}_x dS = 2\pi \mu U R$$

$$F_\tau = \int_S (\tau_{rr} \vec{e}_r + \tau_{r\theta} \vec{e}_\theta) \cdot \vec{e}_x dS = 4\pi \mu U R$$

Stokesche Widerstandsformel, feste Kugel  $Re \ll 1$

$$F_W = 6\pi\mu UR$$

Widerstandsbeiwert

$$c_w = \frac{F_w}{\pi R^2 \frac{\rho U^2}{2}} = \frac{24}{Re}, \quad \text{mit} \quad Re = \frac{Ud}{\nu} = \frac{2UR\rho}{\mu}$$

Fallgeschwindigkeit:

$$6\pi\mu UR = g(\rho_V - \rho) \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$U = \frac{2}{9}gR^2 \frac{\rho_V - \rho}{\mu}$$

#### 4.4.2 Kugelförmige Tropfen und Blasen

Ansatz für Stromfunktion:

$$\psi = \begin{cases} (Ar^4 + Br^2 + Cr + Dr^{-1}) \sin^2 \theta & r > R \\ (A_V r^4 + B_V r^2 + C_V r + D_V r^{-1}) \sin^2 \theta & r < R \end{cases}$$

Randbedingungen:

- $r \rightarrow \infty$ :  $\psi = \frac{1}{2}Ur^2 \sin^2 \theta$  folgt:  $A = 0$ ,  $B = U/2$ .
- $r = 0$ :  $\vec{v}$  endlich:  $C_V = D_V = 0$ .
- $r = R$ :  $v_r(R-) = v_r(R+) = 0$  (Kugelform)  
 $v_\theta(R-) = v_\theta(R+)$  ist stetig (Haftbedingung)  
 $\tau_{r\theta}(R-) = \tau_{r\theta}(R+)$  ist stetig (dyn. RB in Tangentialrichtung)

4 Gleichungen für Unbekannte  $C$ ,  $D$ ,  $A_V$ ,  $B_V$ ,

$$F_W = 2\mu\pi UR \frac{2\mu + 3\mu_V}{\mu + \mu_V} \quad \text{Rybczynski \& Hadamard, } Re \ll 1 \quad (21)$$

- $\mu_V \gg \mu$  Stokes!, (fester Körper, Wassertropfen in Luft)
- $\mu_V \ll \mu$  Gasblase in Flüssigkeit

$$F_W = 4\pi\mu U R$$

$$U = -\frac{1}{3} \frac{gR^2}{\nu}, \quad \rho_V \ll \rho, \quad \text{Re} \ll 1$$

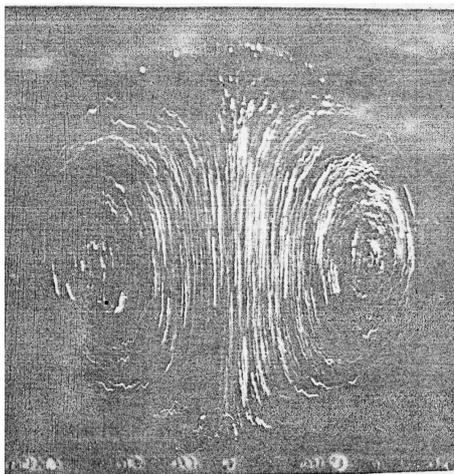


Fig. 1.  
Water drop in Castor Oil.  
Drop diam. 1.77 cm, falling speed 1.16 cm/sec.  
exposure  $\frac{1}{2}$  sec.

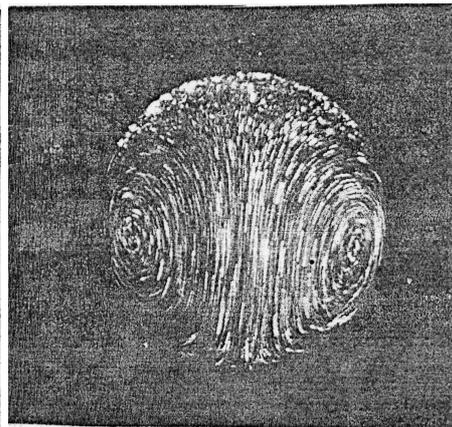


Fig. 2.  
Water Drop in Castor Oil.  
Drop diam. 1.21 cm, falling speed 0.62 cm/sec  
Exposure 1 sec.

#### 4.4.3 Einfluss adsorbierter (oberflächenaktiver) Stoffe

- Experimente zeigen: Formel von Rybczynski-Hadamard stimmt nur in sehr reinen Flüssigkeiten. Gerade bei Wasser i.a. nicht der Fall. Steiggeschwindigkeit weicht daher von (21) ab.
- Ursache: Oberflächenaktive Substanzen sammeln sich an Flüssigkeitsoberfläche und bilden einen adsorbierten Film. Film unterbindet Strömung des Gases im Inneren der Blase (sonst würde sich an einem Pol der Blase Substanz ansammeln  $\Rightarrow$  kein Film! Gas im Inneren in Ruhe  $\Rightarrow$  es gilt die Stokessche Formel Steiggeschwindigkeit daher aus  $\rho_V \ll \rho$  folgt

$$U = -\frac{2}{9} \frac{gR^2}{\nu},$$

(2/3 der Steiggeschw. ohne Film!, experimentell gut bestätigt!)

#### 4.5 Strömungen bei größeren Reynolds-Zahlen

##### 4.5.1 Euler-Gleichungen

Navier-Stokes Gleichungen in dim. loser Form, ohne Schwerkraft

$$\frac{D\vec{v}'}{Dt'} = -\nabla' p' + \underbrace{\frac{1}{\text{Re}} \Delta' \vec{v}'}_{\ll 1, \text{ falls } \text{Re} \gg 1}$$

Reibungsterme vernachlässigt:

$$\frac{D\vec{v}'}{Dt'} = -\nabla' p' \quad (22)$$

#### 4.5.2 Drehungsfreiheit und Helmholtz'scher Wirbelsatz Mittlere Winkelgeschwindigkeit eines Flüssigkeitsteilchens

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v} \quad (23)$$

Drehungsfreie (wirbelfreie) Strömung  $\text{rot } \vec{v} = 0$

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

#### Helmholtz'scher Wirbelsatz Euler-Glgen. $\rho = \text{const}$

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p$$

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad} (\vec{v} \cdot \vec{v}) - 2\vec{v} \times \vec{\omega}$$

Bildung von rot von Euler-Glg:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} - \text{rot}(\vec{v} \times \vec{\omega}) = 0$$

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} - \left[ (\vec{\omega} \cdot \text{grad}) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{\omega} + \vec{v} \cdot \underbrace{\text{div} \vec{\omega}}_{=0, \text{div rot}=0} - \vec{\omega} \cdot \underbrace{\text{div} \vec{v}}_{=0, \rho=\text{const}} \right] = 0$$

$$\boxed{\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = (\vec{\omega} \cdot \text{grad}) \vec{v}}$$

speziell: Ebene Strömung

$$\vec{v} = (v_x(x, y), v_y(x, y), 0), \quad \vec{\omega} = (0, 0, \omega)$$

$$(\vec{\omega} \cdot \text{grad})\vec{v} = 0$$

$$\boxed{\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = 0}$$

Wirbelstärke bleibt erhalten!

- In drehungsfreier Strömung werden Flüssigkeitsteilchen nur verformt und translatorisch bewegt, aber nicht gedreht.
- Einfachstes Beispiel einer drehungsfreien Strömung: Parallelströmung mit konstanter Geschwindigkeit
- Nach dem Helmholtzschen Wirbelsatz bleiben reibungsfreie Strömungen drehungsfrei, wenn sie zu einem Zeitpunkt drehungsfrei waren.
- Die reibungsfreie Umströmung eines Körpers ist daher drehungsfrei, wenn die Anströmung eine Parallelströmung mit konstanter Geschwindigkeit ist (in der Praxis meist der Fall)
- Grundgleichungen für reibungsfreie, drehungsfreie Strömung

$$\text{div}\vec{v} = 0, \quad \text{rot}\vec{v} = 0$$

- Ebene reibungs- und drehungsfreie Strömung

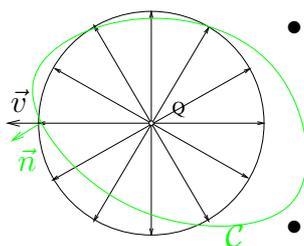
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen

- Geschwindigkeitspotential: Ansatz  $\vec{v} = \text{grad } \phi$ , wegen  $\text{rot grad } \phi = 0$  Drehungsfreiheit erfüllt.  
Daher: drehungsfreie Strömung ist eine Potentialströmung.  
Einsetzen in Kontinuitätsgleichung

$$\text{div grad } \phi = \Delta \phi = 0 \quad \text{Laplace-Gleichung}$$

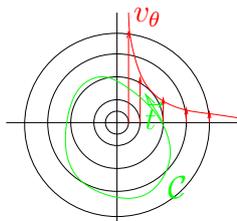
#### 4.5.3 Beispiele von Potentialströmungen



- Ebene Quelle  $\phi = C \ln r$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$   
 $v_r = C/r$ ,  $v_\theta = 0$ , Quellstärke  $Q = 2\pi r v_r = 2\pi C$

$$\phi = \frac{Q}{2\pi} \ln r$$

ebene Quellströmung



Potentialwirbel

- Potentialwirbel

$$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta = \frac{\Gamma}{2\pi} \arctan \frac{y}{x}, \quad v_r = 0, \quad v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

Zirkulation (Kurvenintegral entlang Kurve  $\mathcal{C}$  mit Tangentialvektor  $\vec{t}$ .)

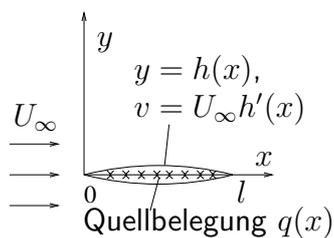
$$\int_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot \vec{t} ds = 2\pi r v_\theta = \Gamma$$

räumliche Quelle

$$\phi = -\frac{Q}{4\pi r}$$

Singularitätenbelegung: Überlagerung von Quellen und Wirbeln, sodass Randbedingungen erfüllt sind:

Umströmung eines schlanken Profils:



$$y = \pm h(x)$$

Quellbelegung  $q(x)$  auf  $x$ -Achse derart, dass RB

$$v = \pm u h'(x), \text{ auf Profil } y = \pm h(x)$$

erfüllt ist. Lösung:  $q(x) = 2U_\infty h'(x)$ .

$$\phi(x, y) = U_\infty x + \frac{1}{2\pi} \int_0^l q(x') \ln \sqrt{(x-x')^2 + y^2} dx'$$

Potentialströmung um Kugel

$$\Delta \Phi = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \phi = 0$$

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta},$$

RB:  $r \rightarrow \infty$ :  $v_r = U \cos \theta$ ,  $v_\theta = -U \sin \theta$

RB  $r = R$ :  $v_r = 0$ ,  $v_\theta \neq 0$  (keine Haftbed.!)

Separationsansatz  $\phi(r, \theta) = U f(r) \cos \theta$

$$r^2 f'' + 2r f' - 2f = 0$$

Lösung  $f = c_1 r + c_2 / r^2$ , aus RB  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = R^3 / 2$

$$\phi = U \left( r + \frac{R^3}{2r^2} \right) \cos \theta, \quad v_r = U \left( 1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \cos \theta,$$

$$v_\theta = -U \left( 1 + \frac{R^3}{2r^3} \right) \sin \theta.$$

Bernoulli Gleichung kann auf jedem Stromfaden angewandt werden, falls reibungsfreie, inkompressible Strömung vorliegt.

$$p + \frac{1}{2}\rho W^2 = p_0 = p_\infty + \frac{1}{2}\rho U^2$$

$p$  (statischer) Druck

$p_0$  Ruhedruck (im Staupunkt)

$p_\infty$  Anströmdruck

$$W = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}$$

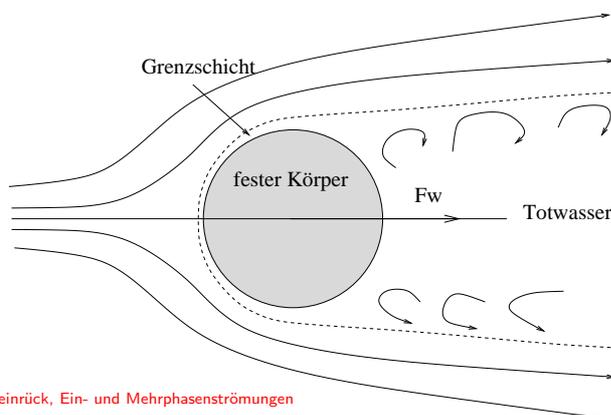
Für  $r = R$ :  $W = v_\theta = \frac{3}{2}U \sin \theta$ , Druckverteilung auf Kugeloberfläche

$$p = p_\infty + \frac{\rho U^2}{2} \left(1 - \frac{9}{4} \sin^2 \theta\right)$$

Da Druckverteilung symmetrisch bezüglich Äquator: kein Widerstand!  
d'Alembertsches Paradoxon: kein Widerstand für geschlossene Körper in drehungsfreier, reibungsfreier Strömung!

#### 4.5.4 Vergleich Potentialströmung mit realer Strömung um feste Körper, Grenzschicht und Totwasser

- $Re \gg 1$ : Potentialströmung, die jedoch nicht im ganzen Strömungsfeld gültig sein kann (vgl. d'Alembertsches Paradoxon).
- Potentialströmung erfüllt Haftbedingung für zähe Flüssigkeiten nicht.  $\Rightarrow$  Dünne Strömungsgrenzschicht in Wandnähe, Reibungseffekte wichtig, obwohl  $Re \gg 1$ .



- Strömung in der Grenzschicht kann Druckanstieg auf der Rückseite eines dicken Körpers nicht folgen, die Strömung löst ab. Es entsteht ein stark verwirbeltes Totwasser- oder Nachlaufgebiet.
- Druck im Totwasser ist kleiner, als er gemäß Potentialströmung sein sollte. –  $\rightarrow$  auf den Körper wirkt resultierende Kraft in Anströmrichtung (Widerstand). Druckverteilung auf Vorderseite stimmt recht gut mit Potentialtheorie überein.
- $F_w = c_W A \rho U^2 / 2$  mit  $c_w = c_w(\text{Re})$ ,  $\text{Re} = Ud/\nu$ .
- Weitere Vereinfachung: Druckverteilung an der Vorderseite entspricht Potentialströmung; Druckverteilung auf der Hinterseite durch Totwasser bestimmt, das hauptsächlich turbulent ist. –  $\rightarrow \nu$  und damit  $\text{Re}$  spielt keine wesentliche Rolle für den Widerstand.
- Ablösepunkt hängt davon ab, ob Strömung laminar oder turbulent ist.

- Turbulente Grenzschicht kann wegen intensiven Energie- und Impulsaustausch mit Außenströmung größeren Druckanstieg vertragen.
- Bei schlanken Körpern kann Ablösung nahezu ganz vermieden werden. (“Stromlinienkörper”), z.B. Tragflügelprofil, Potentialtheorie gibt in diesem Fall Stromlinien und Druckverteilung im ganzen Strömungsfeld recht gut wieder. Für Widerstandsberechnung aber natürlich nicht ausreichend - Grenzschichttheorie muss herangezogen werden.

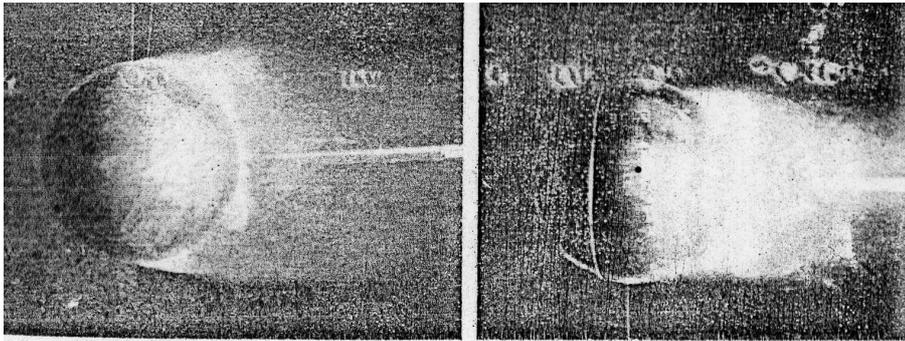
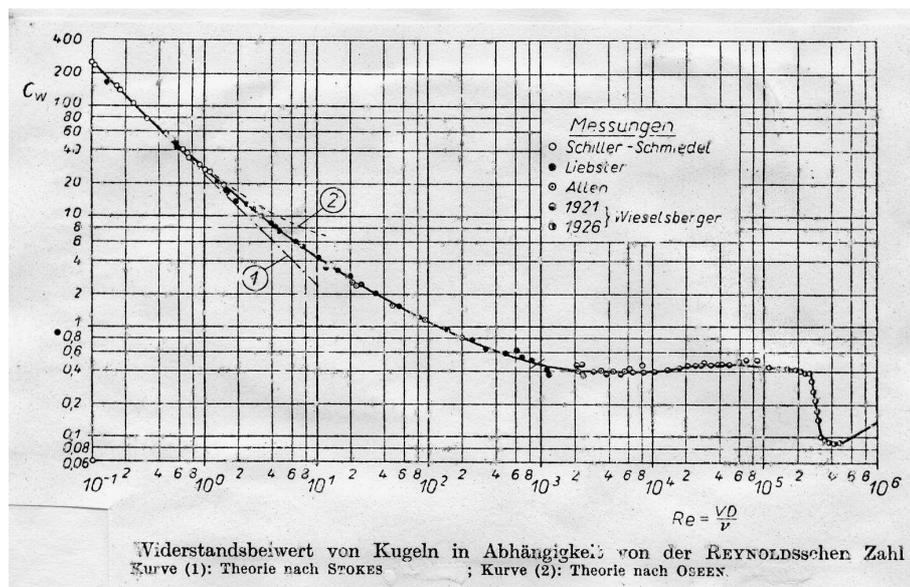


Figure 5.11.7. Smoke released at the rear of a sphere in a stream flowing from left to right. The second photograph shows the effect of disturbing the boundary layer with a wire. (From Wieselsberger 1914.)



#### 4.5.5 Tropfenzerfall

94

- Tropfen in Gas  $Re \gg 1$ :  $c_w = \text{const}$  (wie bei festem Körper)  
Fallgeschwindigkeit  $U$  aus

$$\rho_v g \frac{\pi d^3}{6} = c_w \frac{\rho U^2 \pi d^2}{4} \Rightarrow U = \sqrt{\frac{4}{3c_w} \frac{\rho_v}{\rho} g d} \quad (24)$$

- Kugelförmiger Tropfen:  $c_w \sim 0,4 - 0,5$  unterkritische Reynolds-Zahl  $1 \ll Re < 2,5 \times 10^5$ .  
Bsp: Wassertropfen  $d = 1 \text{ mm} \rightarrow u = 5 \text{ m/s}$ ,  $Re \sim 300$ .
- Bedingung für Kugelform: Oberflächenspannung muss gegenüber Trägheitskräften dominieren.

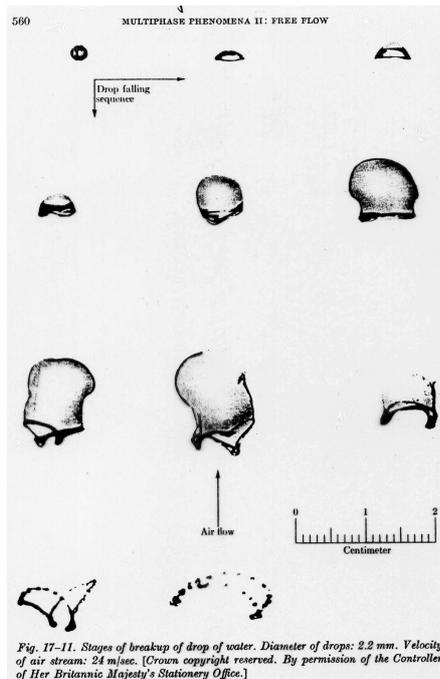
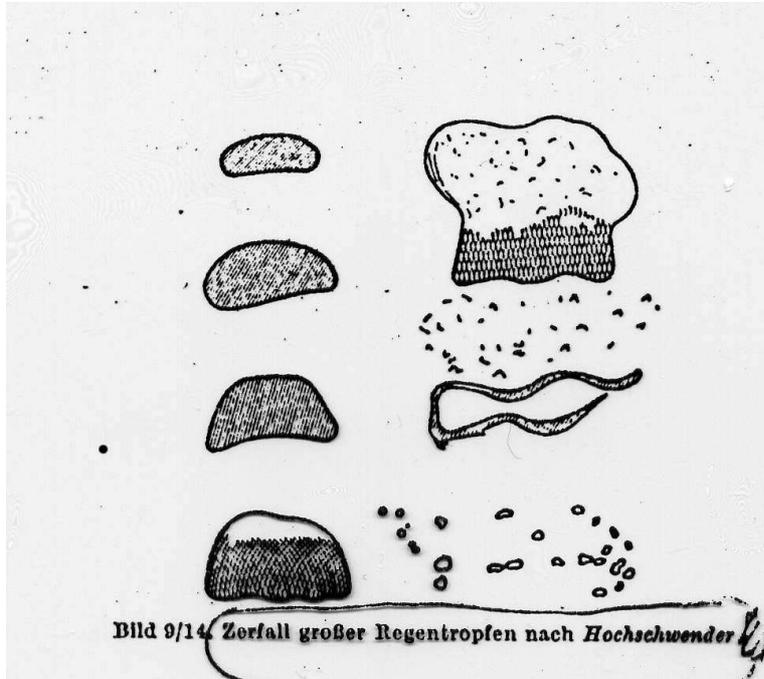
$$|p - p_v| < \sim \frac{4\sigma}{d} \gg \frac{\rho U^2}{2}, \quad \Rightarrow \quad \frac{We}{8} \ll 1$$

praktisch ausreichend  $We < 6$ , (Wasser  $\sigma = 0,07 \text{ N/m}$ ,  $d < 4 \text{ mm}$ )

95

- $We > 6$ : Zunächst Abplattung, dann hutartiges Auswölben  $\Rightarrow$  Widerstandsbeiwert  $\uparrow$ , Tropfen zerfallen bei Überschreiten einer kritischen Weber-Zahl  $We \sim 12$ . ( $d$  Durchmesser der Kugel gleichen Volumens).  
Bsp: Wasser  $We = 12 \Rightarrow d \sim 6,5 \text{ mm}$
- Falls innere Reibung im Tropfen eine Rolle spielt, zusätzliche Kennzahl:

$$\text{Ohnesorge-Zahl} \quad Oh = \frac{\mu_v}{\sqrt{\rho_v \sigma d}}$$



#### 4.5.6 Vergleich von Potentialströmung mit realer Strömung; Widerstandsberechnung aus Dissipation

- Gasblasen mit adiabatem Film aus oberflächenaktiven Substanzen: Wie fester Körper,  $c_w \sim 0,4 \dots 0,5$ . Steigeschw. siehe (24) für Kugelform,  $Re \gg 1$ ,
- Gasblasen in reiner Flüssigkeit: An Grenzfläche Fl./Gas ( $\mu_v \ll \mu$ ) braucht die Tangentialkomp. der Geschwindigkeit nicht verschwinden, Schubspannung verschwindet  $\Rightarrow$  keine starke Geschwindigkeitsabnahme  $\Rightarrow$  Grenzschicht verträgt größeren Druckanstieg, Ablösung erst ganz in der Nähe des hinteren Staupunktes. Potentialströmung ist im ganzen Raum eine gute Näherung für Geschwindigkeitsverteilung und Druck .

#### Abschätzung des Widerstandes mittels Leistungsbilanz

Schleppleistung = Leistung der Reibungskräfte (Dissipation)

$$F_w \cdot U \sim \tau \dot{\gamma} V_{\text{eff}} \sim \tau \frac{U \pi (3d)^3}{6} \sim \mu \frac{U^2}{d^2} 5\pi d^3 \sim 10\pi \mu U^2 R$$

$$F_w \sim 10\pi \mu U R, \quad \text{genauere Rechnung} \quad 12\pi \mu U R$$

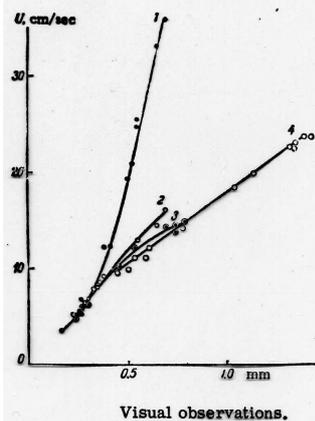
$$c_w = \frac{48}{Re}$$

Doppelter Wert von Stokes, Widerstand prop.  $U$  (nicht  $U^2$ , obwohl  $Re \gg 1$ !)

- Steiggeschwindigkeit ( $Re \gg 1$ , ohne Film!)

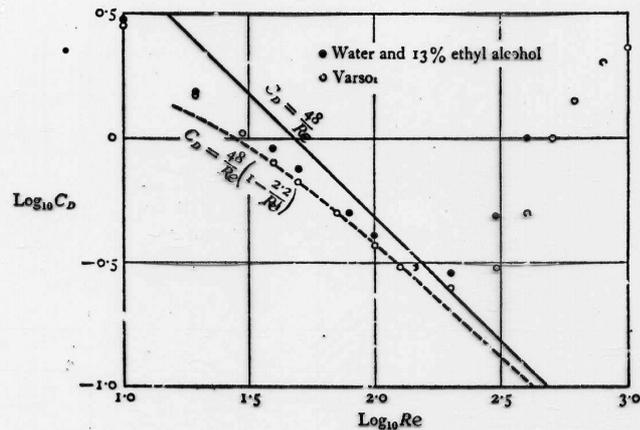
$$U = \frac{gd^2}{36\nu}$$

## Steiggeschwindigkeit und Widerstandsbeiwert von Gasblasen



Visual observations.

1 - double-distilled water; 2 - tap water; 3 - n-amyl alcohol,  $10^{-4}$  M; 4 - glass balls (adjusted for specific gravity).



The drag coefficient of gas bubbles rising through liquids. The points for the two particular liquids are taken from experimental curves given by Haberman and Morton (1953).

## 4.5.7 Stabilität der Blasenbewegung, Abweichungen von der Kugelgestalt, Schirmlasen und Blasen im Rohr

Bei größeren Blasendurchmessern beträchtliche Abweichung:

A Instabilität der stationären vertikalen Bewegung Schraubenförmige Bewegung oder Zick-Zack Bewegung. Experiment zeigen, dass bewegung stabil

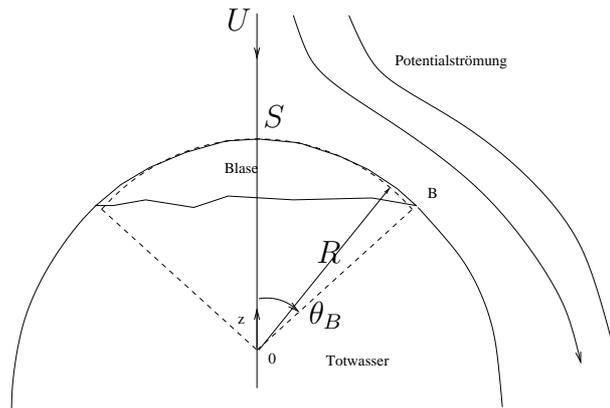
- in reinen Fl. mit  $Mo < 10^{-8}$  falls  $We < 3$
- in reinen Fl. mit  $Mo \gg 10^{-8}$ , beliebige  $We$
- Verunreinigungen wirken destabilisierend.

B Bedingungen für Kugelgestalt (wie bei Tropfen)

$$\frac{We}{8} \ll 1$$

Gilt für  $Re \ll 1$ ; Theorie von Rybczynski-Hadamard zeigt, dass Differenz der Normalspannungen constant ist, Oberflächenspannung braucht gar nicht stark sein, In zähen Fl. auch große Blasen kugelförmig.

Zunehmende Blasengröße:  $We \uparrow$ , Abweichungen von Kugelgestalt,  
Form ähnlich einem Kugelabschnitt (Regenschirm)



Totwassergrenze etwa kugelförmig für  $Re < 110$ , offenes Totwasser für  
 $Re > 110$

Wegen  $Re \gg 1$   $We \gg 1$ :

$$Fr = \frac{U^2}{gR} = f(Re, We) = \text{const} \quad \Rightarrow \quad U = k\sqrt{gR}$$

Theorie (Davis & Taylor):  $k = \frac{2}{3} \theta_B = 50^\circ$ .

Potentialströmung um Kugel: Oberflächengeschw.  $W = \frac{3}{2}U \sin \theta$   
Bernoulli-Glg

$$\frac{W^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = gz_s + \frac{p_0}{\rho}$$

mit  $p_0$  Druck im Staupunkt,  $z$ -Koordinate des Staupunktes  $z_s$

$$\frac{W^2}{2} = g(z_s - z) - \frac{p - p_0}{\rho} = gR(1 - \cos \theta) - \frac{p - p_0}{\rho}$$

Druck im Inneren der Blase konstant, da  $\mu_v \ll \mu$ ,  $\rho_v \ll \rho$  gilt, und die Oberflächenspannung vernachlässigbar ist,  $We \gg 1$ . Folglich

$$p = p_0$$

auf Blasenoberfläche.

Es gilt daher

$$\frac{W^2}{2} = gR(1 - \cos \theta)$$

Unter Verwendung von  $W = \frac{3}{2}U \sin \theta$  erhalten wir:

$$gR(1 - \cos \theta) = \frac{9}{8}U^2 \sin^2 \theta$$

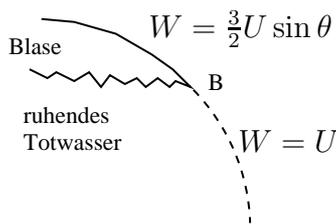
$$U^2 = \frac{8gR}{9} \underbrace{\frac{1 - \cos \theta}{\sin^2 \theta}}_{\sim \frac{4}{3}} \sim \frac{4}{9}gR(1 + O(\vartheta^2))$$

Fuer kleine Werte von  
 $\theta$  nahezu konstant

$$U \sim \frac{2}{3}\sqrt{gR}$$

R oft nicht bekannt, aber Volumen bekannt, R kann dann aus  $\theta_B$  bestimmt werden.

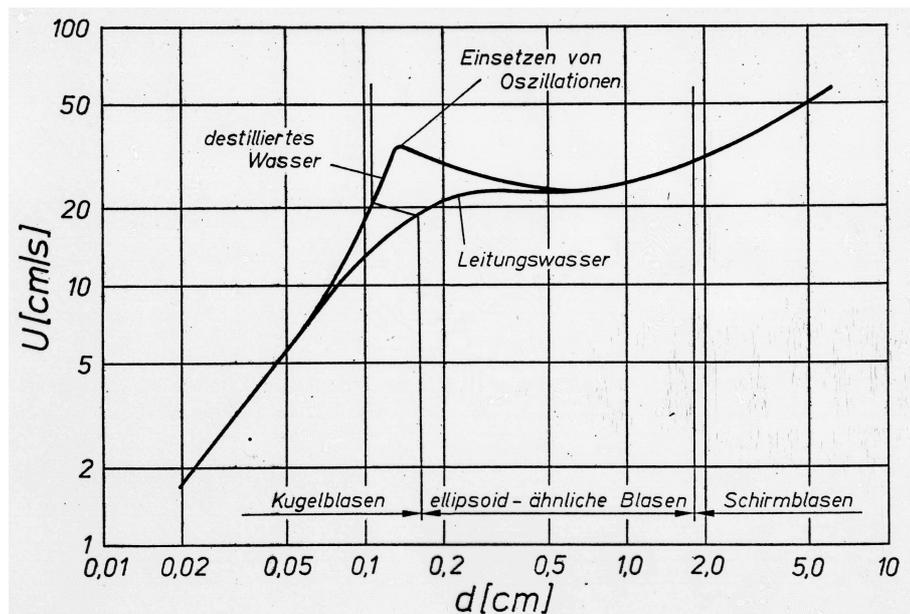
Abschätzung von  $\theta_B$ :

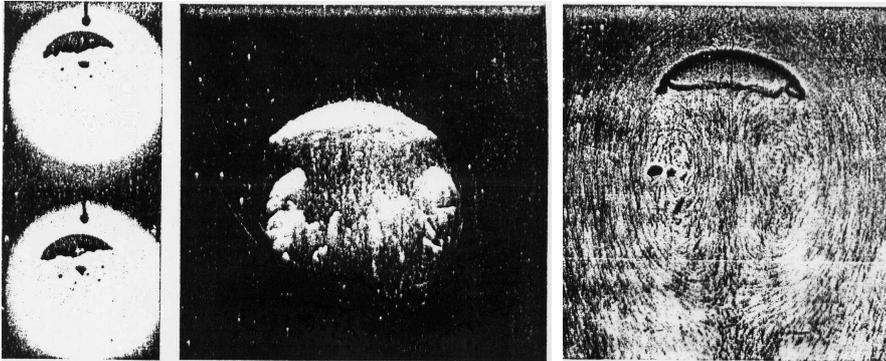


- Annahme: Totwasser ruhend  $\Rightarrow$  Druck im Totwasser = hydrostatischer Druck,
- Im Unendlichen hydrost. Druck bei Geschwindigkeit  $U$
- An Totwassergrenze daher  $U = W$
- Bei  $B$  gilt daher:

$$U = \frac{3}{2} U \sin \theta_B \Rightarrow \theta_B \approx \arcsin \frac{2}{3} = 41,8^\circ$$

Theorie nicht ganz konsistent, weil  $W = U$  an Totwassergrenze Abweichung von Kugelgestalt des Totwassers erfordert.





Große Gasblasen in Flüssigkeit. Links: Luftblase in Nitrobenzin  $R \approx 3$  cm,  $U \approx 37$  cm/s, Mitte: Luftblase mit Nachlauf in Wasser  $R \approx 5$  cm,  $U \approx 45$  cm/s, Rechts: "Zwei-dimensionale" Luftblase zwischen zwei parallelen Platten  $d = 6$  mm,  $R \approx 7$  cm,  $U \approx 40$  cm/s, Strömungsvisualisierung mit festen Tracerpartikeln, Nachlauf und Blase nehmen Links bzw. Mitte etwa das Volumen einer Kugel, Rechts das eines Kreises ein (aus: Batchelor).

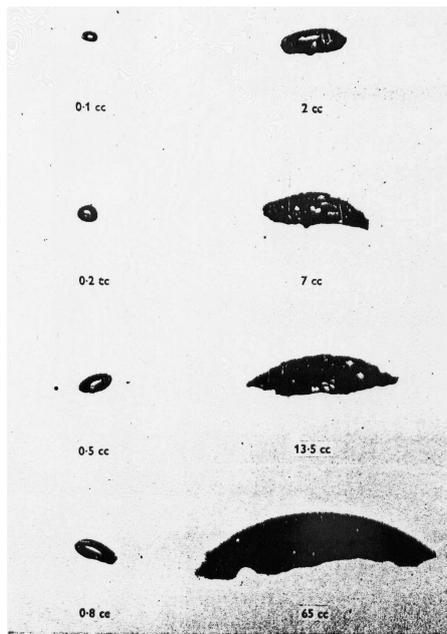


Figure 6.11.1. Air bubbles rising through water. The volume of the bubble is shown beneath each photograph. (From Jones 1965.)

6.1 Bewegung von Tropfen und Blasen

375

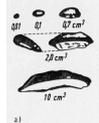
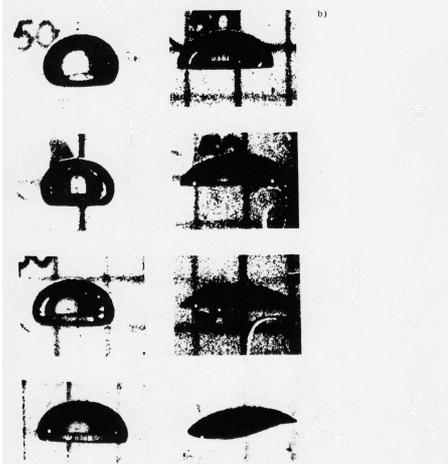


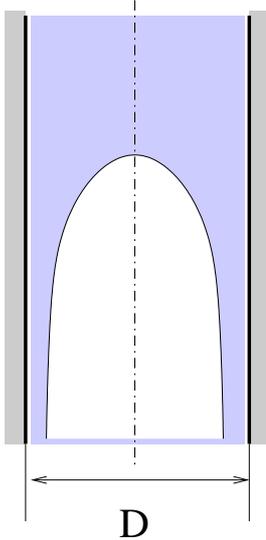
Bild 6.3 Verschiedene Formen aufsteigender Gasblasen

a) In Wasser aufsteigende Luftblasen verschiedener Rauminhalte nach W Müller (ca. 1/2 natürlicher Größe; den angegebenen Rauminhalten entsprechen die Kugeldurchmesser 0,27; 0,57; 1,1; 1,6; 2,7 cm).  
 b) Eine Blase mit 9,3 cm³ Rauminhalt (äquivalenter Kugeldurchmesser 2,6 cm) in Flüssigkeiten mit unterschiedlichen Zähigkeiten nach [6.22].  
 $Mo = 848; 266; 41.1; 5.51; 1.31; 0.103; 4.63 \cdot 10^{-2}; 8.60 \cdot 10^{-4}$ . Entsprechende Reynolds-Zahlen  $Re = 2.47; 3.57; 7.16; 13.3; 20.4; 42.2; 94.0; 151$ .  $Eu = 114 - 116$  in allen Fällen.

$$(Eu = \rho g d^2 / \sigma)$$



## Große Gasblasen in einem Rohr "slug flow"



Wenn  $Re = \frac{UD}{\nu} \gg 1$  und  $We = \frac{\rho U^2 D}{\sigma} \gg 1$   
folgt aus Dimensionsgründen

$$U = k_R \sqrt{gD}$$

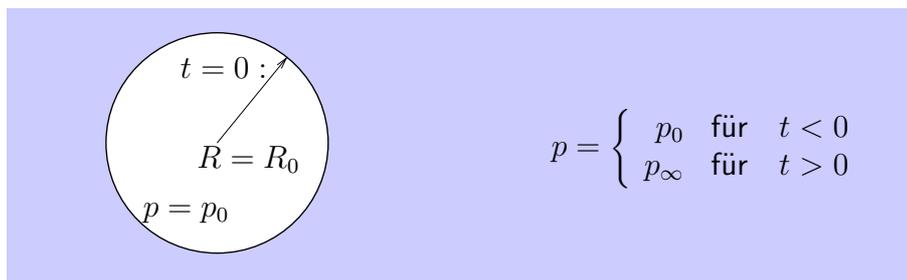
Experiment und Theorie (Dumitrescu) ergeben  
 $k_R \approx 0,35$

	kugelförmige		Schirm- blasen	Propfen- blasen
	feste Partikel	Tropfen   Blasen ohne adsorbierten Film		
$Re \ll 1$	Stokes $c_w = \frac{24}{Re}$	Rybczynski- Hadamard	-	-
$Re \gg 1$		$c_w = \frac{48}{Re}$	Davis & Taylor	Dumitrescu
$U$ aus	$g\pi \frac{d^3}{6}  \rho_V - \rho  = c_w(Re) \frac{\rho U^2 \pi d^2}{2 \cdot 4}$		$U = \frac{2}{3} \sqrt{gR}$	$U = 0.35 \sqrt{gD}$

## 4.6 Kavitationsblasen

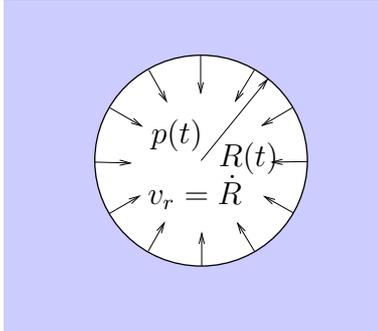
- Wenn in Flüssigkeits- (Wasser-) Strömungen der Dampfdruck  $p_D$  unterschritten wird (bei hohen Geschwindigkeiten) bilden sich Dampfblasen (oder Gasblasen von in Flüssigkeit gelösten Gasen).
- In Gebieten geringerer Stömungsgeschwindigkeiten steigt (eventuell) der Druck über den Dampfdruck,
  - ⇒ der Dampf in den Blasen kondensiert,
  - ⇒ Hohlräume stürzen zusammen,
  - ⇒ Lärm
  - ⇒ Beschädigungen (Korrosion bzw. Erosion) der Wände)

## Zusammenstürzen einer kugelförmigen Blase



Wir betrachten eine Gasblase (ideales Gas mit konstanten spez. Wärmekapazitäten, Radius  $R_0$ ) in einer ruhenden inkompressiblen Flüssigkeit bei Druck  $p_0$ . Bei  $t = 0$  wird der Druck plötzlich auf  $p_\infty$  erhöht. Wie groß ist der in der Blase auftretende Maximaldruck?

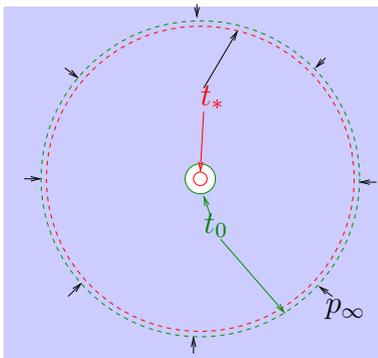
## Zusammenstürzen einer kugelförmigen Blase



- In Flüssigkeit instationäre Potentialströmung
- $v_r = \dot{R}(t)$  für  $r = R$ ,
- $v_r \rightarrow 0$  für  $r \rightarrow \infty$

- Lösung: Quell- (Senken)strömung mit Potential  $\phi = -\frac{Q(t)}{4\pi r}$
- Quellstärke  $Q(t) = 4\pi r^2 v_r = 4\pi R^2 \dot{R}$
- Geschwindigkeitsverteilung  $\vec{v} = \text{grad}\phi = \frac{R^2 \dot{R}}{r^2}$

- kinetische Energie der Flüssigkeit 114



$$\begin{aligned}
 E_{kin} &= \int_{R(t)}^{R_\infty(t)} \rho \frac{v_r^2}{2} 4\pi r^2 dr = \\
 &= 2\pi\rho \int_{R(t)}^{R_\infty(t)} \left( \frac{R^2 \dot{R}}{r^2} \right)^2 r^2 dr = \\
 &= 2\pi\rho R^3 \dot{R}^2 \left( 1 - \frac{R}{R_\infty} \right) \\
 &\sim 2\pi\rho R^3 \dot{R}^2
 \end{aligned}$$

- Volumenänderungsarbeit pro Zeiteinheit

$$\dot{W} = -4\pi R_\infty^2 v_r p_\infty = -4\pi p_\infty R^2 \dot{R}$$

- Innere Energie der Gasblase (id. Gas,  $c_v = \text{const}$ , isentrope ZÄ)

$$U = m_G c_v T = m_G c_v T_0 \left( \frac{R_0}{R} \right)^{3(\kappa-1)} = \frac{4\pi R_0^3}{3(\kappa-1)} p_0 \left( \frac{R_0}{R} \right)^{3(\kappa-1)}$$

## Energiebilanz

- Änderung der inneren Energie der Flüssigkeit vernachlässigbar, da inkompressibel,

- $$\frac{d}{dt} (E_{kin} + U_{Gas}) = \dot{W}$$

- Integration der Energiebilanz ergibt

$$U(t) - U_0 + E_{kin}(t) = \int_0^t \dot{W} dt$$

- $$\frac{4\pi R_0^3}{3} \frac{1}{\kappa - 1} p_0 \left[ \left( \frac{R_0}{R} \right)^{3(\kappa-1)} \right] + 2\pi\rho R^3 \dot{R}^2 = \frac{4\pi}{3} p_\infty (R_0^3 - R^3)$$

- Wir haben somit eine gewöhnliche Differentialglg. für  $R(t)$  erhalten
- Der Maximaldruck  $p^*$  in der Gasblase wird erreicht, falls der Blasenradius minimal wird  $\dot{R} = 0$ . Der minimale Blasenradius  $R_*$  kann daher aus

$$\left[ \left( \frac{R_0}{R_*} \right)^{3(\kappa-1)} - 1 \right] = (\kappa - 1) \frac{p_\infty}{p_0} \left[ 1 - \left( \frac{R_*}{R_0} \right)^3 \right]$$

berechnet werden.

- Wegen der isentropen ZÄ in der Gasblase gilt

$$pR^{3\kappa} = p_0 R_0^{3\kappa}$$

$$\left[ \left( \frac{p_*}{p_0} \right)^{1-1/\kappa} - 1 \right] = (\kappa - 1) \frac{p_\infty}{p_0} \left[ 1 - \left( \frac{p_0}{p_*} \right)^{1/\kappa} \right]$$

- Näherungsweise Lösung unter der Ann.  $p_0 \ll p_\infty$ :

$$\frac{p_*}{p_0} = (\kappa - 1)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \left( \frac{p_\infty}{p_0} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$$

bzw.

$$\frac{p_*}{p_\infty} = (\kappa - 1)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \left( \frac{p_\infty}{p_0} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}}$$

- Beispiel:  $\kappa = 1,4$ ,  $p_\infty/p_0 = 100 \Rightarrow p_*/p_\infty = 4050$  In der Gasblase treten sehr hohe Drücke auf.
- Ursache für Schäden:  
Konzentrische Strömung bei Annäherung an  $R^*$  instabil:  $\Rightarrow$  Flüssigkeitsstrahl  $\Rightarrow$  Erosion Geschwindigkeiten in der GO 100-200 m/s!

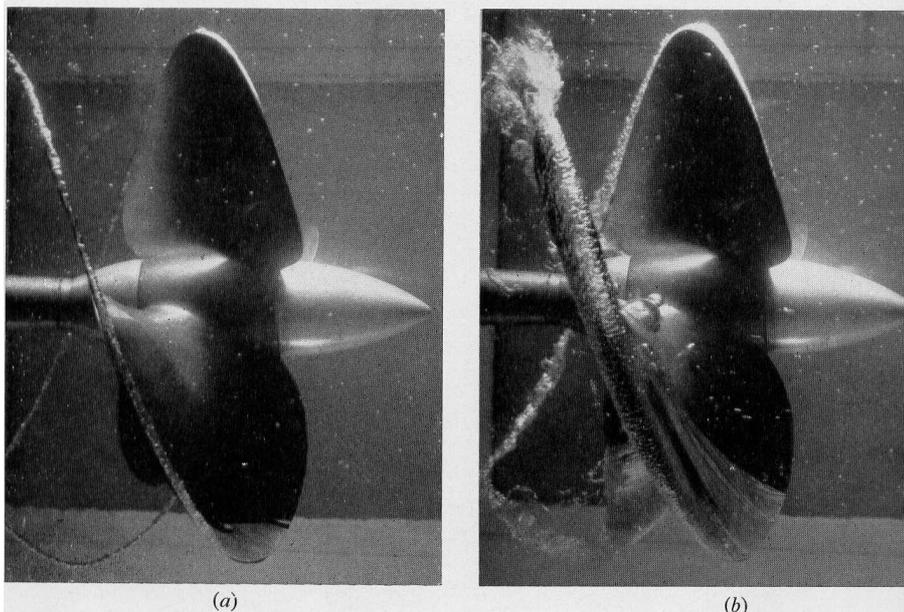


Figure 6.12.2. Cavitation due to a propeller rotating in a stream of water flowing from right to left. In (a) there is a cavity at the centre of the 'tip vortex' from each of the three blades; in (b), at higher rotation and stream speeds, there is also a cavity on the suction side of each blade of sufficiently large volume to affect the pressure distribution on the blades.

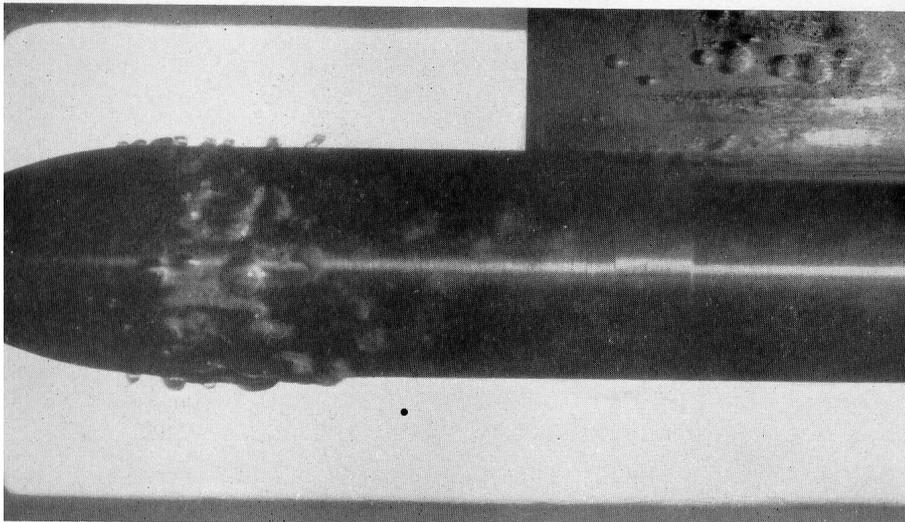


Figure 6.12.1. Formation of cavities in flow (from left to right) past an axisymmetric slender body in a water tunnel at  $K = 0.26$ . (From Knapp 1952.)

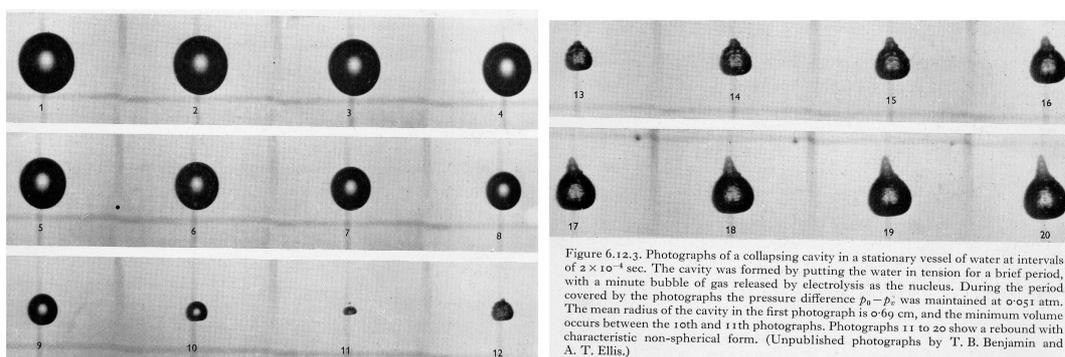


Figure 6.12.3. Photographs of a collapsing cavity in a stationary vessel of water at intervals of  $2 \times 10^{-4}$  sec. The cavity was formed by putting the water in tension for a brief period, with a minute bubble of gas released by electrolysis as the nucleus. During the period covered by the photographs the pressure difference  $p_0 - p_c$  was maintained at  $0.031$  atm. The mean radius of the cavity in the first photograph is  $0.69$  cm, and the minimum volume occurs between the 10th and 11th photographs. Photographs 11 to 20 show a rebound with characteristic non-spherical form. (Unpublished photographs by T. B. Benjamin and A. T. Ellis.)

Kollabieren einer Blase und anschließendes Wiederausdehnen, allerdings Abweichung von der Kugelgestalt [Batchelor].

## 4.7 Zerfall von Flüssigkeitsstrahlen in Gasen

- Beobachtungen: 3 verschiedene Arten des Strahlzerfalls (abh. von Strömungsgeschwindigkeit)

I Zertropfen

II Zerwellen

III Zerstäuben

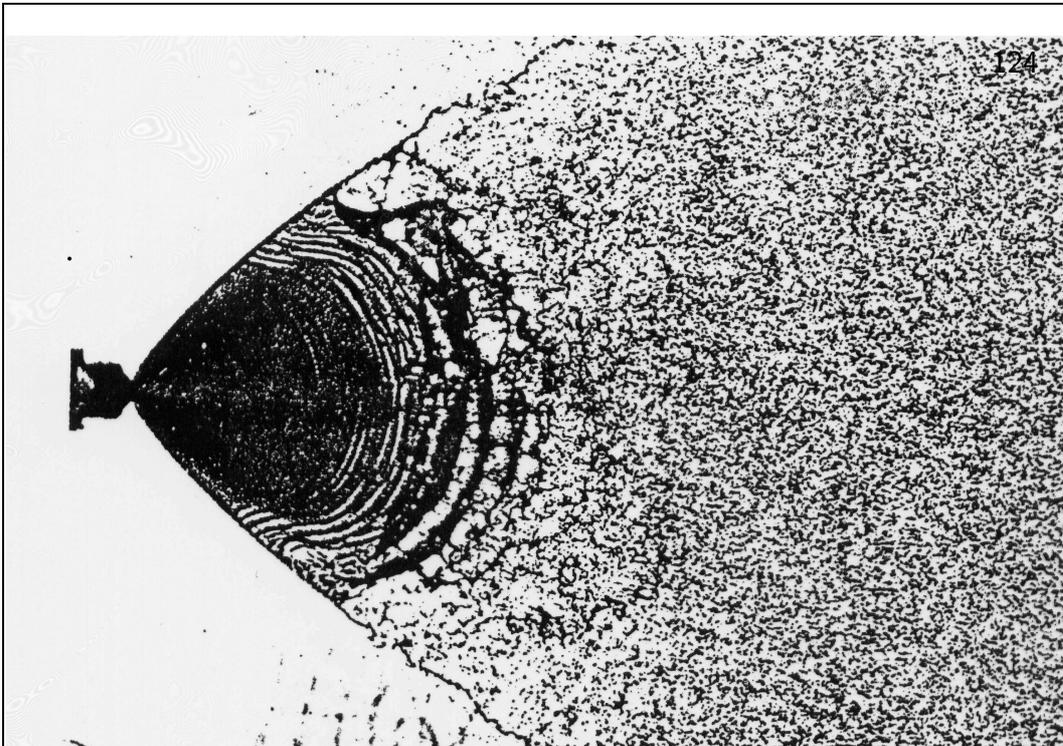
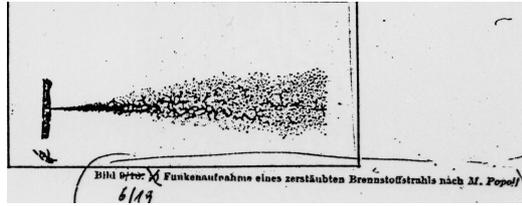
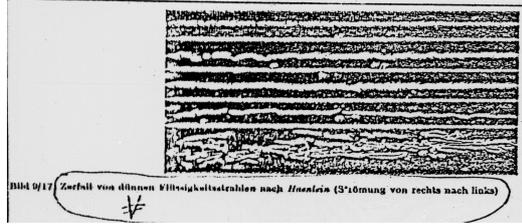
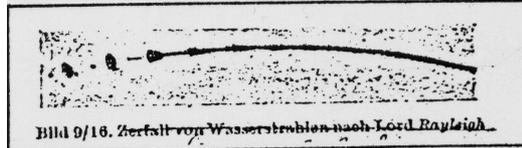
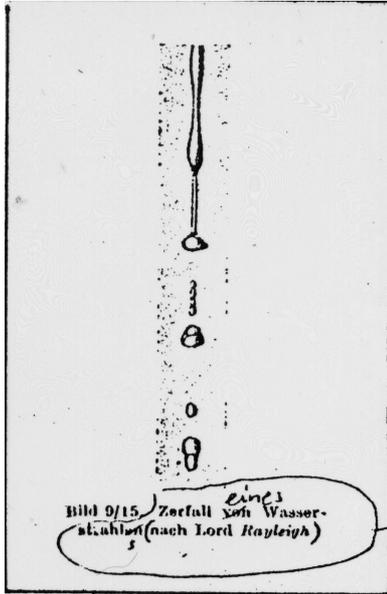
Reihenfolge mit zunehmender Strömungsgeschw.

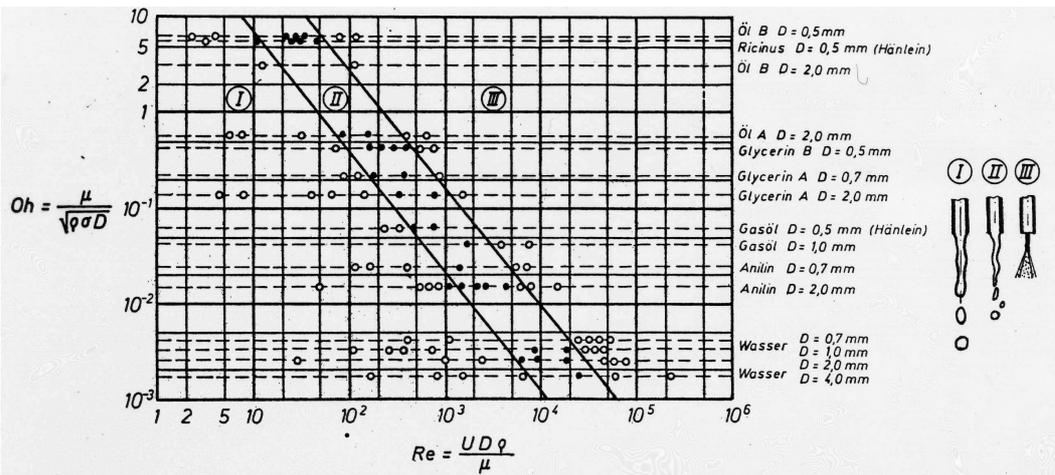
- Dimensionsanalyse: Parameter  $D, U, \rho, \mu, \sigma$ :
- Daher zwei unabhängige Kennzahlen.

$$\text{Re} = \frac{UD\rho}{\mu}, \quad \text{Oh} = \frac{\mu}{\sqrt{\rho\sigma D}}$$

Ohnesorge-Zahl, (alternativ  $\text{We} = \frac{\rho U^2 D}{\sigma} = \text{Oh}^2 \text{Re}^2$ )

- Bereichsgrenzen zwischen I, II, und III durch  $\text{Oh} = f_{\text{I,II}}(\text{Re})$  bzw.  $\text{Re} = f_{\text{II,III}}(\text{Oh})$  darstellbar, Ohnesorge-Diagramm





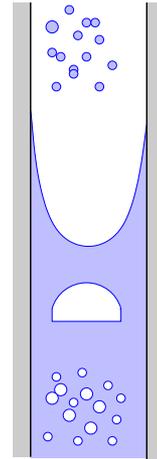
## 5 Zweiphasenströmungen

- Phase: Thermodynamisch homogener Teilbereich eines heterogenen Systems. (Gasförmig, flüssig, fest)
- Zweiphasenströmungen "Gemisch" von 2 Phasen strömt. (Gasf.-fest, gasf.-flüssig, flüssig-fest, aber auch flüssig-flüssig (unterschiedliche Flüssigkeiten))
- Beispiele: Nebel, Rauch, Wolken, Schnee, Sandstürme, siedendes Wasser, Blutströmungen, ...  
Verbrennungsvorgänge in Motoren, Brennkammern, Feuerlöscher, ...  
viele Verfahrenstechnische Prozesse,

In dieser LVA: Beschränkung auf eindimensionale Strömungen

## 5.1 Strömungsformen

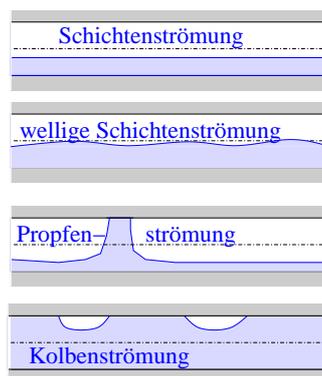
- Morphologische Beschreibung der Strömung (Anordnung und Verteilung der Phasen)
- Grobe Einteilung der Strömungsform bei vertikaler Rohrströmung
  - Tropfenströmung
  - Ring- oder Filmströmung
  - Propfenströmung
  - Blasenströmung



Bei vertikaler Strömung brauchen die beiden Phasen nicht notwendigerweise in dieselbe Richtung strömen. Gleich- bzw. Gegenstrom!

- Bei horizontaler Strömung zusätzlich

- Schichtenströmung (mit bzw. ohne Wellen)
- Kolbenströmung
- Schwallströmung



- Strömungsform abhängig von vielen Parametern. Diagramme für Strömungsbereiche oft nicht in dimensionsloser Form, daher nur bedingt verwendbar.

## 5.2 Homogene Gleichgewichtsströmungen

129

- Geschwindigkeits- und Temperaturunterschiede zwischen den Phasen
- $\Rightarrow$  Kräfte bzw. Wärmeübergänge (Wechselwirkung) bewirken Reduktion des Temp.- bzw. Geschwindigkeitsunterschiedes
- Oft WW so stark (Bsp. eine Phase in der anderen fein dispergiert), dass an jeder Stelle zu jedem Zeitpunkt
  - a) die Geschwindigkeiten beider Phasen (homogene Zweiphasenstr.)
  - b) die Temperaturen beider Phasen (thermisches GG.)übereinstimmen.
- $\Rightarrow$  homogene Gleichgewichtsströmung, kann wie Einphasenströmung behandelt werden.

130

### 5.2.1 Zustandsgrößen des Gemisches

Phase	Dichte	Volumenanteil	Massenanteil
1	$\rho_1$	$1 - \alpha$	$1 - x$
2	$\rho_2$	$\alpha = V_2/V$	$x = m_2/m$

- a) homogene Strömung  $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{v}$
- b) thermisches GG.  $T_1 = T_2 = T$
- c) zusätzlich  $p_1 = p_2 = p$

Ann c) berechtigt, falls bei 2 fluiden Phasen Oberflächenspannung keine Rolle spielt.

## Zustandsgrößen des Gemisches ohne Index

$$m = V\rho = V_1\rho_1 + V_2\rho_2 \quad \Rightarrow \quad \rho = (1 - \alpha)\rho_1 + \alpha\rho_2$$

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1 - x}{\rho_1} + \frac{x}{\rho_2}$$

$$m_1 = (1 - x)\rho V = \rho_1(1 - \alpha)V \quad \Rightarrow \quad (1 - x)\rho = (1 - \alpha)\rho_1$$

$$m_2 = x\rho V = \rho_2\alpha V \quad \Rightarrow \quad x\rho = \alpha\rho_2$$

spezifische (auf Masseneinheit bezogene) Größen werden additiv aus Massenanteilen zusammengesetzt

$$e = (1 - x)e_1 + xe_2$$

$$h = (1 - x)h_1 + xh_2$$

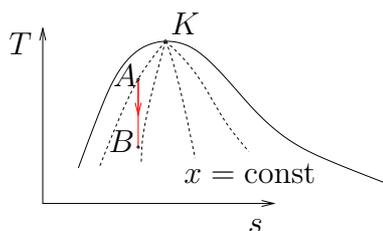
$$c_p = (1 - x)c_{p,1} + xc_{p,2}$$

$$s = (1 - x)s_1 + xs_2$$

Bestimmung von  $x$ 

- Ohne Phasenumwandlung (Bsp. Wasser/Luft)  
Massenerhaltung in homogener Strömung  $\Rightarrow x = \text{const}$  (i.a.  $\alpha \neq \text{const}$ )
- Mit Phasenumwandlungen (z.B. Nassdampf)  
lokales thermodynamisches GG (LTG) vorausgesetzt

$$x = x(p, \rho), \quad \text{oder} \quad x = x(p, s)$$

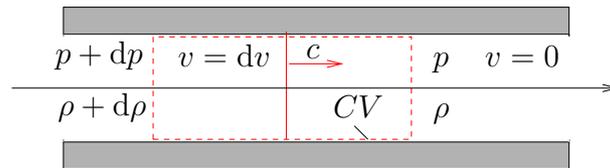


$A \rightarrow B$  isentrope Expansion (z.B. in Düse), je nach Anfangszustand nimmt  $x$  zu oder ab.

5.2.2 Schallgeschwindigkeit  
laufende Schallwelle in ruhendem Medium

133

Massen- und Impuls-  
bilanz für  
Kontrollvolumen CV



$$\text{KG. } \frac{dm}{dt} = A((\rho + d\rho)c - \rho c) = A((\rho + d\rho)dv)$$

$$c d\rho = \rho dv$$

$$\text{IG. } \frac{dI}{dt} = A((\rho + d\rho)dv c) = A((\rho + d\rho)(dv)^2 + (p + dp) - p)$$

$$\rho c dv = dp$$

$$\text{Schallgeschwindigkeit: (KG)+(IG)} \Rightarrow \boxed{c^2 = \frac{dp}{d\rho}}$$

- Schallgeschwindigkeit von der Art der Zustandsänderung<sub>134</sub> abhängig
- homogene Strömung mit Phasenumwandlung im LTG ohne Reibung und andere irreversible Prozesse:

$$c^2 = \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial \rho} \right)_s = \bar{c}_s$$

$\bar{c}$ ... Gleichgewichtsschallgeschwindigkeit,  
 $p = \bar{p}(\rho, s)$  Zustandsglg. für thermodyn. Gleichgewicht

- homogene Strömung ohne Phasenumwandlung ( $x = \text{const}$ )

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1-x}{\rho_1} + \frac{x}{\rho_2}$$

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{dp} = \frac{1-x}{\rho_1^2} \frac{d\rho_1}{dp} + \frac{x}{\rho_2^2} \frac{d\rho_2}{dp}$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{c_x^{-2}} \qquad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{c_1^{-2}} \qquad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{c_2^{-2}}$

$$\frac{1}{\rho^2 c_x^2} = \frac{1-x}{\rho_1^2 c_1^2} + \frac{x}{\rho_2^2 c_2^2}$$

$c_x$  Schallgeschwindigkeit der homogenen Zweiphasenströmung ohne Phasenumwandlung

Vereinfachung für Flüssigkeits (1) - Gas (2)-Gemische

$$\rho = (1 - \alpha)\rho_1 + \alpha\rho_2 \sim (1 - \alpha)\rho_1 + ..$$

$$\frac{1}{(1 - \alpha)\rho_1 c_x^2} = \frac{\alpha}{\rho_2 c_2^2} + \dots$$

$$c_x^2 = \underbrace{\frac{\rho_2}{\rho_1}}_{\ll 1} \frac{c_2^2}{\alpha(1 - \alpha)} + \dots$$

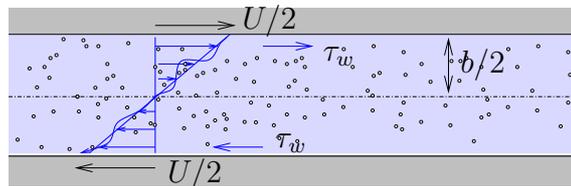
- $c_x \ll c_2$  (außer  $\alpha \rightarrow 0$  oder  $\alpha \rightarrow 1$ )
- homogene Strömung vorausgesetzt, gut erfüllt bei Blasen (leicht), problematisch bei Tropfen (träge  $\Rightarrow$  Relativgeschwindigkeit  $\Rightarrow$  Schallwellen wie in Gas mit Dämpfung)
- $\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_?$  welche Zustandsänderung?
- falls homogenes Modell adäquat: lokales thermisches GG  $T = T_1 = T_2$  Da sich außerdem Temp. der flüssigen Phase kaum ändert:

$$T = T_1 = T_2 = \text{const}$$

Für ideales Gas (2)

$$c_{2T}^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T = RT = \frac{p}{\rho_2}$$

$$c_{xT}^2 = \frac{p}{\rho_1 \alpha (1 - \alpha)}$$



- Feste Teilchen bzw. Blasen in Flüssigkeit bewirken Störung des linearen Geschwindigkeitsprofils
- Lokale Abweichungen vom linearen Geschwindigkeitsprofil bzw. von konstanter Deformationsgeschw. (Scherrate) vom Wert für ein reines Fluid  $\dot{\gamma}_1 = \frac{du}{dy} = \frac{U}{b}$
- reine Newtonsche Fl.: Wandschubspannung:  $\tau_{w,1} = \mu_1 \dot{\gamma}_1$ ,  
Dissipation pro Volumen:  $D_1 = \mu_1 \dot{\gamma}_1^2$

- Suspension: Definiere scheinbare Viskosität durch

$$\tau_{w,S} = \mu_S \dot{\gamma}_1, \quad \text{Dissipation} \quad D_S = \mu_S \dot{\gamma}_1^2$$

- $\dot{\gamma}_s$  lokale Deformationsgeschwindigkeit (Scherrate) in der Suspension.
- Definiere Mittelwert des Quadrats der Scherrate  $\overline{\dot{\gamma}_s^2}$  für Suspension:

$$D_s = \mu_1 \overline{\dot{\gamma}_s^2}$$

$$\overline{\dot{\gamma}_s^2} = \frac{D_s}{\mu_1} = \frac{\mu_s}{\mu_1} \dot{\gamma}_1^2 = \frac{\tau_{w,s}}{\tau_{w,1}} \dot{\gamma}_1^2$$

- Daher:  $D_s - D_1 = (\mu_s - \mu_1) \dot{\gamma}_1^2 = \mu_1 (\overline{\dot{\gamma}_s^2} - \dot{\gamma}_1^2)$

- Abschätzung:  $\overline{\dot{\gamma}_s^2} \neq \dot{\gamma}_1^2$  nur in der Nähe von Blasen bzw. festen Teilchen, also in Gebieten deren Volumen von Größenordnung der Teilchen bzw. Blasen ist.

$$\overline{\dot{\gamma}_s^2} - \dot{\gamma}_1^2 \sim \alpha \dot{\gamma}_1^2$$

- Somit  $\mu_s - \mu_1 \sim \alpha \mu_1$

$$\frac{\mu_s}{\mu_1} = 1 + C\alpha$$

Genauere Rechnung (Einstein mit Rechenfehler) für  $\alpha \ll 1$

$\begin{aligned} \mu_s &= \mu_1 \left(1 + \frac{5}{2}\alpha\right) && \text{feste Kugeln} \\ \mu_s &= \mu_1 (1 + \alpha) && \text{kugelförmige Gasblasen} \end{aligned}$
--

- Für größere Konzentrationen: Batchelor JFM 52 (1972), 245-268.
- Erhöhung der scheinbaren Zähigkeit auch für Blasen (obwohl in Gasblase nahezu verschwindende Zähigkeit herrscht!)
- Lineares Geschwindigkeitsprofil minimiert Dissipation unter den Nebenbedingungen  $u(-b/2) = -U/2$ ,  $u(b/2) = U/2$ .

$$F \left( y, u, \frac{du}{dy} \right) = \mu \int_{-b/2}^{b/2} \left( \frac{du}{dy} \right)^2 dy \rightarrow \text{Minimum}$$

Eulersche Differentialglg. für Variationsproblem

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = 0$$

mit der Lösung  $u/U = y/b$ .

### 5.3 Eindimensionale homogene Strömung

#### Voraussetzungen

- stationäre Strömung
- Flüssigkeites-Gas-Gemisch:  
Phase 1: inkompressible Flüssigkeit,  
2 ideales Gas mit konst. spez. Wärmekapazitäten
- lokal: thermisches Gleichgew.  $T_1 = T_2 = T$
- Strömung ohne Energiezufuhr (keine Wärmezu- oder abfuhr, keine Arbeiten an Fluid): Es gilt (siehe Thermodynamik):

$$\frac{\vec{v}^2}{2} + h = \text{const}$$

#### Bedingungen für isotherme Strömung $|\vec{v}| \ll c_2$

#### Begründung:

- $h = c_p T$ , mit  $c_p = (1 - x)c_{p,1} + xc_{p,2}$ . Für die meisten Gas/Flüssigkeitgemische ist  $c_{p,1}$  von der gleichen Größenordnung wie  $c_{p,2}$   
Bsp.: Wasser  $c_{p,W} \sim 4.2 \text{ kJ/kgK}$ , Luft  $c_{p,L} \sim 1.0 \text{ kJ/kgK}$
- $c_{2,T}^2 = p/\rho_2 = (c_{p,2} - c_{v,2})T = c_{p,2} \frac{\kappa - 1}{\kappa} T$
- $h = \frac{c_p}{c_{p,2}} c_{p,2} T = \frac{c_p}{c_{p,2}} \frac{\kappa - 1}{\kappa} c_{2,T}^2 \sim c_{2,T}^2$
- Falls  $v \ll c_2$  sind die Temperaturänderungen vernachlässigbar: isotherme Strömung
- Aus  $v \ll c_2$  folgt **nicht** kleine Machzahl, da  $M = v/c_x$  bzw.  $c_x x \ll c_2$  ausser  $\alpha \rightarrow 0$  oder  $\alpha \rightarrow 1$ .

Zustandsgleichung:  $\rho = \rho(p)$

143

$$\left. \begin{aligned} (1-x)\rho &= (1-\alpha)\rho_1 \\ x\rho &= \alpha\rho_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \rho_2 = \frac{x}{\alpha}\rho = \frac{1-\alpha}{\alpha} \underbrace{\frac{x}{1-x}\rho_1}_{const}$$

Aus  $p/\rho_2 = const$  und  $\frac{\rho_2\alpha}{1-\alpha} = const$  folgt

$$p \frac{\alpha}{1-\alpha} = p_R \frac{\alpha_R}{1-\alpha_R} = const$$

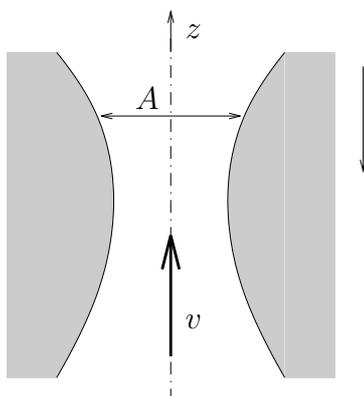
$$1-\alpha = \frac{1}{1 + \frac{\alpha_R - p_R}{1-\alpha_R} \frac{p}{p}}$$

$$\rho = (1-\alpha)\rho_1 + \underbrace{\alpha\rho_2}_{\text{vernachlässigbar klein}}$$

$$\rho = \rho_1 \frac{1}{1 + \frac{\alpha_R - p_R}{1-\alpha_R} \frac{p}{p}} \quad \text{Isotherme des Gemisches}$$

Grundgleichungen für die 1-dim. stationäre isotherme homogene Strömung

144



$$\text{KG} \quad \rho v A = \dot{m} = const$$

$$\text{BG} \quad \rho v \frac{dv}{dz} = -\frac{dp}{dz} - \rho g - F_w$$

$g$ ...Schwerebeschleunigung

$F_w$ ...Wandreibungskraft pro Volumen

Falls  $v = const$ ,  $g = 0$ :

$$F_w = -\frac{dp}{dz} = \frac{\lambda_R \rho v^2}{d \cdot 2}$$

$\lambda_R$ ...Rohrreibungsbeiwert,  $d = 4A/U$

$$v \frac{dv}{dz} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} - g - \frac{\lambda_R v^2}{d \cdot 2}$$

### 5.3.1 Reibungsfreie Düsenströmung

Wandreibung wird vernachlässigt, übrige Voraussetzungen wie bisher

$$v \frac{dv}{dz} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} - g$$

Isotherme einsetzen: (Ruhezustand "0" als Referenzzustand

$$v \frac{dv}{dz} = -\frac{1}{\rho_1} \left( 1 + \frac{\alpha_0 p_0}{1 - \alpha_0 p} \right) \frac{dp}{dz} - g$$

Integration von  $z_0$  bis  $z$  ergibt:

$$\frac{\rho_1 v^2}{2} + p + g \rho_1 (z - z_0) = p_0 \left( 1 + \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_0} \ln \frac{p_0}{p} \right)$$

Verallgemeinerte Bernoulligleichung für isotherme, homogene Zweiphasenströmung

Schwerkraft vernachlässigbar, wenn

$$|g \rho_1 (Z - z_0)| \ll \rho_1 \frac{v^2}{2}, \quad \text{oder} \quad |z - z_0| \ll \frac{v^2}{2g}$$

Bsp.: Wasser/Luft,  $v \sim 20 \text{ m/s}$  ( $\sim c_{xT}$  bei  $\alpha = \frac{1}{2}$ ):  $v^2/(2g) = 20 \text{ m}$ .

Im folgenden: Vernachlässigung der Schwerkraft:

$$v \frac{dv}{dz} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho} \frac{d\rho}{dz} = -\frac{1}{\rho} c_{xT}^2 \frac{d\rho}{dz}$$

Aus KG:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} + \frac{1}{v} \frac{dv}{dz} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dz} = 0$$

$$v \frac{dv}{dz} = c_{xT}^2 \left( \frac{1}{v} \frac{dv}{dz} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dz} \right)$$

$$\left(\frac{v^2}{c_{xT}^2} - 1\right) \frac{1}{v} \frac{dv}{dz} = \frac{1}{A} \frac{dA}{dz}$$

$$\boxed{(1 - M^2) \frac{1}{v} \frac{dv}{dz} = -\frac{1}{A} \frac{dA}{dz}}$$

$M = v/c_{xT}$ ....Machzahl für homogene isotherme Strömung

$$\boxed{\begin{array}{l} M < 1 \quad v \uparrow \quad \text{wenn } A \downarrow \\ M > 1 \quad v \uparrow \quad \text{wenn } A \uparrow \end{array}}$$

Um Überschall zu erzielen ist Lavaldüse erforderlich! Im engsten Querschnitt  $dA/dz = 0$  entweder  $dv/dz = 0$  (Maximum oder Minimum der Geschwindigkeit) oder  $M = 1$ .

Kritisches Druckverhältnis  $\frac{p^*}{p_0}$

\* kritischer Zustand  $v = v^* = c_{xT}$  für  $p = p^*$

$$\text{verallg. Bernoulliglg: } \frac{v^2}{2} = \frac{p_0}{\rho_1} \left(1 + \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_0} \ln \frac{p_0}{p} - \frac{p}{p_0}\right)$$

$$\text{Isotherme } \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} \left(1 + \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_0} \frac{p_0}{p}\right)$$

$$\frac{1}{\rho^2} d\rho = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_0} \frac{p_0}{\rho_1} \frac{1}{p^2} dp$$

$$c_{xT}^2 = \frac{dp}{d\rho} = \frac{1 - \alpha_0}{\alpha_0} \frac{\rho_1}{p_0} \left(\frac{p}{\rho}\right)^2 \underbrace{=}_a \frac{p_0}{\rho_1} \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_0} \left(\frac{1 - \alpha_0}{\alpha_0} \frac{p}{p_0} + 1\right)^2$$

$$v = c_{xT} \Rightarrow \boxed{\frac{1 - \alpha_0}{\alpha_0} \left(1 - \frac{p^*}{p_0}\right) - \ln \frac{p^*}{p_0} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1 - \alpha_0}{\alpha_0} \frac{p^*}{p_0}\right)^2}$$

a) Für  $1/\rho$  Isotherme einsetzen und entsprechend umformen

Maximale (kritische) Massenstromdichte

$$\begin{aligned} \frac{\rho^* v^*}{\rho_0 c_0} &= \frac{\rho^* c_{xT}^*}{\rho_0 c_0} = \\ &= \frac{1}{1 - \alpha_0} \frac{1}{1 + \frac{\alpha_0 p_0}{1 - \alpha_0 p}} (1 - \alpha_0) \frac{p}{p_0} \left( 1 + \frac{\alpha_0 p_0}{1 - \alpha_0 p} \right) = \frac{p}{p_0} \\ \rho^* c_{xT}^* &= \rho_0 c_0 \frac{p}{p_0} \end{aligned}$$

### 5.3.2 Rohrströmung mit Reibung

Voraussetzung: homogene isotherme Strömung, keine Schwerkraft, konstanter Querschnitt A

$$\text{Bewegungsgleichung} \quad \rho v^2 \frac{1}{v} \frac{dv}{dz} = -\frac{dp}{dz} - \frac{\lambda_R \rho v^2}{d} \frac{1}{2}$$

Aus Kontinuitätsgleichung  $\rho v = \text{const}$  folgt:

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dz} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp} \frac{dp}{dz} = -\frac{1}{\rho c_{xT}^2} \frac{dp}{dz}$$

$$(1 - M^2) \frac{dp}{dz} = -\frac{\lambda_R \rho v^2}{d} \frac{1}{2}, \quad M = \frac{v}{c_{xT}}$$

$M < 1$   $\frac{dp}{dz} < 0$ ; p fällt bis  $M = 1$  erreicht ist, dann Blockieren (choking).  
 $M > 1$   $\frac{dp}{dz} > 0$ ; p steigt bis  $M = 1$  erreicht ist, dann Blockieren.

Ges. Differentialgleichung für  $M$

$$\text{Es gilt } \dot{m} = \rho A v, \quad c_{xT}^2 = \underbrace{\frac{1 - \alpha_0}{\alpha_0}}_{\text{Abk. } = 1/a} \frac{\rho_1 p^2}{p_0 \rho^2} = \frac{\rho_1}{a} \left( \frac{p}{p_0} \right)^2 \frac{p_0 v^2 A^2}{\dot{m}^2}$$

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\dot{m}}{A} \sqrt{\frac{a}{\rho_1 p_0}} \frac{1}{M} \quad (\text{iii}), \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{p} = -\frac{dM}{M}$$

Anfangsbedingung:  $p = p_0$ :  $M_0 = \frac{\dot{m}}{A} \sqrt{\frac{a}{\rho_1 p_0}}$ , Zustand 0 noch nicht festgelegt, Ruhezustand oder bei Rohreinlauf möglich.

$$\frac{1 - M^2}{M} \frac{dM}{dz} = \frac{\lambda_R}{2d} \frac{\rho v^2}{p}$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho v^2}{p} &= v^2 \underbrace{\left( \frac{\rho}{p} \right)^2}_{(i)} \underbrace{\frac{p}{\rho}}_{(ii)} = \frac{1}{a} \frac{v^2}{c_{xT}^2} \frac{\rho_1 p}{p_0 \rho_1} \left( 1 + a \frac{p_0}{p} \right) = M^2 \left( 1 + \frac{1}{a} \underbrace{\frac{p}{p_0}}_{(iii)} \right) \\ &= M^2 \left( 1 + \underbrace{\frac{\dot{m}}{A \sqrt{a \rho_1 p_0}}}_{K^{-1}} \frac{1}{M} \right) \end{aligned}$$

- (i)  $(\rho/p)^2$ : Mittels Formel für Isotherme Schallgeschwindigkeit ausdrücken.
- (ii)  $1/\rho$  Mittels Zustandsgleichung für Isotherme ausdrücken.
- (iii)  $p/p_0$  aus Formel (iii) ausdrücken.

Es gilt  $K^{-1} = M_0/a$ ,

$$\frac{1 - M^2}{M} \frac{dM}{dz} = \frac{\lambda_R}{2d} M^2 \left( 1 + \frac{K^{-1}}{M} \right)$$

Annahme  $\lambda_R = \text{const}$ , setze  $\tilde{z} = \lambda_R \frac{z}{d}$ :

$$\frac{2(1 - M^2)}{M^3} \frac{dM}{d\tilde{z}} = 1 + \frac{K^{-1}}{M}$$

Integration der Bewegungsgleichung mit RB  $M = 1$  bei  $z = 0$ :

$$K \left( 1 - \frac{1}{M} \right) + (1 - K^2) \ln \frac{1 + K}{1 + KM} - K^2 \ln M = \frac{\lambda_R}{2d} z$$

mit  $K = \frac{A}{\dot{m}} \sqrt{a \rho_1 p_0} = \frac{a}{M_0}$ ,  $a = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_0}$ .

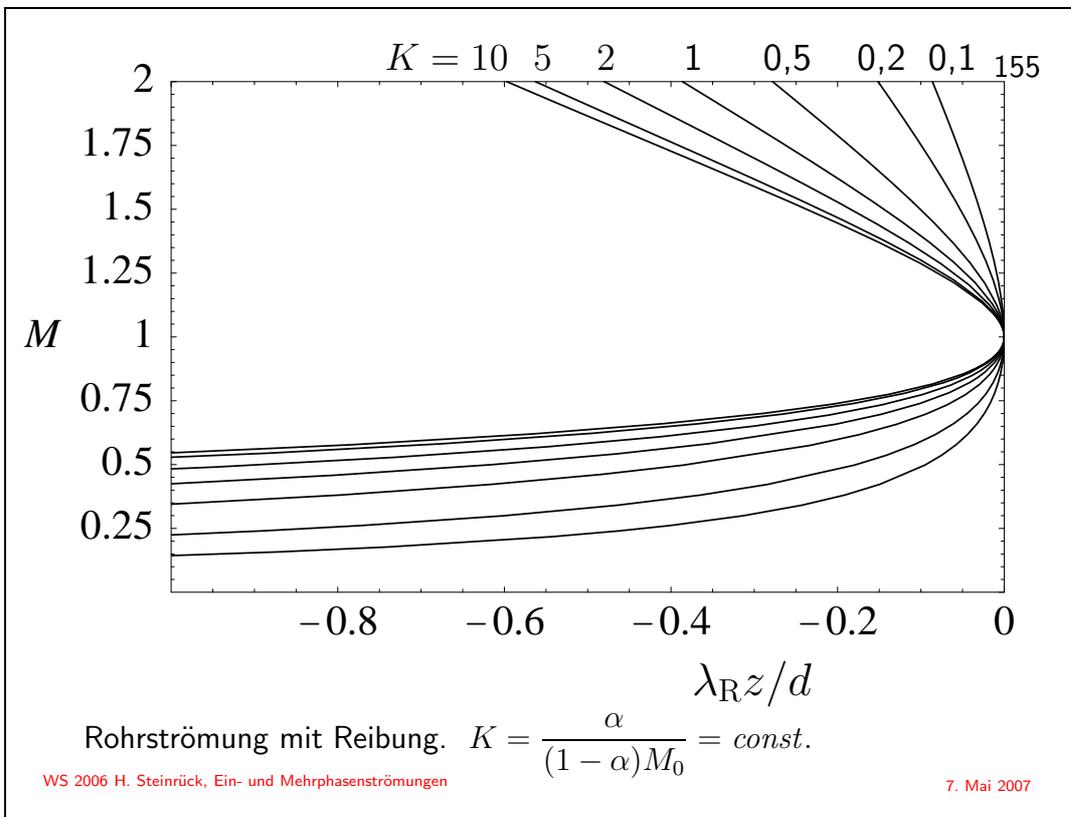
Wählen wir  $p_0$ ,  $\alpha_0$ ,  $M_0$  als Einlaufzustand der bei  $z = z_0$  herrscht, so gilt:

$$\frac{\lambda_R}{2d} z_0 = \frac{a}{M_0} \left( 1 - \frac{1}{M_0} - \frac{a}{M_0} \ln M_0 \right) + \left[ 1 - \left( \frac{a}{M_0} \right)^2 \right] \ln \frac{1 + \frac{a}{M_0}}{1 + a}$$

Durch kritische Rohrlänge  $|z_0|$  ist maximalzulässige Rohrlänge bei Vermeidung von Choking festgelegt.

Beachte statt  $M_0$  kann auch die Massenstromdichte  $\dot{m}/A$  als Parameter gewählt werden:  $M_0 = a/K = \sqrt{a/\rho_1 p_0} \dot{m}/A$ .

Beispiel:  $\alpha_0 = 1/2$ :  $a = 1$ ,  $M_0 = 0.5$ ,  $\lambda_R = 0.02$ ,  $\Rightarrow \tilde{z} = -0.888$ ,  $\Rightarrow |z/d| = 44.4$



### 5.3.3 Reibungsbeiwert $\lambda_R$

156

- Laminare Rohrströmung:  $\lambda_R = \frac{64}{Re}$  bei Einphasenströmungen mit

$$Re = \frac{\rho v d}{\mu}$$

bei Mehrphasenströmungen wird Resultat für Einphasenstr. übernommen mit:  $Re = \frac{\rho v d}{\mu_S}$  mit  $\mu_S$  scheinbare Viskosität.

- Turbulente Rohrströmung: verschiedene Möglichkeiten:
  - $\lambda_R = \lambda_R(Re)$  aus Einphasenstr. übernommen, mit  $\mu_S$  zur Berechnung der Reynoldszahl; log. Gesetz
  - $\lambda_R = const$ , ab etwa  $Re 10^5$   $\lambda_R \approx 0.02$ , oft hinreichend genau.
  - empirische Beziehungen (Korrelationen), z.B. Lockhart-Martinelli-Korrelation.

### 5.3.4 Widerstandsverringierung durch Additiva

- Toms-Effekt: Zusätze (Additiva) in sehr geringer Konzentration (ppm=parts per million) können den Widerstand der turbulenten Wasserströmung wesentlich reduzieren (bis zu 50%).
- Langkettige Moleküle (z.B. Polyethylenoxide,  $M \approx 10^6$ ) werden in Scherströmung gestreckt bis zu einer Länge, die Größenordnung der kleinsten Turbulenzwirbel entspricht: Verringerung der turbulenten Dissipation, bei kaum merkbarer Veränderung der Zähigkeit.
- Ebenso: Vergrößerung der Wurfweite von Freistrahlen (Feuerwehr!); Bei "Überfluteten" turbulenten Freistrahlen jedoch kein Effekt.
- Wesentlich für die Wirkung der Additiva ist daher die Wand bzw. die freie Oberfläche.

## 5.4 Zweiphasenströmungen mit Relativgeschwindigkeit

### 5.4.1 Allgemeine Beziehungen

- Bei Strömungen mit Relativgeschw. besonders wichtig: Strömungsform: Gleich- oder Gegenstrom.
- Bei bekannter Strömungsform ist die eindimensionale Strömung eindeutig bestimmt durch:

$$\begin{array}{ll}
 p, & \rho_1, \quad v_1, \quad (1 - \alpha), \text{ Phase 1} \\
 & \rho_2, \quad v_2, \quad \alpha, \text{ Phase 2}
 \end{array}$$

Als Druck wird der Mittelwert über die Querschnittsfläche genommen und in beiden Phasen als gleich angenommen.

- Grundgleichungen

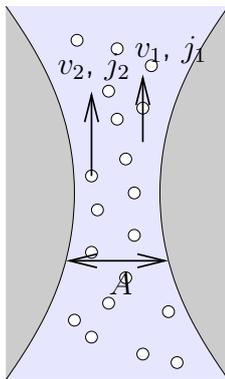
- je eine Kontinuitätsgleichung für jede Phase
- je eine Bewegungsgleichung für jede Phase (oder eine BWglg für Gemisch und eine BWglg. für Relativbewegung)
- je eine Dichte-Druck-Relation (Zustandsgleichung) für jede Phase. (z.B.  $\rho = \text{const}$ , oder isentrope bzw. isotherme ZÄ, oder Energiebilanz + Zustandsgleichung)

Die Bewegungsgleichungen (mit Ausnahme jener des Gemisches) enthalten Wechselwirkungskräfte zwischen den Phasen (Widerstand zufolge der Relativbewegung).

- Wenn eine Phase in der anderen verteilt ist (Dispersion), so wird auch die dispergierte Phase ("Teilchen, Tropfen- bzw. Blasen-schwarm") wie ein Kontinuum behandelt. Dabei bedeutet  $\rho$  immer die Dichte des Stoffes aus dem die Phase besteht, und nicht die Dichte des Schwarms! (Diese ist durch  $\alpha\rho_2$  gegeben, wenn Phase 2 in Phase 1 dispergiert ist.)
- Es werden einheitliche Geschwindigkeiten für jede Phase angenommen. Stellt bei Ringströmungen, Schichtenströmungen und anderen Strömungsformen mit getrennten Phasen lediglich die konsequente eindimensionale Näherung dar.
- Bei dispergierter Phase jedoch zusätzliche Voraussetzung nötig: Teilchengrößen dürfen nicht zu unterschiedlich sein, damit annähernd gleiche Wechselwirkungskräfte auch für annähernd gleiche Relativgeschwindigkeiten sorgen. Anderenfalls "Schlupf-term" in Gemisch-Bewegungsgleichung!

## 5.4.2 Driftfluss

Ziel: Näherungsweise Beschreibung, die wesentliche Effekte erfasst, ohne dass die (komplizierten) Grundgleichungen gelöst werden müssen.  
Zur Vereinfachung der Darstellung: Feste Teilchen in Flüssigkeit oder in Gas, keine Phasenumwandlungen.



Volumenstromdichte

$$j_1 = \frac{\dot{V}_1}{A} = (1 - \alpha)v_1$$

$$j_2 = \frac{\dot{V}_2}{A} = \alpha v_2$$

Volumenstromdichte des Gemisches

$$j = \frac{\dot{V}_1 + \dot{V}_2}{A} = j_1 + j_2 = (1 - \alpha)v_1 + \alpha v_2$$

Definition Driftfluss  $j_{12}$ : Volumenstromdichte der Phase relativ zu einer Querschnittsfläche, die sich mit der Volumenstromdichte  $j$  bewegt.

$$j_{12} = (1 - \alpha)(v_1 - j) = j_1 - (1 - \alpha)(j_1 + j_2) = \alpha j_1 - (1 - \alpha)j_2$$

$$j_{21} = \alpha(v_2 - j) = j_2 - \alpha(j_1 + j_2) = -\alpha j_1 + (1 - \alpha)j_2 = -j_{12}$$

Es gilt

$$j_1 = (1 - \alpha)j + j_{12}, \quad j_2 = \alpha j - j_{12}$$

$$\begin{aligned} j_{12} &= (1 - \alpha)(v_1 - j) = (1 - \alpha)(v_1 - (1 - \alpha)v_1 - \alpha v_2) = \\ &= \alpha(1 - \alpha) \underbrace{(v_1 - v_2)}_{v_{12}} = -j_{21} \end{aligned}$$

Achtung  $v_{12} = v_1 - v_2$ , aber  $j_{12} \neq j_1 - j_2$ .

Aufgabe: Wie hängt  $j_{12}$  bzw.  $v_{12}$  von  $\alpha$  ab?,

- hinreichend kleine Geschwindigkeiten: Vernachlässigung der Beschleunigungsterme und der konvektiven Terme
- Vernachlässigung der Wandreibung
- Betrachten nur Strömungen in einem senkrechten Rohr mit konstantem Querschnitt

Folgen

- A) Bewegungsgleichung für Gemisch: Druck = hydrostatische Druckverteilung (als ob Gemisch ruhen würde)
- B) Bewegungsgleichung für Relativbewegung: Gleichgewichtsbedingung für Kräfte, die an einem Teilchen angreifen.

$$\underbrace{g|\rho_2 - \rho|V_p}_{\text{Bem 1}} = c_{w\alpha} \underbrace{\frac{\rho_1 v_{12}^2}{2} A_p}_{\text{Bem 2}}.$$

Bem 1 Gewicht minus Auftrieb eines Teilchens im hydrostat. Druckgradienten der im Gemische herrscht.

Bem 2 Widerstand eines Teilchens im Schwarm mit Konzentration  $\alpha$ , (d.h. gegenseitige Beeinflussung der Teilchen).  $V_p$ ,  $A_p$  Volumen bzw. Querschnittsfläche eines Teilchens.

- Dimensionsanalyse

$$c_{w,\alpha} = c_{w,\alpha}(\text{Re}_{12}, \alpha), \quad \text{mit} \quad \text{Re}_{12} = \frac{|v_{12}|d_p}{\nu_1}, \quad d_p = \frac{3V_p}{2A_p}.$$

- weitere Vereinfachungen für  $\text{Re}_{12} \gg 1$  oder  $\text{Re}_{12} \ll 1$  möglich (meist auch bei  $\text{Re}_{12} \sim 1$  verwendet.)

- $Re_{12} \gg 1$  Ablösung unabhängig von  $Re_{12}$  (im unter- oder über-165 kritischen Bereich)  $\Rightarrow c_{w\alpha}$  unabhängig von  $Re_{12}$

$$c_{w\alpha} = c_{w0}\phi(\alpha) \quad \text{mit} \quad \phi(0) = 1,$$

$c_{w0}$  Widerstandsbeiwert für Einzelteilchen.

- $Re_{12} \ll 1$ : Widerstand proportional  $\mu_1$ , (schleichende Strömung, Stokesche Formel!)

$$c_{w\alpha} = c_{w0}\varphi(\alpha) = \frac{\text{const}}{Re_{12}}\varphi(\alpha), \quad \text{mit} \quad \varphi(0) = 1.$$

- Vergleich mit Einzelteilchen:

$$g|\rho_2 - \rho_1|V_p = c_{w0}\frac{\rho_1 U^2}{2}A_p,$$

mit  $U$  Sink- oder Steiggeschwindigkeit eines Einzelteilchens bei gleichförmiger Bewegung in ruhendem Fluid.

Es gilt:

$$|\rho_2 - \rho| = (1 - \alpha)|\rho_2 - \rho_1|.$$

Vergleich ergibt:

$$(1 - \alpha)c_{w0}\frac{\rho_1 U^2}{2}A_p = c_{w\alpha}\frac{\rho_1 v_{12}^2}{2}A_p,$$

$$j_{12} = \alpha(1 - \alpha)v_{12} = \alpha(1 - \alpha)^{3/2}\sqrt{\frac{c_{w0}}{c_{w\alpha}}}U.$$

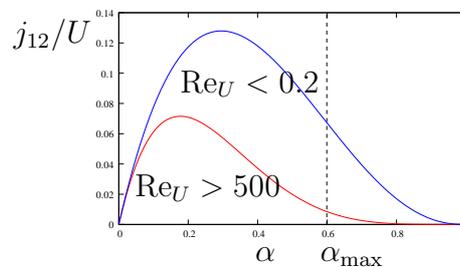
Driftfluss-Relation

$$j_{12} = U f(\alpha, \text{Re}_{12})$$

wobei  $f(\alpha) \rightarrow 0$  für  $\alpha \rightarrow 0$ .

Bsp.: Experimentell für feste Teilchen in Flüssigkeit (Richardson &amp; Zak):

$$f(\alpha; \text{Re}_U) = \alpha(1 - \alpha)^n, \quad n = \begin{cases} 4.65 & \text{Re}_U > 500 \\ 2.39 & \text{Re}_U < 0.2 \end{cases}$$

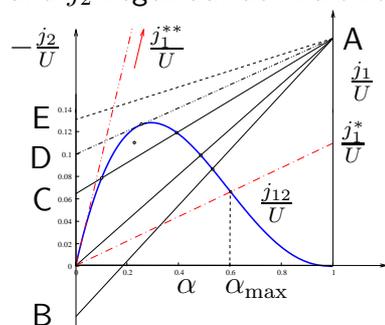
mit  $\text{Re}_U = \frac{Ud}{\nu_1}$ ,  $\alpha_{\max}$  Volumenanteil bei dichtester Kugelpackung

## 5.4.3 Stationäre Strömungszustände, Wirbelschicht

Anwendung der Driftfluss-Relation:

Bestimmung des stationären Zustandes bei gegebenen  $j_1$  und  $j_2$ :

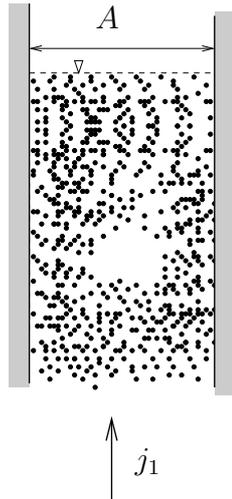
Es gilt:  $\begin{cases} \alpha = 0 : j_{12} = -j_2 \\ \alpha = 1 : j_{12} = j_1 \end{cases}$ , Alle möglichen Driftflüsse  $j_{12}$  bei geg.  $j_1$  und  $j_2$  liegen auf der Verbindungsgeraden.



- 0A Wirbelschicht mit unterem  $j_1^*$  und oberen Fluid Volumenstrom  $j_1^{**}$ .
- AB Gleichstrom (1 Lösung)
- AC Gegenstrom (2 Lösungen)
- AD Grenze des Gegenstrombetriebs
- AE stationärer Zustand nicht möglich

### Anwendung auf Wirbelschicht (Fließbett, "fluidized bed")

Feste Teilchen in einem vertikalen Behälter der von einem spezifisch leichteren Fluid von unten nach oben durchströmt wird.



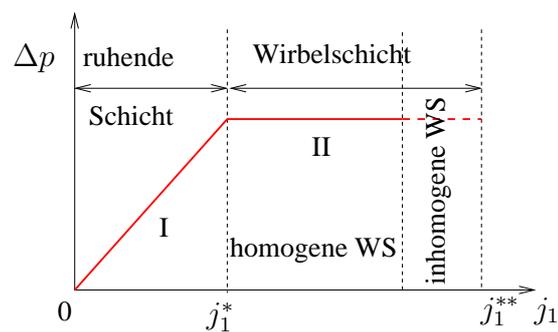
$j_1 < j_1^*$  Ruhende Schicht  
 $j_1^* < j_1 < j_1^{**}$  Wirbelschicht: Verhalten analog zu Flüssigkeit, freie Oberfläche, Oberflächenwellen, spez. leichterer Körper schwimmt, strahlförmiges Austreten  
 $j_1^{**} < j_1$  Teilchen werden von Fluid mitgerissen und treten oben aus dem Behälter aus.

Wirbelschicht kann  $\left\{ \begin{array}{l} \text{homogen} \\ \text{inhomogen} \end{array} \right\}$  sein; inhomogen vor allem bei höheren Geschwindigkeiten; "Blasen", "Strahlen"

### 5.4.4 Druckverluste

Druckverlust in Wirbelschicht (Flüssigkeitswirbelschicht)

Bemerkung: Bei Gasen treten Blasen schon bei  $j_1 > j_1^*$  auf!

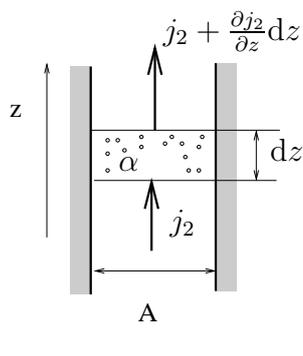


I linearer Bereich, Darcysches Gesetz:  $j_1 = -\frac{k}{\mu_1} \frac{dp}{dx}$ ,  
 $k$ ...Permeabilität [ $k$ ] =  $m^2$  (nur von porösen Medium abhängig),

II konstanter Wert = Gewicht der festen Teilchen pro Fläche,  
 (Voraussetzung: Vertikales Rohr, konstanter Querschnitt)

## 5.4.5 Sedimentation, kinematische Wellen

Kontinuitätsgleichung für Phase 2



$$\frac{\partial \alpha A dz}{\partial t} = A \left[ j_2 - \left( j_2 + \frac{\partial j_2}{\partial z} dz \right) \right],$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial j_2}{\partial z} = 0,$$

inkomp. Gemisch, konst. Querschnitt:

$$\frac{\partial j}{\partial z} = 0.$$

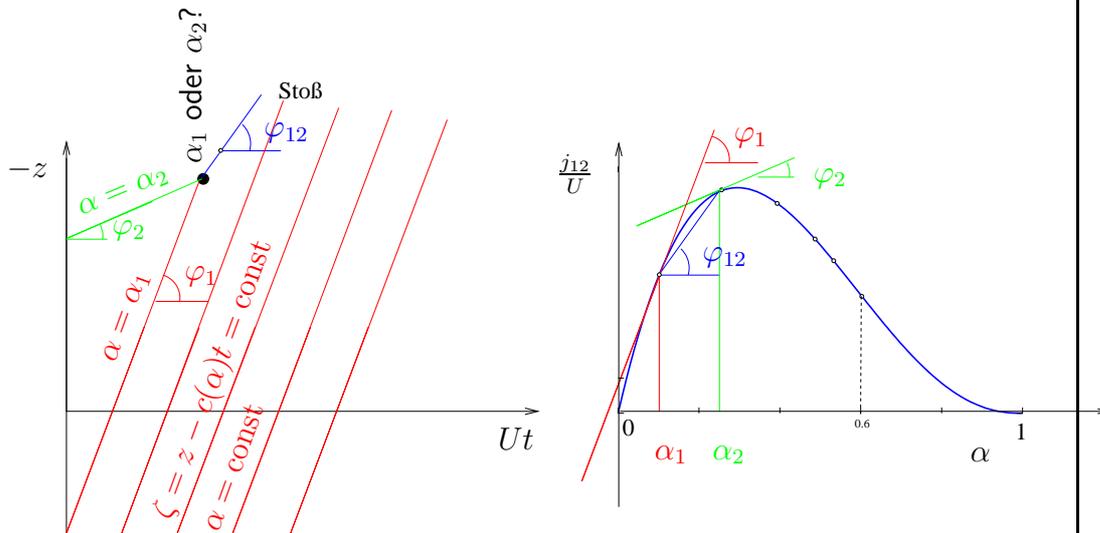
Bei festem Boden gilt:  $j = 0$  und somit  $j_2 = \alpha j - j_{12} = -Uf(\alpha)$ ,

$$\boxed{\frac{\partial \alpha}{\partial t} - U \frac{\partial f(\alpha)}{\partial z} = 0} \quad \text{kinematische Wellengleichung}$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + c(\alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial z} = 0, \quad c(\alpha) = -Uf'(\alpha).$$

Für einen Beobachter, der sich mit der Geschwindigkeit  $c = c(\alpha)$  bewegt, ist die Lösung konstant; m. a. W.: die Lösung ist entlang von Geraden in der  $(z, t)$ -Ebene konstant:

$$\text{allg. Lösung } \alpha = \alpha(\zeta), \quad \zeta = z - c(\alpha)t.$$



$$c(\alpha_1) = -U \tan \varphi_1, \quad c(\alpha_2) = -U \tan \varphi_2, \quad s_{12} = -U \tan \varphi_{12}$$

kinematische Stoßwelle

Falls für  $z_1 < z_2$  gilt  $c(\alpha(z_1)) > c(\alpha(z_2))$  kommt es zum "Aufstellen" der kinematischen Welle  $\Rightarrow$  nicht differenzierbare Lösung, bzw. wandernde Unstetigkeit (Stoß).

Bestimmung der Stoßgeschwindigkeit:

$$\text{Anfangsbedingung } \alpha = \begin{cases} \alpha_1, & z < 0 \\ \alpha_2, & z > 0 \end{cases}$$

mit  $c(\alpha_1) > c(\alpha_2)$ , Lösung:

$$\alpha(z, t) = \begin{cases} \alpha_1, & z < st \\ \alpha_2, & z > st \end{cases}$$

mit  $s$  Stoßgeschwindigkeit.

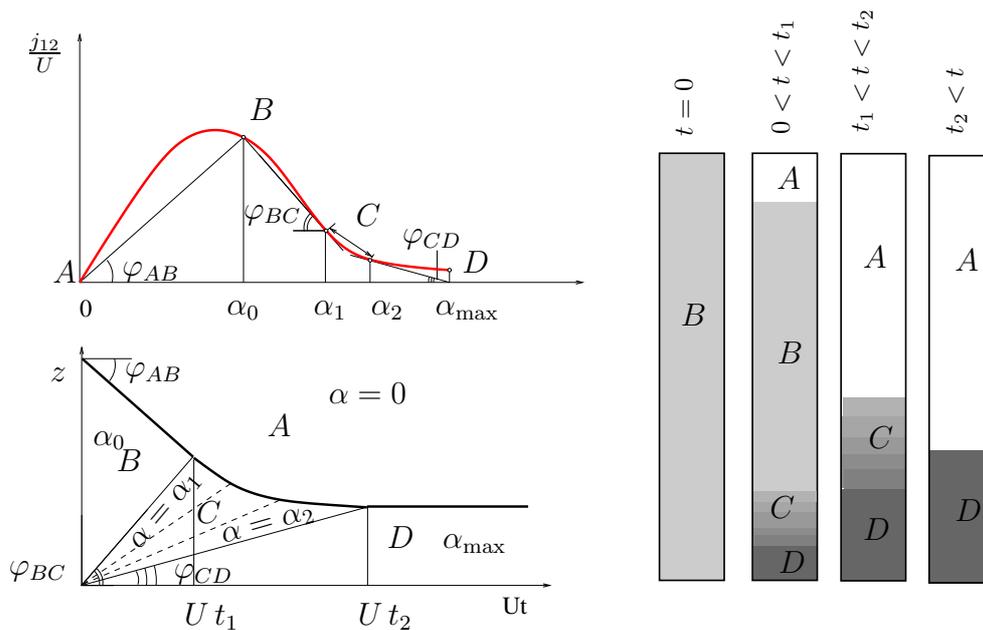
Integration über ein Kontrollvolumen, dass den Stoß enthält ergibt:

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha + \frac{\partial}{\partial z} j_2 = 0, \quad \int_{z_1}^{z_2} dz$$

mit  $j_2 = \alpha j - j_{12}$  und  $j = 0$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int \alpha dz}_{s(\alpha_1 - \alpha_2)} + j_2(\alpha_2) - j_2(\alpha_1) &= 0 \\ s &= \frac{j_2(\alpha_2) - j_2(\alpha_1)}{\alpha_2 - \alpha_1} = \\ &= -\frac{j_{12}(\alpha_2) - j_{12}(\alpha_1)}{\alpha_2 - \alpha_1} = -U \tan \varphi_{12} \end{aligned}$$

Sedimentation in einem Behälter mit senkrechten Wänden und  
konstantem Querschnitt



- Randbedingung an Oberseite:  $j_2 = 0$ , Wegen negativer Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c < 0$  entsteht Zone mit klarer Flüssigkeit  $\alpha = 0$ , Zone A;
- Zone B: Ungestörter Anfangsvolumenanteil  $\alpha_0$ , Sinkgeschwindigkeit  $v_2$
- Stoß AB: Übergang von Zustand A ( $\alpha = 0$ ) nach  $\alpha = \alpha_0$  (Zustand B) erfolgt mittels Stoß.  
Stoßgeschwindigkeit = Sinkgeschwindigkeit in Bereich B

$$s_{AB} = -\frac{j_{12}(\alpha_0) - 0}{\alpha_0 - 0} = v_2$$

- Randbedingung an Boden:  $j_2 = 0$ : Teilchen akkumulieren auf Boden mit  $\alpha = \alpha_{\max}$  (Zustand D)
- In Bereich D:  $j_2 = 0 = j_1 = 0$ , Driftflussrelation hier nicht gültig da Teilchen auf dem Boden ruhen.
- Grenze des Bereichs D: Ausbreitung mit Stoßgeschwindigkeit

$$s_{CD} = -\frac{j_{12}(\alpha_2) - 0}{\alpha_2 - \alpha_{\max}}$$

aber auch mit Ausbreitung mit Charakteristikengeschw.

$$c(\alpha_2) = -\frac{\partial j_{12}}{\partial \alpha}$$

Daher  $s_{CD} = c(\alpha_2)$ .

- Bestimmung von  $\alpha_2$ : Tangente aus  $(\alpha_{\max}, 0)$  an Driftflusskurve.

- Übergang BC: Tangente aus  $(\alpha_0, j_{12}(\alpha_0))$  an Driftflusskurve  $\rightarrow \alpha_1$ ,
- Bereich C: Verdünnungsfächer (stetiger Übergang von  $\alpha_1$  nach  $\alpha_2$ ),
- Übergang von Zustand B in D erfolgt nicht mittels eines Stoßes (wäre aufgrund der Kontinuitätsgleichung möglich), sondern mittels eines Stoßes und eines "Verdünnungsfächers". Begründung: Die Verbindungslinie der Endzustände eines Stoßes muss unterhalb der Driftflusskurve liegen (Entropiebedingung, Folge aus 2. HS)
- Falls die Gerade durch  $(\alpha_{\max}, 0)$  (Zustand D) und  $(\alpha_0, j_{12}(\alpha_0))$  (Zustand B) unterhalb der Driftflusskurve liegt, entfällt der Bereich C.

### Analoge Behandlung

- Zentrifugieren
- Drainage von Schäumen

### Verallgemeinerung

- Behälter mit geneigten Wänden: Erhöhung der effektiven Absetzgeschwindigkeit (bis zu Faktor 7) Boycott-Effekt (experimentell 1925).