

Ein- und Mehrphasenströmungen

Vorlesungsskript, angefertigt von H. Steinrück nach Unterlagen von Prof. Wilhelm Schneider, der diese Vorlesung von ca. 1975-2006 entwickelt und abgehalten hat. Weiter bearbeitet von T. Loimer.

Danksagungen:

Ich möchte mich bei Prof. Schneider für die Unterstützung bei der Vorbereitung, die immer spannenden Diskussionen über Grundlagenfragen und die Überlassung seiner Unterlagen herzlich bedanken. - H. St.

Ich bedanke mich bei H. Steinrück und bei Prof. Kluwick für die Beauftragung mit der Lehre für Ein- und Mehrphasenströmungen. - T.L.

Institut für Strömungsmechanik und Wärmeübertragung, Technische Universität Wien, <http://www.fluid.tuwien.ac.at>. 2006 – 2010.

Inhaltsverzeichnis

1	Fliessverhalten von Flüssigkeiten	1
1.1	Viskose Flüssigkeiten	3
1.1.1	Newtonscher Schubspannungsansatz	4
1.1.2	Nicht-lineare Schubspannungsansätze	8
1.2	Viskoelastische Stoffe	12
1.2.1	Maxwellsche Flüssigkeit	15
1.2.2	Normalspannungseffekte	16
1.2.3	Flüssigkeiten mit Gedächtnis	21
2	Einfache Scherströmungen	23
2.1	Laminare Couette-Strömung	23
2.2	Laminare Rohrströmung	28
2.2.1	Allgemeine Beziehungen	28
2.2.2	Kapillar-Viskosimeter	31
2.2.3	Newtonsche Flüssigkeit	32
2.2.4	Ostwald-de Waele Flüssigkeit	33
2.2.5	Bingham Flüssigkeit	33
2.3	Filmströmungen	35
2.3.1	Strömungsformen	36
2.3.2	Laminare Filmströmung	36
2.3.3	Turbulente Filmströmung	38
3	Bewegung von festen Teilchen, Tropfen und Blasen	41
3.1	Grundgleichungen für inkompressible Strömungen	41
3.1.1	Differentialgleichungen	41
3.1.2	Randbedingungen	45
3.2	Mechanische Ähnlichkeit; Kennzahlen	49
3.2.1	Dimensionslose Darstellung	49
3.2.2	Vergleich zweier Strömungen	51
3.2.3	Widerstandsbeiwert	54
3.3	Hydrostatischer Auftrieb	55
3.3.1	Archimedessches Gesetz	55
3.3.2	Stationäres Steigen und Fallen	56
3.4	Schleichende Strömungen	57
3.4.1	Feste Kugel	58
3.4.2	Kugelförmige Tropfen und Blasen	66
3.4.3	Widerstand von Tropfen und Blasen	67

3.5	Strömungen bei großen Re-Zahlen	68
3.5.1	Euler-Gleichungen	68
3.5.2	Drehungsfreiheit und Helmholtz'scher Wirbelsatz	69
3.5.3	Geschwindigkeitspotential	75
3.5.4	Potentialströmung um eine Kugel	78
3.5.5	d'Alembert'sches Paradoxon	81
3.5.6	Vergleich von Potentialströmung mit realer Strömung	82
3.5.7	Strömung um eine Kugel	84
3.5.8	Tropfen und Tropfenzerfall	87
3.5.9	Vergleich von Potentialströmung mit realer Strömung um eine kugelförmige Gasblase	89
3.5.10	Gasblasen	92
3.6	Kavitation	101
3.7	Zerfall von Flüssigkeitsstrahlen	106
4	Zweiphasenströmungen	109
4.1	Strömungsformen	110
4.2	Homogene Gleichgewichtsströmungen	112
4.2.1	Zustandsgrößen des Gemisches	113
4.2.2	Schallgeschwindigkeit	116
4.2.3	Viskosität von Suspensionen	120
4.3	Eindimensionale, homogene Strömungen ohne Phasenumwand- lungen	123
4.3.1	Grundgleichungen	124
4.3.2	Reibungsfreie Düsenströmung	125
4.3.3	Rohrströmung mit Reibung	129
4.4	Zweiphasenströmungen mit Relativgeschwindigkeit	137
4.4.1	Allgemeine Beziehungen	137
4.4.2	Driftfluss	138
4.4.3	Stationäre Strömungszustände, Wirbelschicht	142
4.4.4	Druckverluste	143
4.4.5	Sedimentation, kinematische Wellen	143

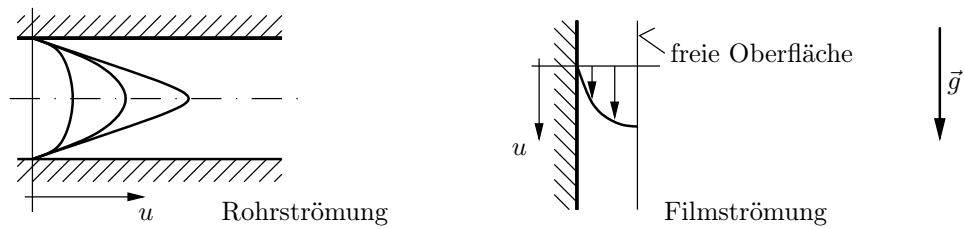
Vorbemerkungen

Die Lehrveranstaltung Ein- und Mehrphasenströmungen gliedert sich im Wesentlichen in drei Teile. Diese sind

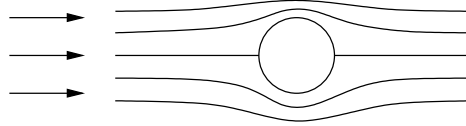
Kapitel 1, 2: Rheologie und einfache Scherströmungen

Rheologie: Fließgesetz von Flüssigkeiten

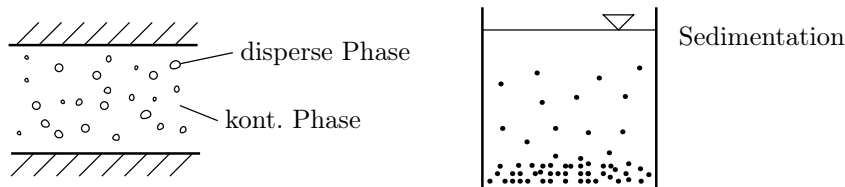
Wie schauen, aufgrund dieser Fließgesetze, einfache Scherströmungen aus



Kapitel 3: Bewegung von Kugeln, Tropfen, Blasen



Kapitel 4: Zweiphasenströmungen



homogene 2ph-Strömung

2ph-Strömung mit Relativbewegung

Teilgebiete der Strömungsmechanik

Hydrostatik, Hydraulik;

Hydromechanik, Hydrodynamik: Flüssigkeiten konst. Dichte

Aerodynamik: Gase konst. Dichte

Gasdynamik: Berücksichtigung der Kompressibilität

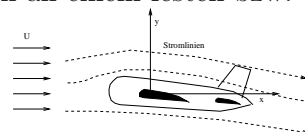
Turbulente Strömungen

Beschreibung von Strömungen

Eine Strömung wird beschrieben durch

- Geschwindigkeitsvektor $\vec{v} = (u, v, w)$,
- Druck p ,
- Temperatur T
- als Funktion des Ortes (x, y, z) und eventuell der Zeit t .

Eulersche Betrachtungsweise: Zustandsänderungen an einem festen bzw. mit einem Inertialsystem mitbewegten Ort werden beschrieben. Die zu beschreibende Materie bewegt sich an diesem Ort vorbei.



Lagrange: Die Zustandsänderungen eines, ev. bewegten, Masseteilchens werden beschrieben. Das Koordinatensystem bewegt sich mit der zu beschreibenden Materie mit. Gleiche Ortskoordinaten = gleiche Materie.

Anwendungen

Astrophysik, Geophysik, Meteorologie: Sternstruktur, Strömungen im Erdinnern, atmosphärische Strömungen

Ozeanographie: Meerestr., Oberflächenwellen

Bauwerksaerodynamik: Windkräfte auf Fassadenelemente

Luft- und Raumfahrt: Wiedereintritt in die Atmosphäre

Verkehrstechnik: Autos; Druckwelle bei Einfahrt eines Zuges in einen Tunnel

Schiffstechnik: Schiffshydrodynamik, Kavitation am Schiffspropeller

Strömungsmaschinen: Dampf, Gas- und Wasserturbinen, Pumpen

Motorenbau: instat. Vorgänge im Zylinder und in der Auspuffleitung, Verbrennungsvorgänge, Einspritzung

Heizungs, Klima- und Lüftungstechnik: Hallenbelüftung

Chem. Verfahrenstechnik: Str. mit chem. Reaktionen, Mehrphasenstr.

Elektrochemie: Strömungen von Elektrolyten

Metallurgie: Strömungen von Metallschmelzen, Erstarrungsvorgänge

Glastechnologie: Glaschmelzen

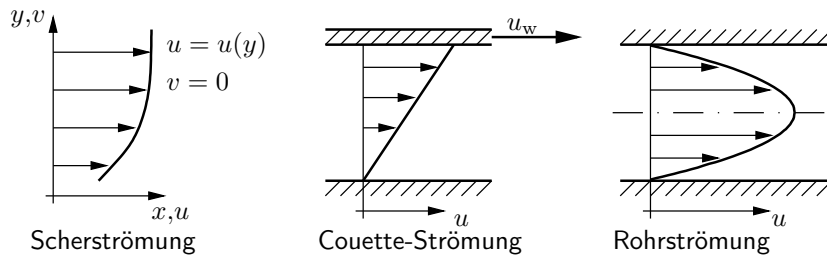
Wärmeübergang und Stoffübergang

Strömungen in elektr. Maschinen

Magnetohydrodynamik: Wechselwirkung zw. Magnetfeld und Strömungsfeld, Energiedichteumwandlung

1 Fließverhalten von Flüssigkeiten

Beschreibung anhand einfacher Scherströmungen $u = u(y)$, $v = 0$.



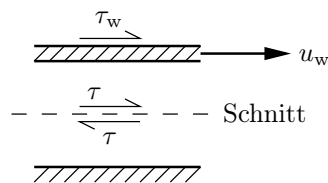
Couette-Strömung: Die obere Platte wird mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. Es muss eine gewisse Kraft/Fläche ausgeübt werden.

Freischneiden zeigt: Die Kraft/Fläche ist gleich der Schubspannung τ im Fluid.

Das Fließverhalten einer Flüssigkeit ergibt die Beziehung zwischen Schubspannung und Geschwindigkeit.

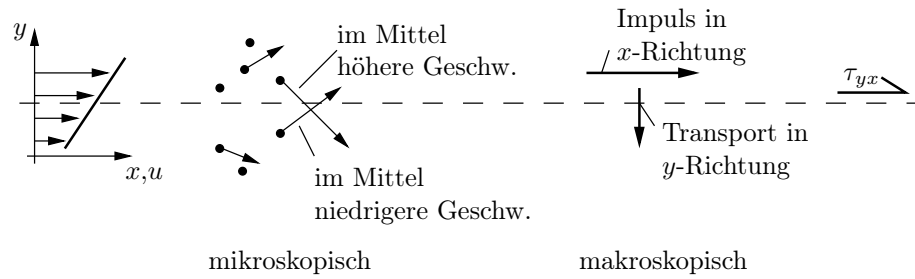
Ein einfaches Beispiel für das Fließverhalten wäre: Bei doppelter Kraft bewegt sich die Platte doppelt so schnell. Je nach Flüssigkeit kann die benötigte Kraft stark variieren. In diesem Kapitel werden wichtige Beispiele für das Fließverhalten von Flüssigkeiten präsentiert.

Freischneiden zeigt, dass in der Couette-Strömung, wie beim durch eine Einzelkraft belasteten Biegebalken, die Schubspannung konstant ist. Beim Freischneiden kommt es nur auf die eingeleiteten Kräfte an, nicht auf das Medium, durch das geschnitten wird.



Die Schubspannung kann einerseits als Folge der Reibung zwischen den aneinander vorbei gleitenden Flüssigkeitsschichten betrachtet werden. Andererseits kann die Schubspannung auch als Impulsfluss, also als Impulsstrom/Fläche, interpretiert werden. In der Couette-Strömung wird der x -Impuls eines Volumenelementes (eine andere Komponente des Impulses gibt es in dieser Strömung nicht) in negative y -Richtung transpor-

tiert. Die Interpretation der Schubspannung als Impulsfluss wird anschaulich, indem ein Gas betrachtet wird: Die Gasmoleküle tauschen durch thermische Bewegung Impuls untereinander aus. In einer Strömung mit Geschwindigkeitsgradienten führt dieser Impulsaustausch auch makroskopisch zu einem Impulstransport.



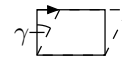
1.1 Viskose Flüssigkeiten

In viskosen Flüssigkeiten hängt die Schubspannung τ *nur* von der Schergeschwindigkeit $\dot{\gamma}$ ab.

Fließgesetz für viskose Fluide:

$$\tau = f(\dot{\gamma}) \quad (1.1)$$

Scherung: Deformation eines Volumenelementes um den Winkel γ .



γ ... Scherung, $[\gamma] = \text{dim.-los}$

$\dot{\gamma}$... Schergeschwindigkeit, $\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt}$, $[\dot{\gamma}] = 1/\text{Zeit}$

In kart. Koordinaten: $\dot{\gamma} = \frac{du}{dy}$; in Zylinderkoordinaten: $\dot{\gamma} = \frac{du}{dr}$.

Reibungsgesetz des Fluids, Fließgesetz: Beziehung zwischen dem Spannungs- und dem Bewegungszustand des Fluids.

Viskose Flüssigkeiten müssen sich verformen, um eine Schubspannung aufnehmen zu können. Das heißt aber auch, dass jede noch so geringe Schubspannung eine, wenn auch geringe, Verformung verursacht. Man denke an ein Schiff im ruhenden Wasser, das letztendlich doch bewegt werden kann.

Während für viskose Fluide die Schubspannung nur von der Schergeschwindigkeit abhängt, können Fließgesetze im Allgemeinen auch Abhängigkeiten zwischen den zeitlichen Änderungen (und höheren zeitlichen Ableitungen) sowie der Geschichte des Spannungs- und des Bewegungszustands beinhalten. Weiters können anisotrope Beziehungen zwischen dem Spannungs- und dem Bewegungszustand bestehen. Beispiele für solche Fließgesetze werden in diesem Kapitel kurz vorgestellt.

1.1.1 Newtonscher Schubspannungsansatz

$$\tau = \mu \dot{\gamma} \quad (1.2)$$

μ ... dynamische Viskosität (Zähigkeit)
 $[\mu] = \text{Kraft} \cdot \text{Zeit} / \text{Fläche}$, SI-Einheit: Pa s.

Lineare Beziehung! μ unabhängig von $\dot{\gamma}$ und t .

Die meisten Gase und viele Flüssigkeiten folgen dem Newtonschen Reibungsgesetz, aber nicht alle.

Vergleiche Hookesches Gesetz: $\tau = G\gamma$.

Der Newtonsche Schubspannungsansatz ist das einfachste Reibungsgesetz für Fluide. Die Schubspannung ist proportional zur Schergeschwindigkeit. Der Proportionalitätsfaktor, die Viskosität μ , ist unabhängig vom Bewegungszustand oder von der Bewegungsgeschichte des Fluids.

Reine Flüssigkeiten mit niedrigem Molekulargewicht, wie z.B. Wasser oder einfache Kohlenwasserstoffe, verhalten sich meist wie Newtonsche Fluide. Flüssigkeiten mit komplexerer Mikrostruktur, z.B. biologische Flüssigkeiten oder Polymere, aber auch Gemische wie Emulsionen und Suspensionen zeigen oft Nicht-Newtonsches Verhalten.

Man vergleiche den Newtonschen Schubspannungsansatz mit dem Hookeschen Gesetz: Der Spannungszustand einer Flüssigkeit hängt *nur* von der momentanen Schergeschwindigkeit ab – die Entfernung eines Materieteilchens von seinem Ursprungsort ist völlig belanglos. Umgekehrt das Hookesche Gesetz: Der Spannungszustand eines Festkörpers ist nur von der Deformation abhängig, nicht von der Geschwindigkeit, mit der das geschieht. Ein Hookescher Körper „erinnert“ sich, für alle Zeiten, an seinen Ausgangszustand, Flüssigkeiten „vergessen“ alles sofort bzw. haben gar kein Gedächtnis.

Der Newtonsche Schubspannungsansatz ist nur für inkompressibel gerechnete Fluide ein vollständiges Reibungsgesetz. Ein kompressibles Newton-

sches Fluid benötigt zur vollständigen Beschreibung eine zweite Größe, die Volumenviskosität, welche das Verhältnis von Normalspannung zu Dehngeschwindigkeit angibt.

Eigenschaften der dynamischen Viskosität

- μ ist praktisch unabhängig vom Druck, ausgenommen in der Nähe des kritischen Punktes und bei sehr hohen Temperaturen.
- μ ändert sich im Allgemeinen mit der Temperatur: Für Gase steigt sie mit wachsender Temperatur, für Flüssigkeiten sinkt sie mit wachsender Temperatur.

Zahlenwerte:

	μ [Pa s]		
	0 °C	20 °C	100 °C
Wasser, 1 bar	$1,792 \cdot 10^{-3}$	$1,002 \cdot 10^{-3}$	$0,282 \cdot 10^{-3}$
Wasser, 100 bar	$1,768 \cdot 10^{-3}$		$0,284 \cdot 10^{-3}$
Luft, 1 bar	$1,724 \cdot 10^{-5}$	$1,824 \cdot 10^{-5}$	$2,194 \cdot 10^{-5}$
Luft, 100 bar	$1,961 \cdot 10^{-5}$		$2,355 \cdot 10^{-5}$

(VDI-Wärmeatlas, 9. Aufl, 2002)

Zur Temperaturabhängigkeit der dynamischen Viskosität

- Flüssigkeiten: Die Moleküle haben geringen Abstand zueinander, zwischen den Molekülen wirken vor allem intermolekulare Kräfte. Bei Scherung müssen diese überwunden werden und die Moleküle aneinander vorbei bewegt werden. Höhere Temperatur \rightarrow höhere Amplitude der thermischen Bewegung \rightarrow größere Beweglichkeit der Moleküle $\rightarrow \mu$ sinkt.
Siehe dazu auch BIRD et al. (§ 1.5, S. 26).
- Gase: Die Moleküle haben großen Abstand zueinander. Die makroskopisch beobachtete Schubspannung entspricht einem molekularen Impulsaustausch quer zur Strömungsrichtung. Der Impulsaustausch wird hauptsächlich durch Stöße zwischen den Molekülen bewirkt. Höhere Temperatur \rightarrow größere molekulare Geschwindigkeit \rightarrow besserer Impulsaustausch $\rightarrow \mu$ steigt.

Kinematische Viskosität

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (1.3)$$

ν ... kinematische Viskosität, $[\nu] = \text{Fläche/Zeit}$, SI-Einheit: m^2/s

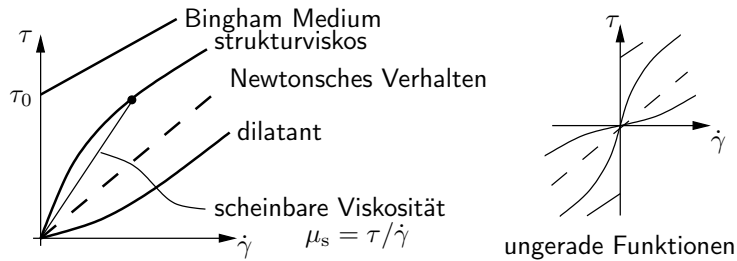
Zahlenwerte:

Wasser, 20 °C, 1 bar: $\nu = 1,003 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

Luft, 20 °C, 1 bar: $\nu = 1,535 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$

(VDI-Wärmeatlas, 9. Aufl., 2002)

1.1.2 Nicht-lineare Schubspannungsansätze



- Strukturviskos (pseudoplastisch): Die scheinbare Viskosität nimmt mit zunehmender Schergeschwindigkeit ab.
- Dilatant: Die scheinbare Viskosität wird mit zunehmender Schergeschwindigkeit größer.
- Bingham Medium: Fließspannung (Anfangsschubspannung) τ_0 ist nötig, damit Medium zu fließen beginnt.

τ und $\dot{\gamma}$ sind jeweils ungerade Funktionen voneinander.

Beispiele für strukturviskose Flüssigkeiten sind Polymere mit hohem Molekulargewicht. Diese haben langkettige Moleküle, die im Ruhezustand verknäult sind, sich aber bei zunehmender Schergeschwindigkeit entflechten.

Dilatante Flüssigkeiten wären z.B. konzentrierte Suspensionen, d.h., Gemische von festen Teilchen mit einer Flüssigkeit. Dilatante Fluide sind wesentlich seltener als pseudoplastische.

Bingham Medien sind z.B. Zahnpasta, Farben und Lacke.

Im Englischen werden, neben „dilatant“ und „pseudoplastic“, meist die anschaulicheren und zutreffenderen Begriffe „shear-thickening“ und „shear-thinning“ verwendet (BARNES et al., S. 16; GIESEKUS, S. 206f).

Die Schubspannung kann auch ein Maximum in der Funktion $\tau = \tau(\dot{\gamma})$ aufweisen. Da nahe eines Maximums von τ eine gegebene Schubspannung durch zwei verschiedene Schergeschwindigkeiten realisiert werden könnte, wären Instabilitätsphänomene möglich. Ein Beispiel wäre stick-slip, wie es beim Extrudieren von Polymeren auftritt (GIESEKUS, S. 207, 550, 551).

Potenzansatz von Ostwald und de Waele

$$\tau = m\dot{\gamma}^n \quad \text{für } \dot{\gamma} > 0; m, n = \text{const} \quad (1.4)$$

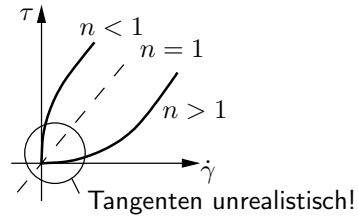
genauer: Vorzeichen wird beibehalten,

$$\tau = m |\dot{\gamma}|^{n-1} \dot{\gamma}$$

$n = 1$... Newtonsches Fluid

$n < 1$... strukturviskoses Fluid

$n > 1$... dilatantes Fluid



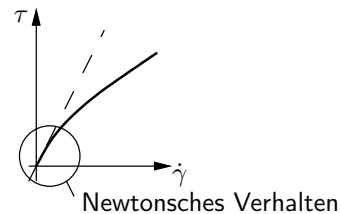
Ostwald - de Waele Ansatz ist unrealistisch für $\dot{\gamma} \rightarrow 0$ bzw. $\tau \rightarrow 0$ weil $\mu_s \rightarrow \infty$ ($n < 1$) bzw. $\mu_s \rightarrow 0$ ($n > 1$).

Ansatz von Prandtl und Eyring

$$\tau = A \cdot \operatorname{arsinh} \left(\frac{1}{B} \dot{\gamma} \right), \quad A, B = \text{const} \quad (1.5)$$

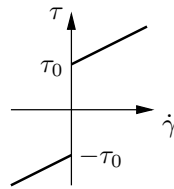
Taylorreihe für $\frac{1}{B} \dot{\gamma} \ll 1$:

$$\tau = A \left[\frac{1}{B} \dot{\gamma} - \frac{1}{6} \left(\frac{1}{B} \dot{\gamma} \right)^3 + \dots \right]$$



Prandtl - Eyring - Ansatz für $\dot{\gamma} \rightarrow 0$ ($\tau \rightarrow 0$) brauchbar, μ entspricht A/B . Beschreibt strukturviskose Flüssigkeiten.

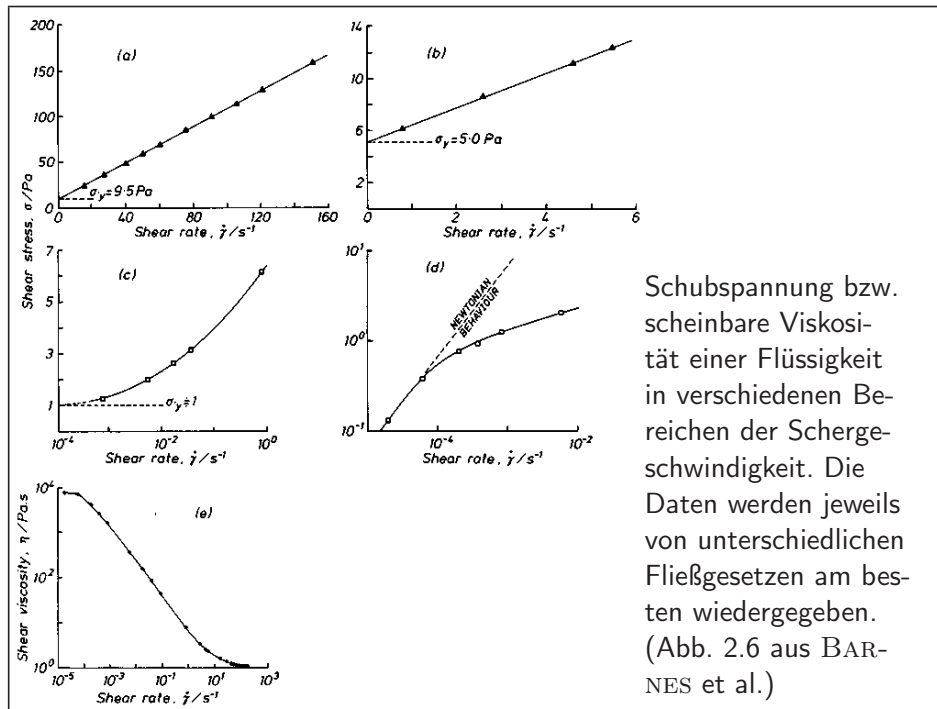
Lässt sich aus molekulardynamischer Theorie einer Flüssigkeit herleiten (BIRD et al., § 1.5, S. 26).

Ansatz von Bingham

$$\tau = \pm\tau_0 + \mu_B\dot{\gamma} \quad \tau_0, \mu_B = \text{const} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} &+\tau_0 \text{ für } \dot{\gamma} > 0, \\ &-\tau_0 \text{ für } \dot{\gamma} < 0. \end{aligned}$$

Eine minimale Schubspannung, τ_0 , ist nötig, damit das Fluid zu fließen beginnt. Dann: Strukturviskoses Fließgesetz, scheinbare Viskosität nimmt mit zunehmender Schubspannung ab.

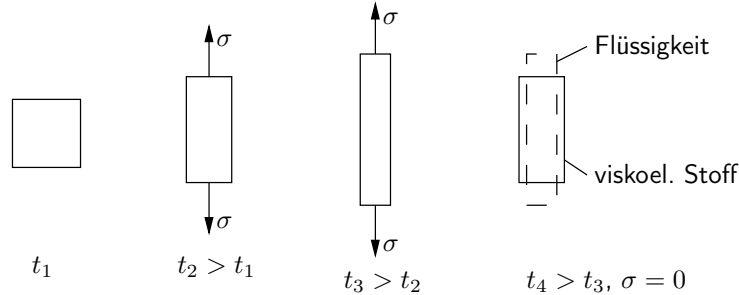


Alle Ansätze sind empirische Korrelationen! Sie gelten in dem Bereich, in dem Daten vorliegen und für den die Koeffizienten bestimmt wurden. Ein Fluid, das bei hohen Schergeschwindigkeiten als Bingham-Medium erscheint, kann bei genauerem Messen pseudoplastisches Verhalten zeigen. Man spricht deshalb besser vom Newtonschen, pseudoplastischen, etc. Verhalten eines Stoffes statt von einem Newtonschen, pseudoplastischen, etc. Fluid. Auch Wasser zeigt bei sehr hohen Schergeschwindigkeiten nicht mehr nur Newtonsche Eigenschaften. Andererseits kann in einem kleinen Bereich das Verhalten eines Fluides unter Umständen mit genügender Genauigkeit durch den Newtonschen Ansatz genähert werden.

Diagramm (e) in obiger Abbildung zeigt den typischen Verlauf der Viskosität für viele Flüssigkeiten: Newtonsches Verhalten für kleine Schergeschwindigkeit, weiter eine große Änderung der scheinbaren Viskosität, schließlich wieder nahezu konstante scheinbare Viskosität bei hohen Schergeschwindigkeiten (BARNES et al., S. 16).

1.2 Viskoelastische Stoffe

Viele Flüssigkeiten zeigen neben den Eigenschaften einer Flüssigkeit (der Spannungszustand ist nur von der momentanen Verformungsgeschwindigkeit abhängig) auch elastische Eigenschaften eines Festkörpers: Nach einer Belastung wird ein Teil der durch die Belastung verursachten Verformung rückgängig gemacht.



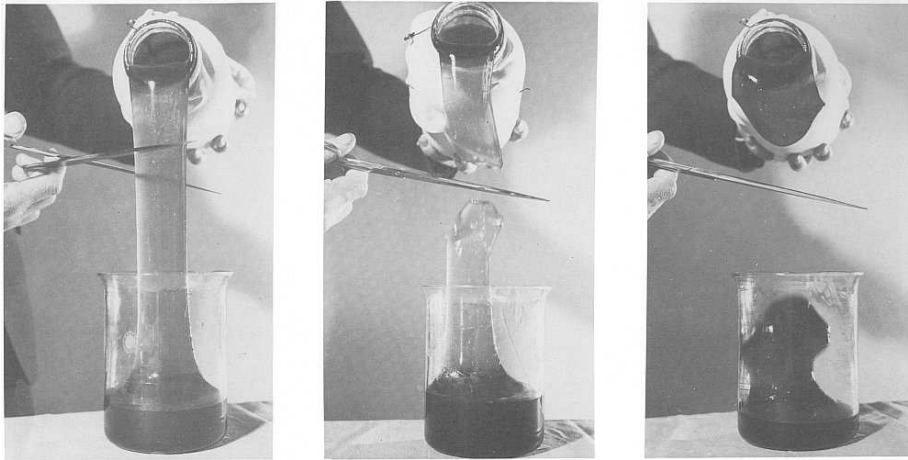
Beispiele:

- Zurückfedern („elastic recoil“)
- Offener Siphon, Selbstaussguss („self-syphoning“, „tubeless syphon“)

Die Mikrostruktur eines viskoelastischen Stoffes könnte z.B. aus langkettigen Polymermolekülen bestehen, die in einer Flüssigkeit eingebettet sind. In einer verdünnten Lösung nimmt ein Polymermolekül ohne Belastung, aufgrund der Maximierung seiner Entropie, einen kugelförmigen Raum ein. Unter Last wird die kugelförmige Enveloppe zu einem Ellipsoid verzerrt, die nach Beendigung der Belastung wieder kugelförmig wird. Ähnliches gilt für eine Emulsion zweier nicht mischbarer Flüssigkeiten.

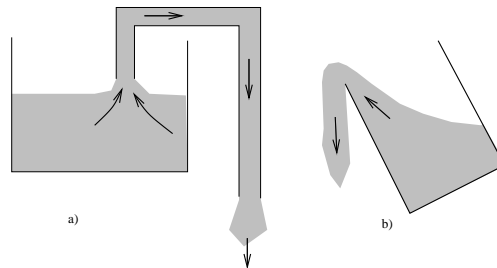


Zurückfedern

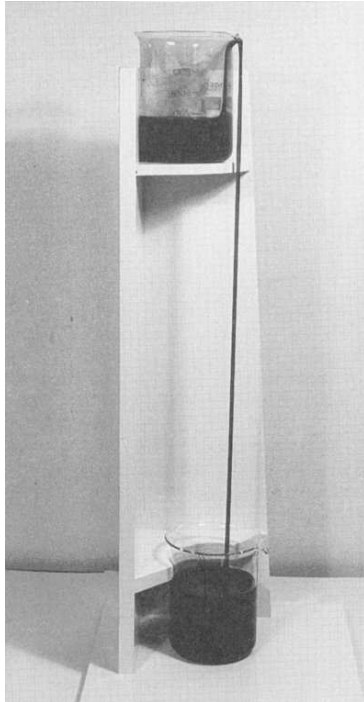


Zurückfedern. (Elastic recoil of an aluminium soap solution. Abb. 2.22 aus BOGER und WALTERS.)

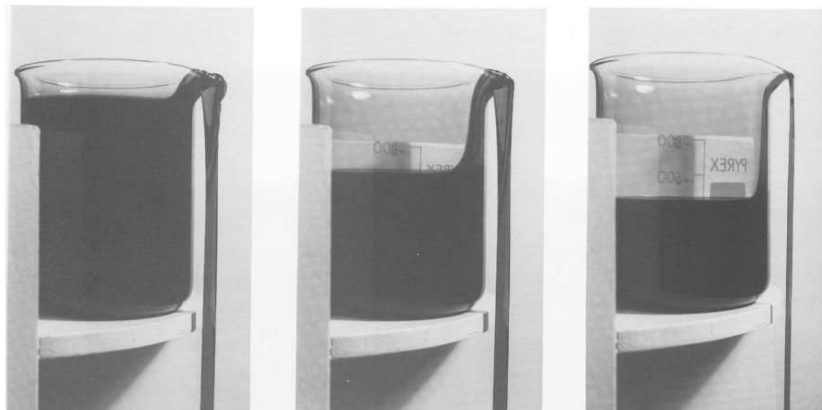
Offener Siphon



- a) Zum Starten des Vorganges wird das Rohr eingetaucht, sodass die Strömung startet, und dann nach oben gezogen (Fano-Strömung). Bei Newtonscher Flüssigkeit reißt die Strömung ab.
- b) Zum Starten wird das Gefäß geneigt und dann aufgerichtet. Bei Newtonschem Fluid kommt das Ausfließen zum Stillstand.



Offener Siphon. Lösung von 0,75% Polyethylenoxid in Wasser. (Abb. 5.20 aus BARNES et al.)



Detail des offenen Siphons vom Beginn des Prozesses (links) bis kurz vor Abreißen der Strömung (rechts). (Abb. 2.17 aus BARNES et al.)

1.2.1 Maxwell'sche Flüssigkeit

$$\tau + \lambda \frac{d\tau}{dt} = \mu \dot{\gamma}, \quad \mu, \lambda = \text{const} \quad (1.7)$$

λ ... Relaxationszeit, $[\lambda] = \text{Zeit}$

Beispiel „hüpfender Kitt“:

- langsame Spannungsänderung:

$$\lambda \frac{d\tau}{dt} \ll \tau: \quad \tau = \mu \dot{\gamma} + \dots, \quad \text{Fließen wie Newtonsches Fl.}$$

- schnelle Spannungsänderung:

$$\lambda \frac{d\tau}{dt} \gg \tau: \quad \frac{d\tau}{dt} = \frac{\mu}{\lambda} \frac{d\gamma}{dt} + \dots, \quad \tau = G\gamma + \dots$$

Hookesches Gesetz für elastischen Festkörper

Das Fließgesetz für die Maxwell'sche Flüssigkeit lässt sich verallgemeinern zu

$$\tau + \lambda_1 \frac{d\tau}{dt} + \lambda_2 \frac{d^2\tau}{dt^2} + \dots = \mu_0 \dot{\gamma} + \mu_1 \ddot{\gamma} + \mu_2 \dddot{\gamma} + \dots$$

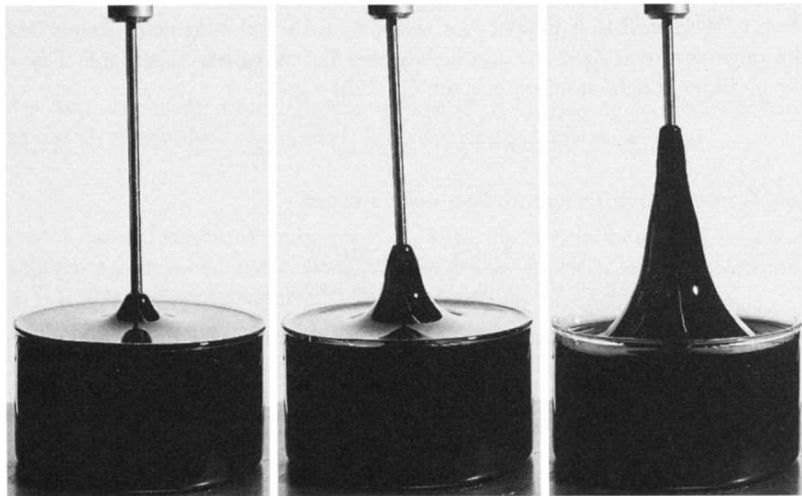
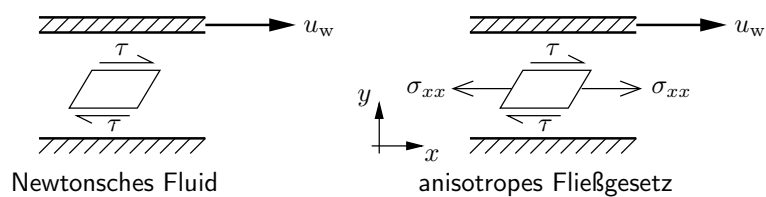
Auch in dieser allgemeinen Form besteht allerdings eine isotrope Beziehung zwischen der Spannung und der Deformation (bzw. deren zeitlichen Ableitungen). (Siehe auch BARNES et al., S. 37, 38.)

1.2.2 Normalspannungseffekte

Beispiele:

- Weissenberg-Effekt
- Strangaufweitung

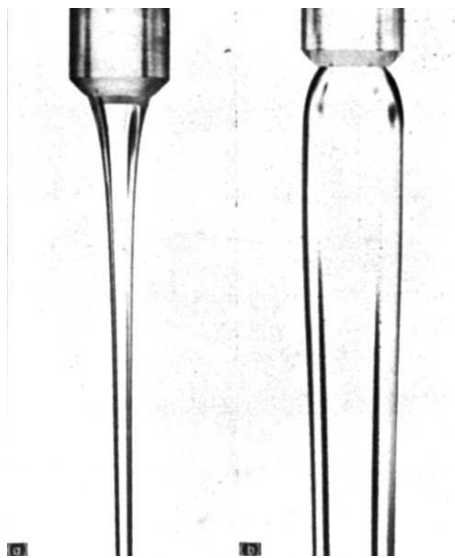
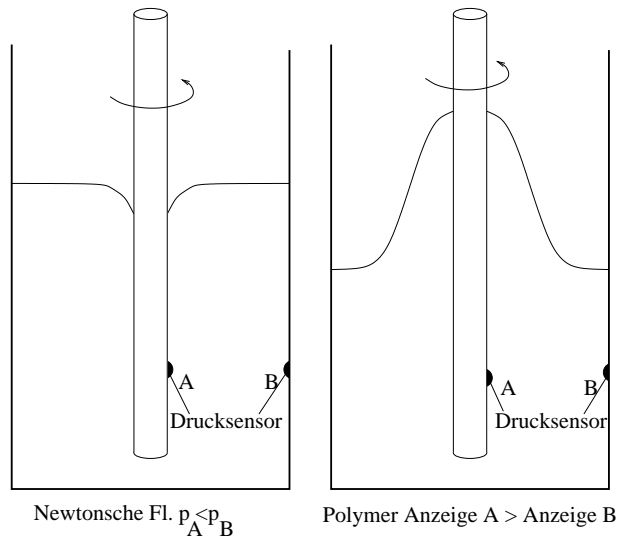
Normalspannungseffekte entstehen durch ausgeprägte *Normalspannungsdifferenzen*. Diese werden insbesondere durch anisotrope Fließgesetze verursacht.



Weissenberg-Effekt bei von links nach rechts zunehmender Umdrehungsgeschwindigkeit der Welle. (Abb. 11.33 aus GIESEKUS.)

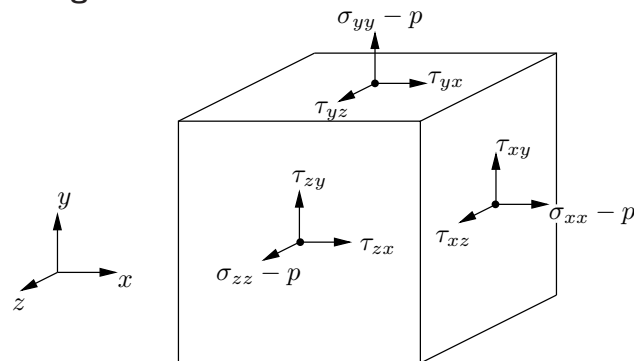
Benannt nach Karl Weissenberg (1893-1976), der auf dem Ersten Internationalen Rheologie-Kongress in Scheveningen neben dem nach ihm benannten noch eine Anzahl weiterer, Aufsehen erregender Normalspannungseffekte vorstellte (GIESEKUS, S. 411).

Weissenberg-Effekt



Strangaufweitung. Links ein Newtonsches Fluid (Glyzerin), rechts ein viskoelastisches Fluid mit großen Normalspannungsdifferenzen (Verdünnte Lösung von Polyvinylalcohol und Natriumborat in Wasser; Abb. 1.2 aus SCHOWALTER.)

Normalspannungen



1. Index: Normalenrichtung der Ebene

Notation: τ_{yx}

2. Index: Richtung der Spannungswirkung

hydrodynamischer Druck: isotroper Anteil des Spannungstensors,

$$p = -\frac{1}{3}(\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz}). \quad (1.8)$$

Normalspannungen: Spannungen normal zur Schnittebene.

Schubspannungen: Spannungen tangential in der Schnittebene.

Da der isotrope Anteil der Normalspannungen zum Druck gezählt wird bzw. wie ein (negativer) Druck wirkt, sind nur die Normalspannungsdifferenzen von Bedeutung. In einem ruhenden Fluid ist der hydrodynamische Druck gleich dem Umgebungsdruck.

In einer allgemeinen Strömung eines Newtonschen Fluides können aufgrund der Reibung sowohl Normalspannungen als auch Normalspannungsdifferenzen existieren. Es ist, z.B.,

$$\sigma_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\tilde{\mu} - \frac{2}{3}\mu \right) \operatorname{div} \vec{v},$$

mit der Volumenviskosität $\tilde{\mu}$. Allerdings besteht zwischen dem Tensor der Verformungsgeschwindigkeit und dem Spannungstensor ein isotroper Zusammenhang.

Normalspannungsdifferenzen

Für die einfache Scherströmung eines Newtonschen Fluids, symmetrisch bezüglich x - und z -Richtung, gilt

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = 0, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = 0,$$

$$\sigma_{xx} = 0, \quad \sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{zz} = 0$$

Normalspannungsdifferenzen:

$$\sigma_{xx} - \sigma_{yy} = N_1(\dot{\gamma}) \quad (1.9)$$

$$\sigma_{yy} - \sigma_{zz} = N_2(\dot{\gamma}) \quad (1.10)$$

$$(\sigma_{xx} - \sigma_{zz} = N_1 + N_2)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = f(\dot{\gamma})$$

Newtonsches Fluid: $N_1 = N_2 = 0$, $f(\dot{\gamma}) = \mu\dot{\gamma}$.

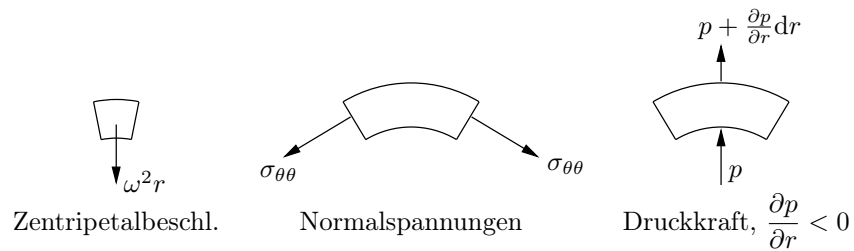
Einfache Scherung: In einer Richtung, der indifferenten (hier z), bleibt das Fluid unverformt. Siehe Abschnitt 2.

Normalspannungseffekte treten praktisch nur für visko-elastische Flüssigkeiten auf. Prinzipiell könnte ein Nicht-Newtonisches, *unelastisches* Fluid ebenfalls Normalspannungsdifferenzen verursachen. Das Reiner-Rivlin Fluid, ein generelles Modell für ein unelastisches Fluid, erlaubt in einer einfachen Scherströmungen allerdings nur Normalspannungen der Form $N_1 = 0$, $N_2 \neq 0$. Beobachtet wird genau umgekehrt $N_1 \neq 0$ (teilweise sogar sehr groß) und $N_2 \approx 0$.

Die Entstehung von Normalspannungsdifferenzen lässt sich anhand der Mikrostruktur einer verdünnten Polymerlösung vorstellen, siehe Seite ?? . Der von einem Polymermolekül eingenommene Raum wird unter Scherung zu einem Ellipsoid verzerrt. Die durch die Scherung bedingte, anisotrope Mikrostruktur des Fluids bedingt ein anisotropes Fließgesetz. Es lässt sich vorstellen, dass die Normalspannung in Strömungsrichtung größer wird als quer dazu (BARNES et al., S. 55f).



Weissenberg-Effekt: Intuitive Erklärung



Um ein Flüssigkeitselement auf einer Kreisbahn zu halten, muss es durch die Zentripetalbeschleunigung, $\omega^2 r$, nach innen beschleunigt werden. Die Summe der Kräfte auf das Flüssigkeitselement muss gleich der Masse mal der Zentripetalbeschleunigung sein.

Aufgrund der Normalspannungen wirkt eine resultierende Kraft in Richtung der Drehachse. In einem Fluid, das den Weissenbergeffekt zeigt, ist die Kraft aufgrund der Normalspannungen größer als zur Aufbringung der Zentripetalbeschleunigung nötig wäre. Um das Kräftegleichgewicht zu gewährleisten wirkt die Kraft aufgrund des Druckgradienten nach außen, $\partial p / \partial r < 0$

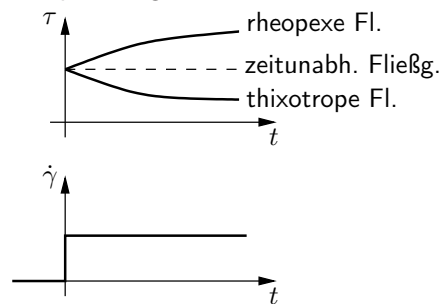
In einem Newtonschen Fluid gibt es in der stationären, axialsymmetrischen Strömung keine Normalspannungen. Die Zentripetalbeschleunigung wird durch die Druckkräfte aufgebracht, die in diesem Fall nach innen wirken müssen, $\partial p / \partial r > 0$.

In den gegebenen axialsymmetrischen Strömungen mit freier Oberfläche wird der erforderliche Druckgradient durch den hydrostatischen Druck aufgrund des Höhenprofils der Oberfläche erzeugt.

1.2.3 Flüssigkeiten mit Gedächtnis

$$\tau(t) = \int_{t'=0}^{\infty} \dot{\gamma}(t-t') \dots \text{ Funktional} \quad (1.11)$$

Die Spannung τ hängt nicht nur vom momentanen Wert von $\dot{\gamma}$ ab, sondern auch vom Wert von $\dot{\gamma}$ zu früheren Zeiten. τ ändert sich mit der Dauer der Scherbeanspruchung.



rheopex: Scheinbare Viskosität steigt. Beispiel: Gips.

thixotrop: Scheinbare Viskosität sinkt. Beispiele: Farben, Lacke.

Üblicherweise werden solche Flüssigkeiten als rheopex bzw. thixotrop bezeichnet, in denen die Änderungen reversibel sind: Nach Beenden der Scherbeanspruchung geht die scheinbare Viskosität wieder auf ihren Ausgangswert zurück. Die Änderung der Viskosität kann auch irreversibel sein. Pseudoplastische Fluide sind oft auch thixotrop, dilatante Fluide rheopex. (BARNES et al., S. 24).

Exponentiell schwindendes Gedächtnis

$$\tau(t) = \frac{\mu}{\lambda} \int_0^\infty e^{-t'/\lambda} \dot{\gamma}(t-t') dt' \quad \mu, \lambda = \text{const} \quad (1.12)$$

Substitution: $s = t - t'$, $dt' = -ds$,

$$\tau(t) = \frac{\mu}{\lambda} \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)/\lambda} \dot{\gamma}(s) ds$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{\mu}{\lambda} \frac{d}{dt} \left(e^{-t/\lambda} \int_{-\infty}^t e^{s/\lambda} \dot{\gamma}(s) ds \right)$$

$$= \frac{\mu}{\lambda} \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-t/\lambda} \underbrace{\int_{-\infty}^t e^{s/\lambda} \dot{\gamma}(s) ds}_{\tau/\mu} + e^{-t/\lambda} e^{t/\lambda} \dot{\gamma}(t) \right]$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{\mu}{\lambda} [-\tau/\mu + \dot{\gamma}(t)] \quad \Rightarrow \quad \tau + \lambda \frac{d\tau}{dt} = \mu \dot{\gamma}(t)$$

Maxwellsche Flüssigkeit!

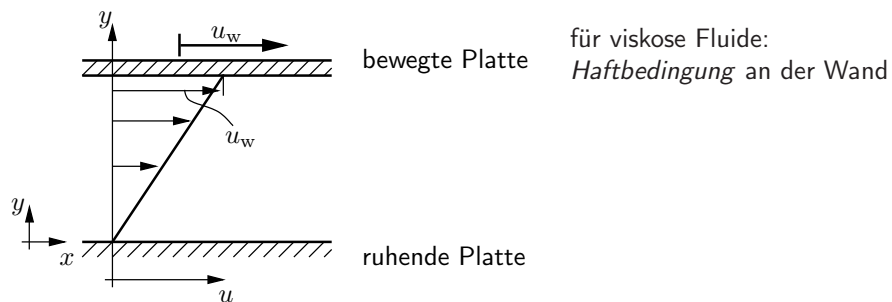
Nach einigen Umformungen lässt sich zeigen, dass die Formulierung eines Fluides mit exponentiell verschwindendem Gedächtnis äquivalent ist zum Fließgesetz einer Maxwell'schen Flüssigkeit.

2 Einfache Scherströmungen

Scherung, die nur in einer Ebene erfolgt.
In einer Richtung bleibt der Körper unverformt.



2.1 Laminare Couette-Strömung



Haftbedingung: Das Fluid hat an der Wand dieselbe Geschwindigkeit wie die Wand. Gilt nicht für reibungsfrei behandelte Strömungen.

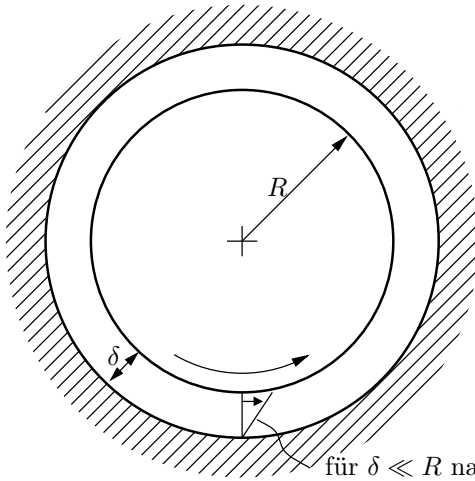
Der Impulsaustausch zwischen den Molekülen des Fluids mit den ruhenden Wandmolekülen bedingt eine makroskopisch gleiche Geschwindigkeit von Fluid und Wand an der Grenzfläche zwischen den beiden Medien.

Ausnahmen: Ungenügender Impulsaustausch, falls z.B. die freie Weglänge der Fluidmoleküle vergleichbar wird mit den charakteristischen geometrischen Abmessungen des Problems. Makroskopisch betrachtet hat das Fluid an der Grenzfläche eine endliche Geschwindigkeit relativ und tangential zur Wand.

Beispiele: Verdünnte Gase, Strukturen mit winzigen geometrischen Abmessungen.

Die Couette-Strömung ist ideal, um $\tau(\dot{\gamma})$ zu messen: In der Strömung existiert nur Scherung, die Schergeschwindigkeit $\dot{\gamma}$ ist im gesamten Strömungsfeld konstant. Eine ähnliche Strömung ist die Taylor-Couette Strömung, die im Spalt zwischen zwei konzentrischen Zylindern erzeugt wird. Falls die Spaltbreite klein gegenüber dem Radius der Zylinder ist, so ist die Taylor-Couette Strömung fast gleich der Couette-Strömung. Die Taylor-Couette Strömung wird in Viskosimetern, sowie in Lagern und Gleitlagern angewendet. In letzteren sind die Zylinder allerdings leicht exzentrisch, sodass eine radiale Kraft zwischen den Zylindern übertragen werden kann.

Taylor-Couette Strömung



Spalt zwischen konzentrischen
Zylindern.
Anwendungen: Couette-
Rheometer, Lagerschmierung.

für $\delta \ll R$ nahezu lineares
Geschwindigkeitsprofil

Berechnung der Couette-Strömung

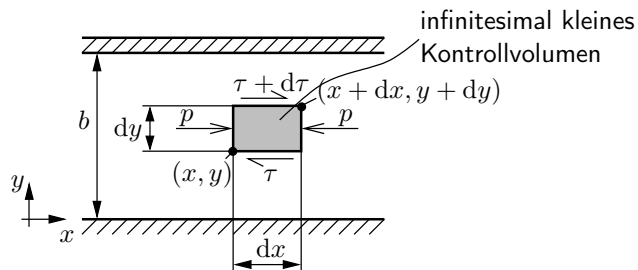
Voraussetzungen: kein Druckgefälle, keine Volumenkraft in Strömungsrichtung, stationäre Strömung, ausgebildete Strömung.

- keine Volumenkraft: horizontale Strömung, Schwerkraft wirkt normal zur Strömungsrichtung
- stationäre Strömung: keine zeitliche Änderung
- ausgebildete Strömung: keine Einlaufeffekte. Die Strömung ändert sich nicht in Strömungsrichtung.

Laminare Schichtenströmungen werden prinzipiell folgendermaßen berechnet:

1. An einem Kontrollvolumen wird das Kräftegleichgewicht aufgestellt. Integration liefert, nach Berücksichtigung der entsprechenden Randbedingungen, die Schubspannungsverteilung. Falls das Kontrollvolumen groß genug gewählt werden kann, so lässt sich τ unter Umständen sofort hinschreiben.
2. Integration der Schubspannungsverteilung und wiederum Einsetzen der entsprechenden Randbedingungen liefert die Geschwindigkeitsverteilung, z.B. $u(y)$.
3. Das bestimmte Integral zwischen den Berandungen der Strömung ergibt den Volumenstrom, eventuell den Volumenstrom pro Tiefeneinheit.

Kräftegleichgewicht



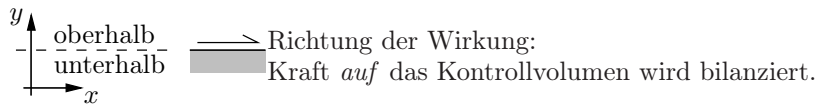
Vorzeichenkonvention für τ :

Positiv sei jene Schubspannung, die (1.) in *positiver Richtung* wirkt und (2.) von der Materie *oberhalb der Schnittebene* auf die *unterhalb* der Schnittebene befindliche Materie ausgeübt wird.

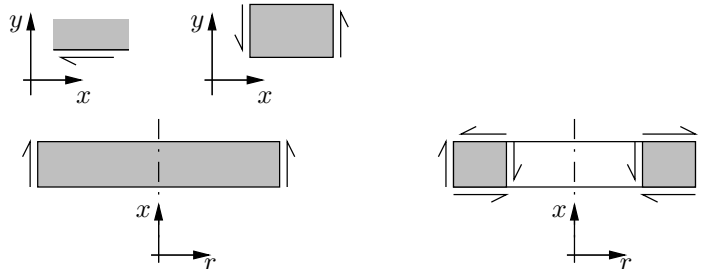
positive Richtung: mit Bezug auf die Koordinatenrichtung

oberhalb, unterhalb: mit Bezug auf die mit der Normalenrichtung der Schnittebene co-axialen Koordinate

Zur Vorzeichenkonvention



Beispiele für $\tau > 0$:

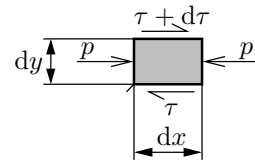


Achtung: BIRD et al. definieren die Schubspannung mit umgekehrtem Vorzeichen da sie die Schubspannung als in Richtung des negativen Geschwindigkeitsgradienten transportierten Impulsflusses interpretieren.

Kräftegleichgewicht in x -Richtung:

$$(dz) \cdot [dx(\tau + d\tau - \tau) + dy(p - p)] = 0$$

$$\Rightarrow d\tau = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau = \text{const}$$



stationäre Strömung: $\tau = \tau(\dot{\gamma})$, wg. $\tau = \text{const} \Rightarrow \dot{\gamma} = \text{const} = c_1$

$$\dot{\gamma} = \frac{du}{dy} = c_1 \quad \left| \int dy \Rightarrow u = c_1 y + c_2 \right.$$

Randbedingungen: Hier Haftbedingungen bei $y = 0$ und $y = b$.

$$u(y = 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0$$

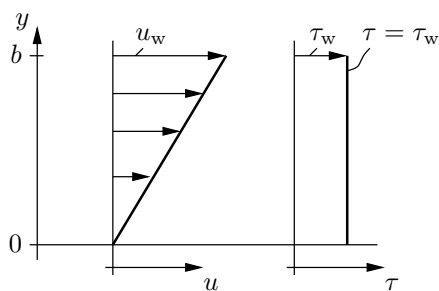
$$u(y = b) = u_w \quad \Rightarrow \quad c_1 = u_w/b$$

lineares Geschwindigkeitsprofil:

$$u(y) = u_w \frac{y}{b}$$

Geschwindigkeits- und Schubspannungsverteilung

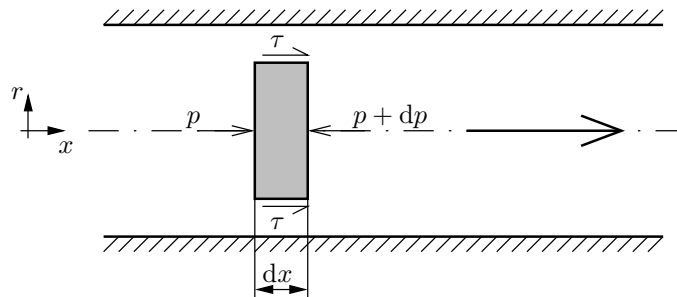
$$u(y) = u_w \frac{y}{b} \quad \tau = \tau_w = \text{const} \quad (2.1)$$



2.2 Laminare Rohrströmung

2.2.1 Allgemeine Beziehungen

Annahmen: stationäre, laminare, vollausgebildete Strömung; $\rho = \text{const}$, keine Vol.-Kräfte in Strömungsrichtung (horizontales Rohr)



vollausgebildete Strömung: $u = u(r)$, $v = 0$.

Flüssigkeit muss gegen hemmende Wirkung der inneren Reibung durch das ruhende Rohr bewegt werden: Druckgefälle in x -Richtung nötig.

Kräftegleichgewicht in x -Richtung:

$$\pi r^2 [p - (p + dp)] + 2\pi r \tau dx = 0 \quad \Rightarrow \quad -r dp + 2\tau dx = 0$$

Mit $dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx$ erhalten wir

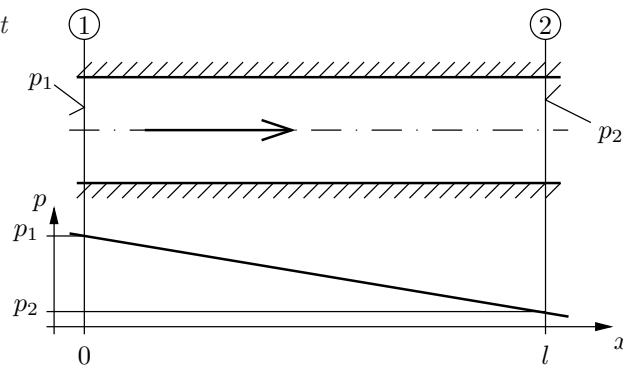
$$\underbrace{\frac{\partial p}{\partial x}}_{f(x)} = \frac{2}{r} \underbrace{\tau}_{f(r)}$$

... beide gleich, müssen *const* sein!

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \text{const}, \quad \tau = \frac{r}{2} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.2)$$

Druckgradient

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \text{const}$$



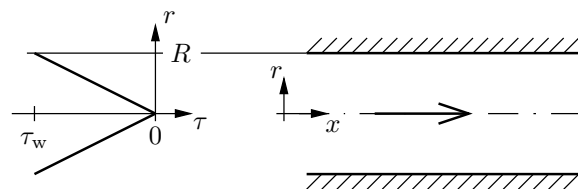
Druckabfall:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_2 - p_1}{l}; \quad \frac{\partial p}{\partial x} < 0! \quad (2.3)$$

Der Druckgradient ist in Strömungsrichtung negativ!

Schubspannung

$$\tau = \frac{r}{2} \frac{\partial p}{\partial x}$$



Die Schubspannung ist in der Rohrströmung negativ.

Die Wandschubspannung ist gegeben durch $\tau_w = \tau(r = R)$,

$$\tau_w = \frac{R}{2} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.4)$$

Somit gilt weiters

$$\frac{\tau}{\tau_w} = \frac{r}{R}, \quad \tau_w = -\frac{R}{2} \frac{p_1 - p_2}{l} \quad (2.5)$$

Geschwindigkeitsverteilung

Integration von $\dot{\gamma} = \frac{du}{dr}$, mit Haftbedingung $u(R) = 0$

$$u(r) = \int_R^r \frac{du}{dr'} dr' \quad (2.6)$$

Substitution $dr = \frac{R}{\tau_w} d\tau$ (aus Gl. (2.5): $r/R = \tau/\tau_w$),

$$u(\tau) = \frac{R}{\tau_w} \int_{\tau_w}^{\tau} \dot{\gamma}(\tau') d\tau' \quad (2.7)$$

Volumenstrom

$$\dot{V} = \int_A u dA = \int_0^R u 2\pi r dr \quad (2.8)$$

partielle Integration

$$\dot{V} = 2\pi \left[\underbrace{u \frac{r^2}{2}}_0, \text{ Haftbed.} \Big|_0^R - \int_0^R \frac{du}{dr} \frac{r^2}{2} dr \right]$$

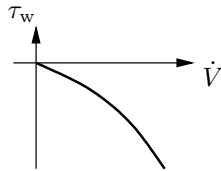
Substitution von $du/dr = \dot{\gamma}$, $r^2 = R^2\tau^2/\tau_w^2$, $dr = (R/\tau_w)d\tau$,

$$\dot{V} = -\frac{\pi R^3}{\tau_w^3} \int_0^{\tau_w} \dot{\gamma}(\tau) \tau^2 d\tau \quad (2.9)$$

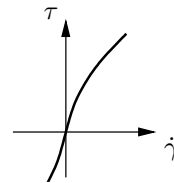
Fließkurve liefert, bei geg. τ_w , mit $\tau_w = (R/2) \partial p / \partial x$, den Volumenstrom für die Rohrströmung. Das Geschwindigkeitsprofil ist nicht nötig.

2.2.2 Kapillar-Viskosimeter

Gemessen, mit $\tau_w = -\frac{R}{2} \frac{p_1 - p_2}{l}$



Gesucht: $\tau(\dot{\gamma})$

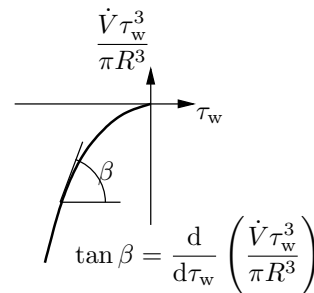


Gleichung (2.9) differenzieren:

$$\frac{d}{d\tau_w} \left(\frac{\dot{V} \tau_w^3}{\pi R^3} \right) = -\dot{\gamma} \tau_w^2$$

$$\dot{\gamma}(-\tau_w) = \frac{1}{\tau_w^2} \frac{d}{d\tau_w} \left(\frac{\dot{V} \tau_w^3}{\pi R^3} \right) \quad (2.10)$$

Weissenberg, Rabinowitsch und Mooney



Auf den vorigen Seiten wurde gezeigt, dass sich, nach Substitution der radialen Koordinate durch die Schubspannung, der Volumenstrom in der Rohrströmung durch eine einmalige Integration des Fließgesetzes berechnen lässt, Gl. (2.9). Einerseits zeigt dies eine Abkürzung der Rechnung, statt zweier Integrationen ist nur eine nötig, falls bei bekanntem Fließgesetz der Volumenstrom in der Rohrströmung ermittelt werden soll. Andererseits kann mittels Gl. (2.9) eine Anweisung gegeben werden, wie aus experimentellen Daten einer Rohrströmung ein unbekanntes Fließgesetz bestimmt wird. Diese Methode wird als Kapillar-Viskosimeter bezeichnet. Aus Daten des Volumenstroms bei verschiedenen Wand Schubspannungen, die sich ja sofort aus dem Druckgradient ergeben, können mit Hilfe der Beziehung von Weissenberg, Rabinowitsch und Mooney Punkte auf der Fließkurve ermittelt werden.

Auf den folgenden Seiten werden Geschwindigkeitsprofile und Werte für den Volumenstrom in der Rohrströmung für verschiedene Fließgesetze gezeigt.

2.2.3 Newtonsche Flüssigkeit

$$\dot{\gamma} = \frac{\tau}{\mu}$$

Voraussetzung: $\mu = \text{const} \Rightarrow T \approx \text{const}$.
Einsetzen in Gl. (2.9)

$$\dot{V} = -\frac{\pi R^3}{\tau_w^3} \int_0^{\tau_w} \frac{\tau^3}{\mu} d\tau = -\frac{\pi R^3 \tau_w}{4\mu}$$

Mit $\tau_w = -\frac{R}{2} \frac{p_1 - p_2}{l}$

$$\dot{V} = \frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{p_1 - p_2}{l} \quad (2.11)$$

Gesetz von Hagen und Poiseuille

Newtonsche Flüssigkeit, Geschwindigkeitsverteilung

Einsetzen von $\dot{\gamma} = \tau/\mu$ in Gl. (2.7),

$$u = \frac{R}{\tau_w} \int_{\tau_w}^{\tau} \frac{\tau'}{\mu} d\tau' = \frac{R}{\mu \tau_w} \left(\frac{\tau^2}{2} - \frac{\tau_w^2}{2} \right) = \frac{R \tau_w}{2\mu} \left(\frac{\tau^2}{\tau_w^2} - 1 \right)$$

$$u = \underbrace{\frac{R^2(p_1 - p_2)}{4\mu l}}_{u_{\max}} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad \text{parabolisches Profil!}$$

mittlere Geschwindigkeit u_m :

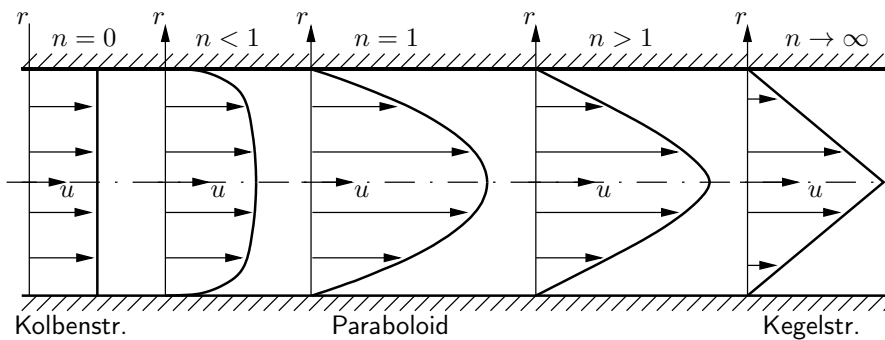
$$u_m = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{R^2(p_1 - p_2)}{8\mu l} = \frac{u_{\max}}{2}$$

2.2.4 Ostwald-de Waele Flüssigkeit

$\tau = m\dot{\gamma}^n$ in Gl. (2.9) und (2.7) einsetzen

$$\dot{V} = \frac{\pi R^3 (-\tau_w/m)^{1/n}}{3 + 1/n}$$

$$u = \frac{(-\tau_w/m)^{1/n} R}{1 + 1/n} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{1+1/n} \right]; \quad \frac{u_{\max}}{u_m} = \frac{1 + 3n}{1 + n}$$



2.2.5 Bingham Flüssigkeit

$\tau = -\tau_0 + \mu_B \dot{\gamma}$ für $\dot{\gamma} \leq 0$, $\tau \leq 0$

$$\dot{\gamma} = \begin{cases} \frac{\tau + \tau_0}{\mu_B} & \text{für } |\tau| \geq \tau_0 \\ 0 & \text{für } |\tau| \leq \tau_0 \end{cases}$$

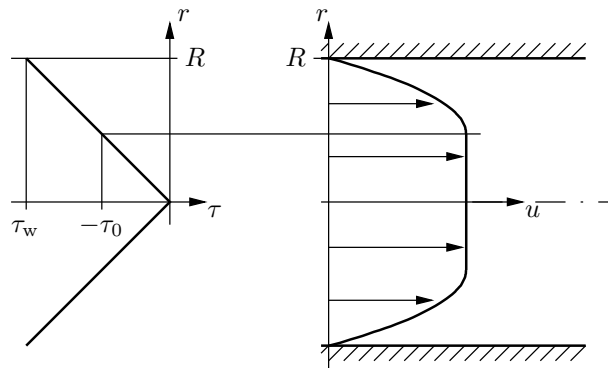
In Gl (2.9) einsetzen; $\dot{V} = 0$ für $|\tau_w| \leq \tau_0$, für $|\tau_w| \geq \tau_0$ gilt

$$\dot{V} = \frac{\pi R^4 (p_1 - p_2)}{8\mu_B l} \left[1 - \frac{4}{3} \frac{\tau_0}{|\tau_w|} + \frac{1}{3} \left(\frac{\tau_0}{|\tau_w|} \right)^4 \right]$$

Buckingham-Reiner Gleichung

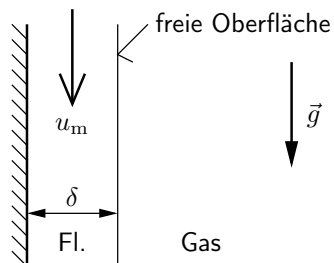
$$u = \frac{(p_1 - p_2) R^2}{4\mu_B l} \begin{cases} 1 - \frac{r^2}{R^2} - \frac{2\tau_0}{|\tau_w|} \left(1 - \frac{r}{R} \right) & \text{für } R \geq r \geq R \frac{\tau_0}{|\tau_w|} \\ \left(1 - \frac{\tau_0}{|\tau_w|} \right)^2 = const & \text{für } r \leq R \frac{\tau_0}{|\tau_w|} \end{cases}$$

Schubspannungs- und Geschwindigkeitsverteilung



konstante Geschwindigkeit für $r \leq R \frac{\tau_0}{|\tau_w|}$ (wie starrer Körper)
parabolisches Profil für $r \geq R \frac{\tau_0}{|\tau_w|}$

2.3 Filmströmungen



Reynolds-Zahl:

$$\text{Re} = \frac{u_m \delta}{\nu} = \frac{\dot{V}^{(L)}}{\nu} \quad (2.12)$$

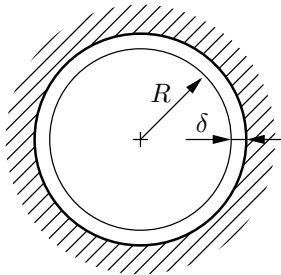
Re ... träge/viskose Kräfte

$\dot{V}^{(L)}$... längenbezogener Volumenstrom,
 $[\dot{V}^{(L)}] = \text{Fläche}/\text{Zeit}$

mittlere Geschwindigkeit $u_m = \frac{\dot{V}^{(L)}}{\delta}$

Als Rieselfilme in technischen Anwendungen für Wärme- und Stoffübertragung von Bedeutung.

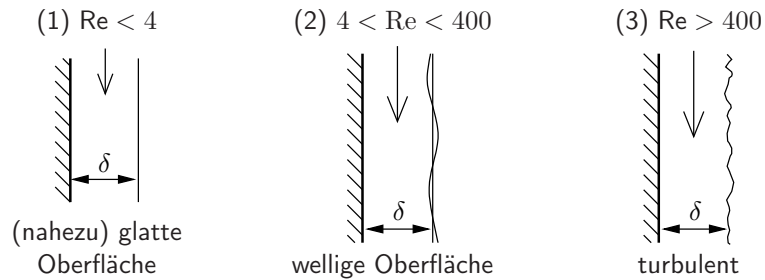
Osborne Reynolds, 1842–1912. Bekannt ist sein Farbfadenversuch.



Die Filmströmung an einem vertikalen Rohr kann, falls die Dicke des Filmes klein gegen den Radius ist, wie ein Film an einer ebenen Wand gerechnet werden. Da Rieselfilme typischerweise Dicken von weniger als 1 mm haben, wird die Bedingung $\delta \ll R$ leicht erfüllt.

2.3.1 Strömungsformen

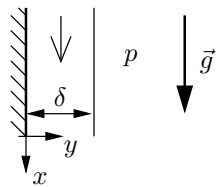
Experimenteller Befund:



(1), (2) ... laminare Strömung. Theoretischer Zusammenhang zw. u_m und δ bleibt bestehen.

$Re = 4$ ist keine Stabilitätsgrenze. Störungen werden ab $Re \rightarrow 0$ angefacht, die Anfachsungsrate wird aber erst ab $Re \approx 4$ groß. Bei $Re = 400$ plötzlicher Umschlag zu turbulenter Strömung (BENJAMIN, J. Fluid Mech. 2, 1957).

2.3.2 Laminare Filmströmung



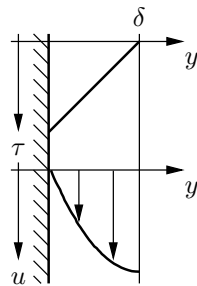
Annahmen:

$p = const$, wegen $\rho_{Gas} \ll \rho_{Fl.}$, d.h., kein hydrostatischer Druckgradient

$\mu_{Gas} \ll \mu_{Fl.}$: Oberfläche quasi reibungsfrei.

\Rightarrow Randbedingung: $\tau(\delta) = 0$.

Newtonsches Fluid, $\mu = const$ ($T \approx const$)



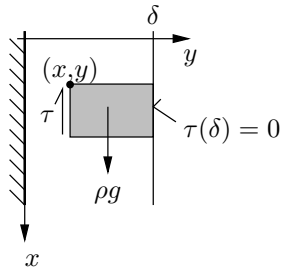
$$\tau = \rho g(\delta - y) \quad (2.13)$$

$$u(y) = \frac{g\delta^2}{\nu} \left[\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 \right]; \quad u_{\max} = u(\delta) = \frac{1}{2} \frac{g\delta^2}{\nu}$$

$$\dot{V}^{(L)} = \int_0^\delta u \, dy = \frac{1}{3} \frac{g\delta^3}{\nu}; \quad u_m = \frac{1}{3} \frac{g\delta^2}{\nu} \quad (2.14)$$

Berechnung der laminaren Filmströmung

Kräftegleichgewicht:

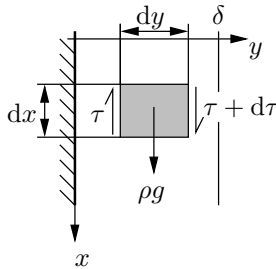


Das Kontrollvolumen wird möglich groß gewählt. Es enthält die freie Oberfläche. Die Randbedingung $\tau(\delta) = 0$ wird damit schon im Kräftegleichgewicht berücksichtigt.

$$\rho g dx (\delta - y) - \tau dx = 0$$

$$\Rightarrow \tau = \rho g (\delta - y)$$

Zum Vergleich: kleines Kontrollvolumen



$$(\tau + d\tau - \tau) dx + \rho g dx dy = 0$$

$$\frac{d\tau}{dy} = -\rho g$$

$$\text{Integration: } \tau = -\rho g y + c_1$$

$$\text{Randbedingung } \tau(\delta) = 0 \Rightarrow c_1 = \rho g \delta$$

$$\tau = \rho g (\delta - y)$$

Schubspannungsansatz für Newtonsches Fluid einsetzen: $\tau = \mu \frac{du}{dy}$

$$\frac{du}{dy} = \frac{\rho g}{\mu} (\delta - y)$$

Randbedingung $u(0) = 0$ wird durch bestimmtes Integral berücksichtigt, $u(y) = \int_0^y \frac{du}{dy'} dy'$.

$$u(y) = \frac{\rho g}{\mu} \left(\delta y - \frac{y^2}{2} \right) = \frac{g \delta^2}{\nu} \left(\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \frac{y^2}{\delta^2} \right)$$

$$\dot{V}^{(L)} = \frac{g \delta^2}{\nu} \int_0^\delta \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \frac{y^2}{\delta^2} dy = \frac{g \delta^2}{\nu} \left[\frac{\delta}{2} - \frac{\delta}{6} \right] = \frac{1}{3} \frac{g \delta^3}{\nu}$$

2.3.3 Turbulente Filmströmung

Asymptotische Theorie der Turbulenz ergibt für glatte Wand

$$\frac{u(y)}{u_\tau} = C_1 \ln \frac{u_\tau y}{\nu} + C_2 \quad (2.15)$$

u_τ ... Schubspannungsgeschwindigkeit, $u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho}$
hier, aus Gl. (2.13): $\tau_w = \rho g \delta \Rightarrow u_\tau = \sqrt{g\delta}$.

experimentell bestimmt:

$$C_1 \approx 2,5; \quad C_2 = 5,5$$

Integration $\frac{1}{\delta} \int_0^\delta u \, dy$ ergibt die mittlere Geschwindigkeit

$$\frac{u_m}{\sqrt{g\delta}} = C_1 \ln \frac{\sqrt{g\delta^3}}{\nu} + C_3, \quad C_3 = C_2 - C_1 \approx 3 \quad (2.16)$$

Turbulente Filmströmung, Berechnung

Mit Gl. (2.15) ist die maximale Geschwindigkeit

$$\frac{u_{\max}}{u_\tau} = C_1 \ln \frac{u_\tau \delta}{\nu} + C_2$$

Damit ist der Geschwindigkeitsdefekt

$$\frac{u_{\max} - u(y)}{u_\tau} = C_1 \ln \frac{\delta}{y}$$

Der Geschwindigkeitsdefekt wird über die Filmdicke integriert,

$$\frac{u_{\max} - u_m}{u_\tau} = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \frac{u_{\max} - u(y)}{u_\tau} \, dy = \frac{C_1}{\delta} \int_0^\delta \ln \frac{\delta}{y} \, dy$$

Substitution von $dy = \delta \, d\left(\frac{y}{\delta}\right)$

$$\frac{u_{\max} - u_m}{u_\tau} = -C_1 \int_0^1 \ln \frac{y}{\delta} \, d\frac{y}{\delta} = -C_1 \left[\frac{y}{\delta} \ln \frac{y}{\delta} - \frac{y}{\delta} \right]_0^1 = C_1$$

Mit $\frac{u_m}{u_\tau} = \frac{u_{\max}}{u_\tau} - \frac{u_{\max} - u_m}{u_\tau}$ folgt Gl. (2.16).

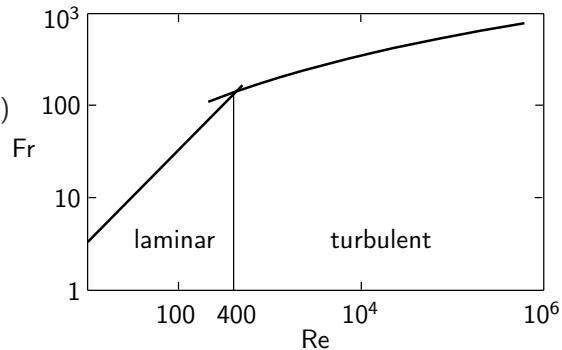
Dimensionslose Darstellung

Froude-Zahl:

$$Fr = \frac{u_m^2}{g\delta} \quad (2.17)$$

Fr ... $\frac{\text{träge Kräfte}}{\text{Schwerkraft}}$

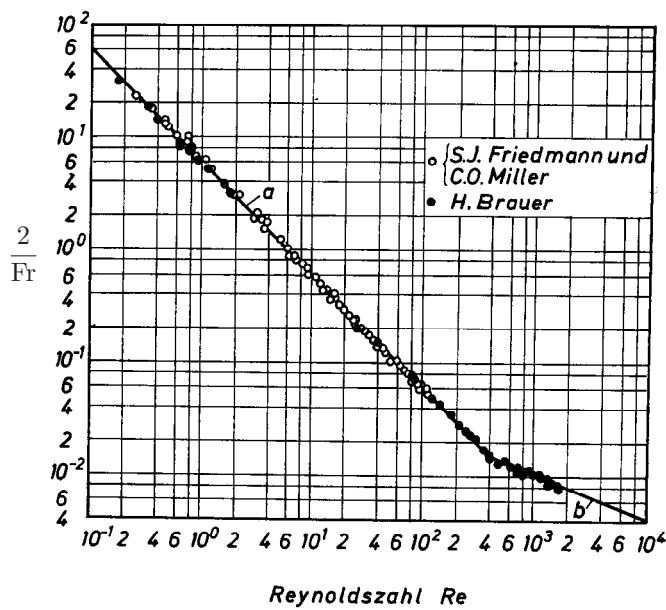
Oft: $Fr = \frac{u_m}{\sqrt{g\delta}}, Fr = \frac{g\delta}{u_m^2}$.



Fr beschreibt den Einfluss der Schwerkraft auf die Strömung. Aus Gl. (2.16) folgt für turbulente Strömung

$$\sqrt{Fr} = C_1 \ln \frac{Re}{\sqrt{Fr}} + C_2 \quad (2.18)$$

Vgl. laminar: $Fr = \frac{1}{3}Re$, Gl. (2.14).



Messwerte. (Abb. 14.3 aus BRAUER.)

3 Bewegung von festen Teilchen, Tropfen und Blasen

3.1 Grundgleichungen für inkompr. Strömungen

Inkompressibel: $\rho = \text{const}$

Voraussetzungen: • $|\vec{v}|^2 \ll c^2$, $c \dots$ Schallgeschwindigkeit
• kleine Temperaturunterschiede

Gesucht: \vec{v} , p als Funktion von \vec{x} und t ;
 $\vec{v} = (u, v, w)$, $\vec{x} = (x, y, z)$.

Beschreibung durch Differentialgleichungen im Inneren und Randbedingungen.

3.1.1 Differentialgleichungen

Kontinuitätsgleichung

Kontinuitätsgleichung: Massenerhaltung. Masse geht nicht verloren. Wegen $\rho = \text{const}$ gleichbedeutend mit Erhaltung des Volumens.

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \tag{3.1}$$

Kontinuitätsgleichung

In kartesischen Koordinaten

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Bewegungsgleichung

Bewegungsgleichung: Lokale Formulierung des 2. Newtonschen Gesetzes. Masse \times Beschleunigung = Summe der auf den Körper wirkenden Kräfte.

Für Newtonsches Fluid mit $\rho = \text{const}$, $\mu = \text{const}$:

$$\underbrace{\frac{D\vec{v}}{Dt}}_{\text{Beschl.}} = \underbrace{-\frac{1}{\rho}\text{grad}p}_{\text{Druck-}} + \underbrace{\nu\Delta\vec{v}}_{\text{Reibungs-}} + \underbrace{\vec{g}}_{\text{Schwerkraft/m}} \quad (3.2)$$

Navier-Stokessche Gleichungen

$$\frac{D}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}}_{\text{instat.}} + \underbrace{\vec{v} \cdot \text{grad}}_{\text{konv. Abl}} \quad \dots \text{ substantielle Ableitung}$$

$\Delta \dots$ Laplace Operator, $\Delta = \text{div grad}$

Terme in den Navier-Stokesschen Gleichungen

Die substantielle Ableitung bzw. hier die substantielle Beschleunigung ist jene Beschleunigung, die ein in der Strömung mitbewegtes Materieteilchen dadurch erfährt, dass es an einen Ort mit unterschiedlicher Geschwindigkeit bewegt wird. In einer stationären Strömung ist die lokale oder partielle Beschleunigung gleich Null, die konvektive und damit die substantielle Beschleunigung ist aber ungleich Null, falls Geschwindigkeitsgradienten vorhanden sind. Ein Beispiel wäre die stationäre Düsenströmung.

Die substantielle Ableitung wird auch materielle Ableitung genannt.

Der Gradient des Druckes ist ein Vektorfeld, das in Richtung des größten Druckanstiegs zeigt. Wegen des negativen Vorzeichens besagt der Druckkraftterm, dass auf ein Fluidelement eine Kraft in Richtung des größten Druckgefälles wirkt.

Die Schwerkraft ist eine Volumenkraft. Auf ein freigeschnittenes, endlich großes Kontrollvolumen wirkt sie auf die Masse im Inneren des Volumens. Druck- und Reibungskräfte wirken an der Oberfläche des Kontrollvolumens.

Die Felder der Druck- und der Schwerkraft sind konservative Vektorfelder: Der Wert eines Wegintegrals zwischen zwei Punkten in einem konservativen Vektorfeld ist unabhängig vom gewählten Weg. Daraus folgt unmittelbar, dass das Integral entlang eines geschlossenen Weges gleich Null ist. Wird ein Teilchen in

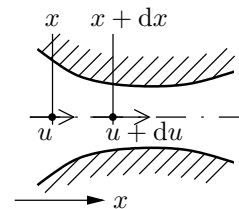
einem Druck- oder Schwerefeld verschoben, so muss eine gewisse Arbeit verrichtet werden. Diese Arbeit ist durch das Wegintegral gegeben, Arbeit = Kraft \times Weg. Wird das Teilchen an den Ursprungsort zurückgebracht, wird dieselbe Arbeit zurück gewonnen.

Substantielle Ableitung

Die substantielle Ableitung ist gleich der Summe der instationären, auch partiellen oder lokalen Zeitableitung, und der konvektiven Ableitung. Die instationäre Ableitung entspricht der zeitlichen Änderung der Strömung. Die konvektive Ableitung einer Größe gibt die Änderung an, die ein Teilchen dadurch erfährt, dass es mit der Strömung an einen Ort bewegt wird, an dem die betreffende Größe einen unterschiedlichen Wert hat.

Eine konvektiv beschleunigte Strömung ist beispielsweise die eindimensionale, stationäre Strömung durch eine Venturi-Düse. Ein Teilchen, das sich vom Ort x an den Ort $x + dx$ bewegt, benötigt dafür die Zeit $dt = dx/u$. Es erfährt dabei die Beschleunigung

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{dx/u} = u \frac{du}{dx}.$$



Die substantielle Beschleunigung ist gleich der konvektiven Beschleunigung, die instationäre Beschleunigung ist gleich Null,

$$\frac{Du}{Dt} = u \frac{du}{dx}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Eine konvektiv nicht beschleunigte Strömung ist zum Beispiel die instationäre Strömung durch ein gerades Rohr mit konstantem Querschnitt. In diesem Fall ist die substantielle Beschleunigung gleich der instationären Beschleunigung.

Ein Teilchen in der Strömung erlebt dieselbe Beschleunigung, die ein ruhender Beobachter an einem festen Ort in der Strömung misst.

Die konvektive Beschleunigung ist quadratisch in \vec{v} und damit der einzige nicht-lineare Term in den Navier-Stokesschen Gleichungen.

Vektoroperatoren

Die Vektoroperatoren div, grad und Δ werden günstigerweise mittels des Nabla-Operators $\vec{\nabla}$ dargestellt. In kartesischen Koordinaten lautet dieser:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Beachte: In symbolischer Darstellung ist der einzige Unterschied zwischen div und grad der Punkt zwischen dem Nabla-Operator und seinem Argument.

Die Divergenz verringert die tensorielle Stufe ihres Argumentes um eins, der Gradient erhöht sie um eins. Die Divergenz eines Vektorfeldes ist ein Skalarfeld, der

Operator	Definition	symbolisch	indiziert
$\operatorname{div} \vec{a}$	$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \vec{a} \cdot d\vec{S}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{a}$	$\frac{\partial a_i}{\partial x_i}$
$\operatorname{grad} \vec{a}$	$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \vec{a} d\vec{S}$	$\vec{\nabla} \vec{a}$	$\frac{\partial a_j}{\partial x_i}$
$\operatorname{div} \operatorname{grad} \vec{a}$		$\Delta \vec{a} = \vec{\nabla}^2 \vec{a}$	$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_i}$
$\operatorname{rot} \vec{a}$	$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S d\vec{S} \times \vec{a}$	$\vec{\nabla} \times \vec{a}$	$\varepsilon_{ijk} \frac{\partial a_j}{\partial x_i}$

Vektoroperatoren

Gradient eines Skalarfeldes ein Vektorfeld und der Gradient eines Vektorfeldes führt zu einem Feld von Tensoren zweiter Stufe.

Die Divergenz eines Vektorfeldes ist der aus einem Kontrollvolumen fließende Strom.

Der Gradient eines skalaren Feldes zeigt in Richtung des stärksten Anstiegs.

Die Rotation eines Vektorfeldes ist ebenfalls ein Vektorfeld. Die Rotation beschreibt die Drehung in einem Kontrollvolumen um seinen Mittelpunkt.

3.1.2 Randbedingungen

Vollständiges Gleichungssystem:

- Grundgleichungen (Erhaltungs- und Zustandgleichungen)
- Randbedingungen
- Anfangsbedingungen (bei instat. Strömungen)

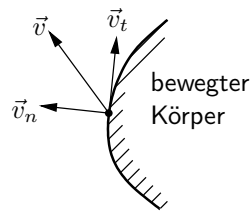
Erst *alle* Gleichungen, inklusive Rand- und ev. Anfangsbedingungen, ergeben ein vollständiges Gleichungssystem.

Erhaltungsgleichungen sind die Kontinuitäts- die Bewegung und die Energiegleichung. Die Energiegleichung wird hier nicht behandelt, siehe die Lehrveranstaltung zur Wärmeübertragung oder Strömung realer Fluide. Zustandsgleichungen sind die thermische Zustandsgleichung, z.B. die ideale Gasgleichung, sowie die kalorische Zustandsgleichung. Die thermische Zustandsgleichung reduziert sich hier auf $\rho = \text{const.}$

Ein Beispiel dafür, dass erst die Gesamtheit aller Gleichungen ein Problem beschreiben, sei das Wachstum einer sphärischen Blase. Die Strömung ist drehtungsfrei, $\text{rot}\vec{v} = 0$, deshalb ist auch der Reibungsterm in den Navier-Stokeschen Gleichungen gleich Null. Es scheint, als wäre das Aufblasen einer Blase unabhängig von der Viskosität der umgebenden Flüssigkeit. Dem ist aber nicht so, die Viskosität spielt über die Reibungsnormalspannungen an der Grenzfläche zwischen Gas und Flüssigkeit eine Rolle.

Randbedingung an festen Wänden

$$\vec{v}_{\text{Fl.}} = \vec{v}_{\text{Wand}} \quad (3.3)$$



Aufteilung in Normal- und Tangentialkomponente, v_n und \vec{v}_t .

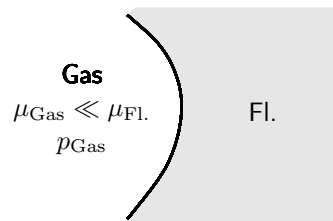
$v_{n,\text{Fl.}} = v_{n,\text{Wand}}$... undurchlässige Wand; meist erfüllt.
Ausnahme: poröse Wände.

$\vec{v}_{t,\text{Fl.}} = \vec{v}_{t,\text{Wand}}$... Haftbedingung!
Ausnahme bei reibungsfrei behandelten Strömungen (Flugzeug, Turbinenschaufeln) und an der Grenze zu mikroskopischer Beschreibung: verdünnte Gase, kleine Abmessungen.

Randbedingungen an der Oberfläche einer Flüssigkeit

Grenzfläche zu Gas,

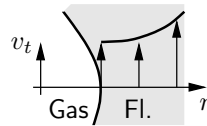
Voraussetzungen: $\mu_{\text{Gas}} \ll \mu_{\text{Fl.}}$, $p_{\text{Gas}} = \text{const}$ ($\rho_{\text{Gas}} \ll \rho_{\text{Fl.}}$).



- dynamische Randbedingungen:
Spannungsgleichgewicht an der Oberfläche
- kinematische Randbedingung:
An der Oberfläche befindliche Flüssigkeitsteilchen bleiben an der Oberfläche.

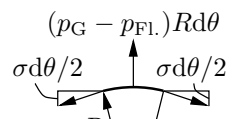
Dynamische Randbedingungen

Das Gas nimmt keine Schubspannungen auf
 \Rightarrow Geschwindigkeitsgradient in Normalenrichtung verschwindet.



$$\frac{\partial v_t}{\partial n} = 0 \quad (3.4)$$

Druck und Oberflächenspannung, ohne Reibungsnormalspannungen:



$$p_G - p_{Fl.} = \sigma \underbrace{\left(\frac{1}{R_I} + \frac{1}{R_{II}} \right)}_{\text{Krümmung}} \quad (3.5)$$

Young-Laplace Gleichung

$R_I, R_{II} \dots$ Hauptkrümmungsradien

$\sigma \dots$ Oberflächenspannung, $[\sigma] = \text{Kraft/Länge}$.

Zylinder, $R = R_I, R_{II} \rightarrow \infty$: $p_G - p_{Fl.} = \sigma/R$

Kugel, $R = R_I = R_{II}$: $p_G - p_{Fl.} = 2\sigma/R$

Die Reibungsnormalspannungen lauten, für ein Newtonsches Fluid,

$$\sigma_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\tilde{\mu} - \frac{2}{3}\mu \right) \text{div} \vec{v}$$

Hierin ist $\tilde{\mu}$ die Volumenviskosität. Diese wird oft gleich Null gesetzt (BIRD et al., S. 79).

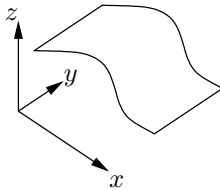
Das Kräftegleichgewicht lautet, für eine gekrümmte Fläche mit R_I für $d\theta$ wie oben und mit einem Radius R_{II} für einen Sektor $d\varphi$,

$$(p_G - p_{Fl.})R_I d\theta R_{II} d\varphi = \sigma(R_{II} d\varphi d\theta + R_I d\theta d\varphi).$$

Der Druck ist in jenem Medium größer, dessen Oberfläche, von außerhalb des Mediums gesehen, konvex ist.

Kinematische Randbedingung

Der Ort einer freien Oberfläche ist durch die Bewegung der Flüssigkeit in der Oberfläche gegeben. Die Oberfläche ist eine *materielle* Fläche.



$$z = \eta(x, y, t) \Rightarrow z - \eta(x, y, t) = 0$$

oder: $F(x, y, z, t) = 0$; deshalb

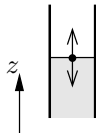
$$\frac{DF}{Dt} = 0 \quad (3.6)$$

kinematische Randbedingung

kartesische Koordinaten:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

Der Ort einer freien Oberfläche ist nicht vorgegeben, sondern ergibt sich aus der Strömung. Da die Oberfläche gerade dadurch definiert ist, dass Flüssigkeit nicht über die Oberfläche strömt, wird die Bewegung der Oberfläche durch ihre Normalengeschwindigkeit beschrieben. Das leistet die kinematische Randbedingung. Beispiel: schwingende Wassersäule in einem Rohr



$$z = h(t) \Rightarrow F = z - h(t) = 0$$

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + w \frac{\partial F}{\partial z} = -h' + w \cdot 1 = 0$$

$$w = -h'$$

Die kinematische Randbedingung besagt, dass Fluidteilchen, die einmal in der Oberfläche waren, immer in ihr bleiben. Man sagt, die Oberfläche besteht aus *materiellen* Punkten, sie ist eine *materielle* Fläche.

Obiges stimmt natürlich nur im Rahmen der Kontinuumstheorie. Ausnahmen wäre überdies Stoff- oder Phasenübergänge über die Grenzfläche, z.B. Verdampfen: Flüssigkeit strömt über die Oberfläche, wo sie verdampft. In solchen Fällen müsste die kinematische Randbedingung entsprechend modifiziert werden.

3.2 Mechanische Ähnlichkeit; Kennzahlen

3.2.1 Dimensionslose Darstellung

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad y^* = \frac{y}{L}, \quad u^* = \frac{u}{U}, \quad t^* = t \frac{U}{L},$$

$$p^* = \frac{p}{\rho U^2}, \quad \vec{g}^* = \frac{\vec{g}}{|\vec{g}|}, \quad \vec{\nabla}^* = L \vec{\nabla}, \quad \Delta^* = L^2 \Delta$$

char. Größen: Geschw. U , Länge L , Druck ρU^2 , Schwerebeschl. $g = |\vec{g}|$; Stoffwerte $\mu, \rho = \text{const.}$

Dimensionslose Grundgleichungen:

$$\vec{\nabla}^* \cdot \vec{v}^* = 0, \quad \frac{D\vec{v}^*}{Dt^*} = -\vec{\nabla}^* p^* + \underbrace{\frac{\nu}{UL}}_{1/\text{Re}} \Delta^* \vec{v}^* + \underbrace{\frac{gL}{U^2}}_{1/\text{Fr}} \vec{g}^*$$

Zwei Strömungen, Re und Fr gleich \Rightarrow dim.-lose Diff.-Gl. identisch
Auch dim.-lose Rand- und Anfangsbed. gleich \Rightarrow *mechanisch ähnlich*

Falls für zwei Strömungen die Re- und Fr-Zahlen gleich sind, so gelten für beide Strömungen dieselben dimensionslosen Grundgleichungen. Sind auch die dimensionslosen Rand- und Anfangsbedingungen gleich, so werden die beiden Strömungen durch mathematisch identische Gleichungssysteme beschrieben. Die beiden Strömungen sind einander mechanisch ähnlich, d.h., die dimensionslosen Variablen haben an den durch die gleichen dimensionslosen Koordinaten beschriebenen Orten denselben Wert.

Gleiche Randbedingungen erfordert, dass die Randbedingungen an denselben dimensionslosen Orten gestellt werden. Die beiden Strömungen müssen einander geometrisch ähnlich sein: Alle Abmessungen werden um denselben Faktor skaliert.

Werden die Grundgleichungen dimensionslos gemacht, erhält man die Re- und Fr-Zahl. Die dimensionslosen Randbedingungen liefern weitere Kennzahlen, die auf den folgenden Seiten dargestellt werden.

Randbedingungen an festen Wänden

stationär, ruhend:

$$\vec{v}_{Fl.}^* = 0$$

instationär, z.B. schwingende Wand mit char. Frequenz ω :

$$\vec{v}_{Fl.}^* = \vec{v}_{fest}^*(\omega t) = \vec{v}_{fest}^* \left(\underbrace{\frac{\omega L}{U}}_{Sr} t^* \right)$$

Strouhal-Zahl:

$$Sr = \frac{\omega L}{U} \quad (3.7)$$

Sr ... reduzierte (dimensionslose) Frequenz

Randbedingungen an freien Oberflächen

kinemat. Randbedingung:

$$\frac{DF^*}{Dt^*} = 0$$

dyn. Randbedingung:

$$p_{Gas}^* - p_{Fl.}^* = \underbrace{\frac{\sigma}{\rho U^2 L}}_{1/We} \left(\frac{1}{R_I} + \frac{1}{R_{II}} \right)$$

Weber-Zahl:

$$We = \frac{\rho U^2 L}{\sigma} \quad (3.8)$$

We ... träge Kräfte/Oberflächenspannungskräfte

3.2.2 Vergleich zweier Strömungen

Zwei Strömungen, „Original“ und „Modell“, sind verschieden,

- falls mindestens eine Referenzgröße unterschiedlich ist (z.B. die Länge L).

Die beiden Strömungen sind mechanisch ähnlich, falls sie

- geometrisch ähnlich sind und
- die vier Kennzahlen Reynolds, Froude, Strouhal und Weber

$$\text{Re} = \frac{\rho UL}{\mu} = \frac{UL}{\nu}, \quad \text{Fr} = \frac{U^2}{gL},$$

$$\text{Sr} = \frac{\omega L}{U}, \quad \text{We} = \frac{\rho U^2 L}{\sigma}$$

übereinstimmen.

Nicht immer sind alle oben angegebenen Kennzahlen für eine Strömung relevant. Die Strouhal-Zahl ist nur bei instationären Strömungen von Bedeutung. Die Weber-Zahl nur dann, wenn die Oberflächenspannung eine Rolle spielt, z.B. für die Form einer Blase. Die Froude-Zahl ist für Strömungen von Bedeutung, in denen die Schwerkraft eine Rolle spielt, z.B. für das von Schiffen erzeugte Wellenbild. Die Reynolds-Zahl ist praktisch immer wichtig.

Kennzahlen können voneinander abhängig sein. Im Rieselfilm besteht eine Beziehung zwischen Fr und Re. Bei der Wirbelablösung hinter einem stumpfen Körper ist $\text{Sr} = f(\text{Re})$.

Oft spielen weitere Kennzahlen eine Rolle. In der geschichteten Strömung zweier Flüssigkeiten sind die Verhältnisse ρ_1/ρ_2 und μ_1/μ_2 relevant. In kompressiblen Strömungen muss die Machzahl $M = U/c$ beachtet werden.

Beispiele zum Versuchswesen

Windkanal, Medium Luft, $L_M : L = 1 : 10$

$$\text{Re}_M = \text{Re}, \nu_M = \nu \quad \Rightarrow \quad U_M = U \frac{L}{L_M} \frac{\nu_M}{\nu}$$

Falls $U > 35$ m/s wäre U_M im Überschall. (Teurer) Ausweg: ν_M modifizieren: Kryogener Windkanal oder Hochdruckwindkanal.

Schleppkanal, Medien Wasser und Luft, $L_M : L = 1 : 20$

$$\text{Fr}_M = \text{Fr} \quad \Rightarrow \quad U_M = U \sqrt{L_M/L}$$

$$\text{Re}_M = \text{Re} \quad \Rightarrow \quad \nu_M = \nu \frac{U_M L_M}{U L} = \nu \left(\frac{L_M}{L} \right)^{3/2}$$

Eine Flüssigkeit mit $\nu_M = 0,011\nu$ gibt es nicht. Messungen müssen bei zu kleiner Re-Zahl durchgeführt werden.

Beispiele:

ICE, $U = 250$ km/h = 69 m/s; Luft: $\nu = 1,54 \cdot 10^{-4}$ m²/s, $c = 340$ m/s. Mit $L = 3$ m ist $\text{Re} = 1,4 \cdot 10^7$, $M = 0,2$.

Kryogener Windkanal Köln:

$T_M = 100$ K, $\nu_M = 2,03 \cdot 10^{-6}$ m²/s, $c_M = 202$ m/s.

$$L_M : L = 1 : 20, U_M = 45 \text{ m/s} \quad \Rightarrow \quad \text{Re}_M = 3,3 \cdot 10^{-6}$$

$$M_M = 45/202 = 0,22$$

Die Reynoldszahl im Modell ist ca. ein Viertel der Reynoldszahl im Original. Sowohl im Original als auch im Modell ist die Machzahl $< 0,3$. Die Strömung kann in beiden Fällen als inkompressibel betrachtet werden.

Hochdruckwindkanal Göttingen:

$p_M = 100$ bar, $\nu_M = 1,74 \cdot 10^{-7}$, $c_{M,N_2} = 380$ m/s.

$$L_M : L = 1 : 50, U_M = 35 \text{ m/s} \quad \Rightarrow \quad \text{Re}_M = 1,2 \cdot 10^{-7}$$

$$M_M = 0,09$$

Im Hochdruckwindkanal sind die Reynoldszahlen in Modell und Original fast genau gleich.

(Aus: LOOSE et al., Exp. in Fluids, 40, 643–653, 2006.)

Schleppkanal:

MS Wachau:

$L = 62,7$ m, $U = 26$ km/h = 7,2 m/s; Wasser: $\nu = 1 \cdot 10^{-6}$ m²/s.
Mit der Schiffslänge L gebildet ist $Re = 4,5 \cdot 10^8$, $Fr = U^2/gL = 0,084$.

$$L_M : L = 1 : 20, Fr = Fr_M \Rightarrow U_M = 1,61 \text{ m/s}$$

$$Re_M = Re/20^{3/2} = 5,03 \cdot 10^6; \quad Re_M/Re = 0,011.$$

Wegen $Fr_M = Fr$ kann der Wellenwiderstand im Schleppkanal untersucht werden. Der gemessene Reibungswiderstand muss korrigiert werden. Oft werden Stolperdrähte oder ähnliches angebracht, um einen früheren Umschlag zu turbulenter Strömung zu erzwingen.

(Stoffwerte: VDI-Wärmeatlas, 9. Aufl., 2002, sowie NIST Chemistry webbook, <http://webbook.nist.gov/chemistry>.)

ZLOKARNIK (Dimensional Analysis and Scale-up in Chemical Engineering. Springer, 1991. S. 46f) berichtet über eine originelle Idee, den Reibungswiderstand richtig zu erfassen: Es wird ein Modell des an der Wasserlinie gespiegelten Schiffsrumpfes gebaut. Dieser Körper wird vollständig untergetaucht. Die Froude-Zahl spielt nun keine Rolle, der doppelte Reibungswiderstand des Schiffsrumpfes kann bei der gleichen Reynoldszahl wie im Original gemessen werden.

3.2.3 Widerstandsbeiwert

Neben den Feldgrößen p und \vec{v} sind vor allem die *Kräfte*, die auf umströmte Körper wirken, von Interesse.

Kraft normal zur Strömungsrichtung: dynamischer Auftrieb F_A , hier nicht behandelt.

Kraft parallel zur Strömungsrichtung: Widerstandskraft F_W ,

$$F_W = c_w \frac{1}{2} \rho U^2 L^2 \quad (3.9)$$

c_w ... Widerstandsbeiwert; wird durch Gl. (3.9) *definiert*
 L^2 ... Querschnittsfläche, z.B. $L^2 = R^2 \pi$ für Kugel

Für c_w als dimensionslose Größe gilt, wie für die dim.-losen Feldgrößen,

$$c_w = c_w(\text{Re}, \text{Fr}, \text{Sr}, \text{We}) \quad (3.10)$$

Morton-Zahl

Aus Re , Fr und We lässt sich eine weitere Kennzahl bilden, die Morton-Zahl, die nur Stoffeigenschaften sowie g enthält:

$$\text{Mo} = \frac{\text{We}^3}{\text{Re}^4 \text{Fr}} = g \nu^4 \frac{\rho^3}{\sigma^3}$$

Wasser bei 20 °C: $\text{Mo} = 2,6 \cdot 10^{-11}$.

(Zahlenwerte: VDI-Wärmeatlas, 9. Aufl., 2002)

3.3 Hydrostatischer Auftrieb

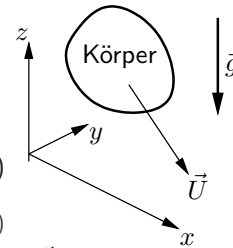
Navier-Stokesche Gleichungen linear in p
 \Rightarrow additive Zerlegung des Druckes möglich.

1. Aufteilung des Druckes

$$p = p_h + p_U, \quad \text{grad} p_h = \rho \vec{g} \quad (3.11)$$

p_h ... hydrostatischer Druck, z.B.: $p_h = \rho g(h - z)$

p_U ... restlicher, durch $\vec{U} \neq 0$ verursachter Druckanteil



2. Elimination des Schwerkraftterms durch Gradient des hydrostatischen Druckes; Einsetzen von (3.11) in (3.2) ergibt

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p_U + \nu \Delta \vec{v} \quad (3.12)$$

Berechnung der Strömung um Körper gegebener Gestalt mittels Bewegungsgleichung ohne Schwerkraftterm. Ergibt p_U , Abweichung vom hydrostatischen Druck.

3.3.1 Archimedessches Gesetz

Von Fluid auf Körper ausgeübte Kraft

$$\vec{F} = \vec{F}_U + \vec{F}_h = \vec{F}_W + \vec{F}_A + \vec{F}_h$$

\vec{F}_h ... durch p_h an Körperoberfläche verursachte Kraft

\vec{F}_U ... durch Bewegung des Körpers verursacht, $\vec{F}_U = \vec{F}_W + \vec{F}_A$

Hydrostatischer Auftrieb \vec{F}_h

ruhender Körper durch Flüssigkeit ersetzt gedacht \rightarrow Flüssigkeit bleibt in Ruhe

\rightarrow auf Körper wirkende Kräfte sind im Gleichgewicht,

$\vec{F}_h + \rho \vec{g} V = 0$. Es folgt

$$\vec{F}_h = -\rho \vec{g} V \quad (3.13)$$

Archimedessches Gesetz

V ... Volumen des Körpers

\vec{F}_h ... hydrostatischer Auftrieb („buoyancy force“)

3.3.2 Stationäres Steigen und Fallen

Stationäre Fall- oder Steiggeschwindigkeit eines sich senkrecht bewegenden, symmetrischen Körpers gegebener Gestalt (kein \vec{F}_A) ergibt sich aus dem Kräftegleichgewicht

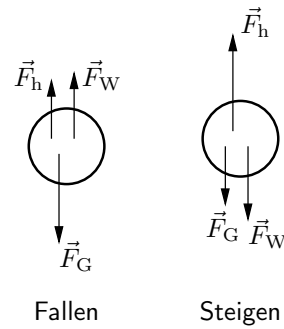
$$\vec{F}_h + \vec{F}_W + \vec{F}_G = 0$$

$$\vec{F}_G \dots \text{Gewichtskraft, } \vec{F}_G = m\vec{g}$$

$$|\vec{F}_W| = |\vec{F}_G - \vec{F}_h| \quad (3.14)$$

$$c_w \frac{1}{2} \rho U^2 L^2 = g|\rho_V - \rho|V \quad (3.15)$$

$\rho_V \dots$ Dichte des Körpers



3.4 Schleichende Strömungen

Viskose Kräfte dominieren, Trägheitskräfte vernachlässigbar: $Re \ll 1$; Nach Skalierung des Drucks mit $p^* = pL/(\mu U)$ folgt aus Gl. (3.12)

$$\underbrace{Re \frac{D\vec{v}^*}{Dt^*}}_{\ll 1} = -\text{grad}^* p^* + \Delta^* \vec{v}^*$$

Der Beschleunigungsterm kann problemlos weggelassen werden; Term mit der höchsten Ordnung (Reibungsterm) bleibt \Rightarrow Anzahl der Randbedingungen bleibt gleich.

Somit sind die Grundgleichungen für schleichende Strömungen:

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{v} &= 0 \\ \mu \Delta \vec{v} &= \text{grad} p \end{aligned} \quad (3.16)$$

Mit der Skalierung $p^* = pL/(\mu U)$ wird der Druck auf die Reibungsspannungen bezogen, mit $p^* = p/(\rho U^2)$ auf die konvektive Beschleunigung. In der schleichenden Strömung ist die Beschleunigung (konvektive oder instationäre) per definitionem klein. Es wäre unsinnig, den Druck auf eine nicht relevante Größen zu beziehen. Wird trotzdem vorerst $p^* = p/(\rho U^2)$ probiert, folgt

$$Re \frac{D\vec{v}^*}{Dt^*} = -Re \text{grad}^* p^* + \Delta^* \vec{v}^*.$$

Die Geschwindigkeit sowie die räumlichen und zeitlichen dimensionslosen Ableitungen sind $O(1)$, da auf die Referenzgrößen bezogen wurde. Vor der substantiellen Beschleunigung steht Re , dieser Term ist daher klein gegen $\Delta^* \vec{v}^*$. Es bleiben zwei Terme übrig,

$$0 = -Re \text{grad}^* p^* + \Delta^* \vec{v}^*,$$

die von gleicher Größenordnung sein müssen. Demnach ist $p^* = O(1/Re)$, einsetzen für p^* und Re ergibt

$$\frac{p}{\rho U^2} = O\left(\frac{\mu}{\rho U L}\right) \Rightarrow p = O\left(\frac{\mu U}{L}\right).$$

Die passende Skalierung ist $p^* = pL/(\mu U)$.

Lösungsweg für zwei-dimensionale Strömungen

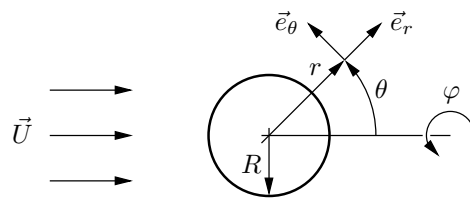
1. Rotation der Bewegungsgl. (3.16) bilden \rightarrow Druck wird eliminiert
2. Einführen der Stokeschen Stromfunktion $\psi: u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$.
 - i. Kontinuitätsgl. identisch erfüllt
 - ii. Skalarfeld ψ statt Vektorfeld \vec{v}
3. Man erhält eine Gleichung 4. Ordnung in ψ .
 - i. Lösen unter Beachtung der Randbedingungen,
 - ii. \vec{v} aus ψ bestimmen,
 - iii. \vec{v} in Bewegungsgl. (3.16) einsetzen ergibt p .

ad 1.: Mit dem Entwicklungssatz, $\Delta = \text{grad div} - \text{rot rot}$, der Kontinuitätsgl., $\text{div} \vec{v} = 0$, sowie mit einer Vektoridentität, rot grad einer skalaren Funktion = 0, folgt aus Gl. (3.16)

$$\text{rot rot rot} \vec{v} = 0 \quad (3.17)$$

ad 2.: Linien $\psi = \text{const}$ sind Stromlinien, wegen $\vec{v} \cdot \text{grad} \psi = 0$.

3.4.1 Feste Kugel



$$\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta + v_\varphi \vec{e}_\varphi$$

Wegen Symmetrie:

$$v_\varphi = 0; \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$$

Randbedingungen:

$$r = R: \quad v_r = 0, \quad v_\theta = 0 \quad (3.18)$$

$$r \rightarrow \infty: \quad v_r = U \cos \theta, \quad v_\theta = -U \sin \theta \quad (3.19)$$

Stokesche Stromfunktion ψ :

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (3.20)$$

Allgemeine Lösung

Mit der Definition des Operators L ,

$$\operatorname{rot} \vec{v} = -\frac{1}{r \sin \theta} \underbrace{\left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \right]}_{L\psi} \vec{e}_\varphi = -\frac{L\psi}{r \sin \theta} \vec{e}_\varphi,$$

wird $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{v} = LL\psi \vec{e}_\varphi / r \sin \theta$. Gesucht ist die Lösung von

$$LL\psi = 0 \quad (3.21)$$

Allgemeine Lösung:

$$\psi = \left(\frac{A}{10} r^4 - \frac{B}{2} r + Cr^2 + \frac{D}{r} \right) \sin^2 \theta \quad (3.22)$$

Die Randbedingungen (3.18) und (3.19) ergeben die Werte für $A - D$.

Vektoroperatoren in Kugelkoordinaten

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \sin \theta v_r) + \frac{\partial}{\partial \theta}(r \sin \theta v_\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(r v_\varphi)$$

$$\operatorname{grad} \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{v} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial v_\varphi \sin \theta}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial r v_\varphi}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta \\ &\quad + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r v_\theta}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

Achtung: Hier zählt θ vom Pol weg, $0 \leq \theta \leq \pi$. Nach anderer Konvention bezeichnet $\theta = 0$ den Äquator und es gilt $-\pi/2 < \theta < \pi/2$.

Rechengang

Substituieren von v_r und v_θ durch ψ , Gl. (3.20). Dann ist $\operatorname{rot} \vec{v}$

$$\operatorname{rot} \vec{v} = -\frac{1}{r \sin \theta} \underbrace{\left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \right]}_{L\psi} \vec{e}_\varphi = -\frac{L\psi}{r \sin \theta} \vec{e}_\varphi.$$

rot \vec{v} hat nur eine Komponente in φ -Richtung. Davon wird nochmals die Rotation gebildet,

$$\text{rot rot } \vec{v} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial L\psi}{\partial r} \vec{e}_\theta - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial L\psi}{\partial \theta} \vec{e}_r$$

und schließlich

$$\text{rot rot rot } \vec{v} = \frac{1}{r \sin \theta} LL\psi \vec{e}_\varphi.$$

Zu lösen ist die Differentialgleichung $LL\psi = 0$.

Die Randbedingungen (3.19) werden durch die Stromfunktion

$$\psi = \frac{1}{2}Ur^2 \sin^2 \theta$$

erfüllt. Eine Integrationskonstante c kann beliebig gewählt und deshalb zu Null gesetzt werden. Die Randbedingungen an der Kugeloberfläche, Gl. (3.18), verlangen

$$r = R: \quad \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0.$$

Die Form des Operators L sowie die Randbedingungen lassen vermuten, dass ein Separationsansatz funktioniert,

$$\psi = f(r) \sin^2 \theta.$$

L auf den Ansatz anwenden,

$$L\psi = \underbrace{\left(f'' - \frac{2}{r^2}f\right)}_{F(r)} \sin^2 \theta.$$

Mit $L\psi = F(r) \sin^2 \theta$ erhält man für $LL\psi$ sofort

$$LL\psi = \left(F'' - \frac{2}{r^2}F\right) \sin^2 \theta.$$

$LL\psi = 0$ verlangt

$$F'' - \frac{2}{r^2}F = 0.$$

Die Lösung ist $F = Ar^2 + \frac{B}{r}$. Für f folgt

$$f'' - \frac{2}{r^2}f = Ar^2 + \frac{B}{r},$$

$$f = \frac{A}{10}r^4 - \frac{B}{2}r + Cr^2 + \frac{D}{r}.$$

Die unbekanntenen Konstanten werden aus den Randbedingungen bestimmt,

$$r \rightarrow \infty: \quad \psi \rightarrow \frac{1}{2}Ur^2 \quad \Rightarrow \quad A = 0, \quad C = \frac{1}{2}U;$$

$$r = R: \quad f(R) = 0, \quad f'(R) = 0 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{3}{2}UR, \quad D = \frac{1}{4}UR^3.$$

Stromfunktion und Geschwindigkeitsfeld

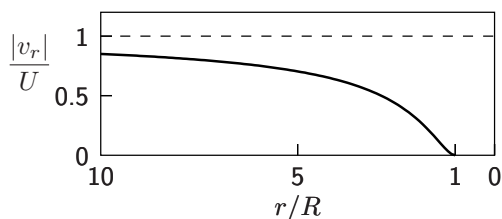
$$\psi = \frac{1}{2}Ur^2 \left(1 - \frac{3R}{2r} + \frac{1}{2}\frac{R^3}{r^3}\right) \sin^2 \theta$$

$$v_r = U \left(1 - \frac{3R}{2r} + \frac{1}{2}\frac{R^3}{r^3}\right) \cos \theta$$

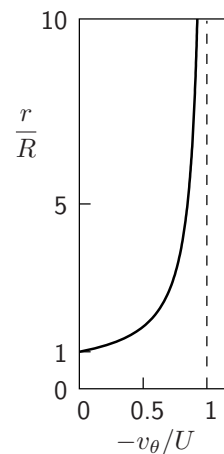
$$v_\theta = -U \left(1 - \frac{3R}{4r} - \frac{1}{4}\frac{R^3}{r^3}\right) \sin \theta$$

- $\psi = 0$ auf Kugeloberfläche, $r = R$, sowie auf Achse, $\theta = 0$ oder π
- ψ , v_r , v_θ unabhängig von der Viskosität
- ψ , v_θ symmetrisch bezüglich Äquatorebene, $\theta = \pi/2$; v_r antisymmetrisch bezüglich Äquatorebene
- $|\vec{v}| \leq U$ im ganzen Feld
- bei $r = 10R$ ca. 10% Geschwindigkeitsstörung

Geschwindigkeitsverteilung



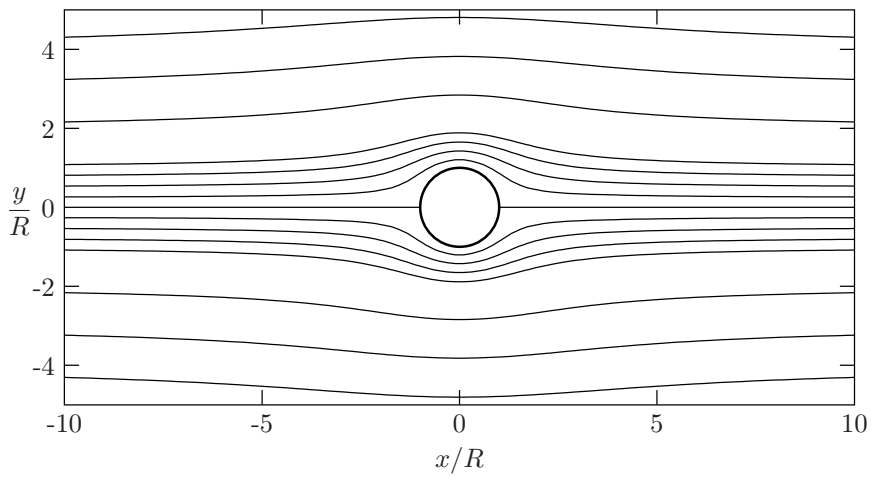
Radiale Geschwindigkeit entlang der Achse, $\theta = 0$ oder $\theta = \pi$.



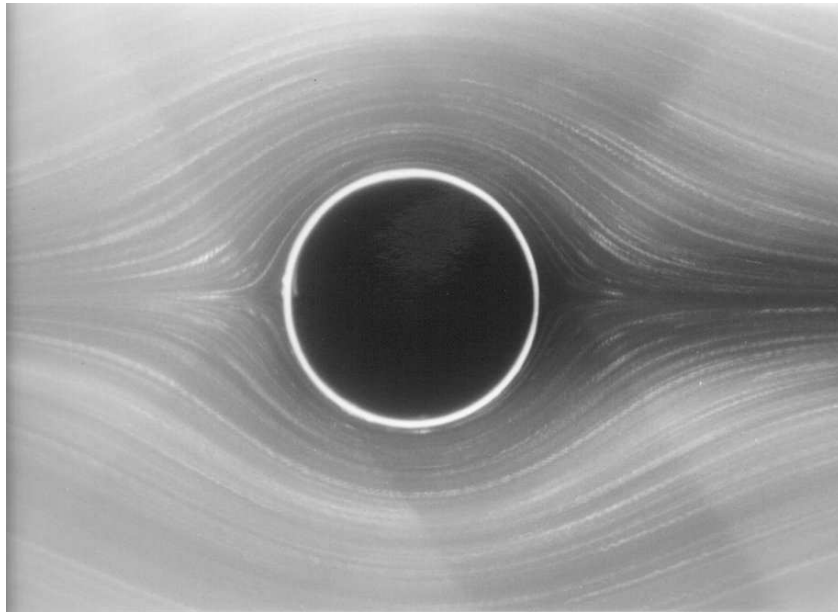
Geschwindigkeit in der Äquatorebene, $\theta = \pi/2$.

Langsames Abklingen der Geschwindigkeitsstörung $\propto 1/r$.

Stromlinien



Stromlinien für eine angeströmte, ruhende *Kugel*. Die Werte von $2\psi/UR^2$ auf den Linien sind, von der Achse nach außen, 0, $1/16$, $4/16$, $9/16$, 1, 4, 9 und 16. Für $\vec{v} = U\vec{e}_x$ ist $2\psi/UR^2 = (y/R)^2$.



Strömung um einen *Zylinder*, $Re = 0,16$, Strömung von links nach rechts. (Aus TANEDA S., Flow Visualization: Scientific Images. SciPress, 2000.)

Druckfeld

Mit dem Entwicklungssatz und $\text{div } \vec{v} = 0$ lautet die Bew.-Gl. (3.16)

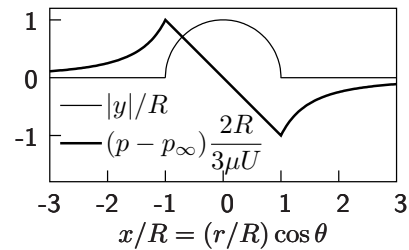
$$\text{grad } p = -\mu \text{rot rot } \vec{v} \quad (3.23)$$

Integration ergibt

$$p = -\frac{3\mu UR}{2r^2} \cos \theta + p_\infty \quad (3.24)$$

$p_\infty \dots$ Druck für $r \rightarrow \infty$

Asymmetrische Druckverteilung
→ Widerstand!



Verlauf der Druckstörung, $p - p_\infty$, auf dem durch y/R gegebenen Weg.

Einsetzen von \vec{v} in Gl. (3.23)

$$\frac{\partial p}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \vec{e}_\theta = -\mu \left(-\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial L\psi}{\partial \theta} \vec{e}_r + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial L\psi}{\partial r} \vec{e}_\theta \right).$$

Nach Substitution von $L\psi = F(r) \sin^2 \theta$ werden die Komponenten identifiziert,

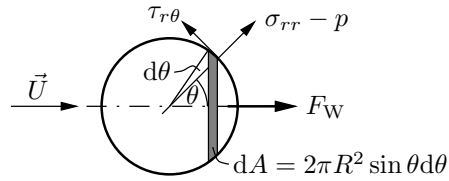
$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\mu}{r^2} F' 2 \cos \theta, \quad \frac{\partial p}{\partial \theta} = -\mu F' \sin \theta.$$

Mit $F = \frac{3}{2} U \frac{R}{r}$ folgt

$$p = -\frac{3\mu UR}{2r^2} \cos \theta + p_\infty.$$

Widerstand

Integration des Drucks und der Reibungsspannungen



$$\sigma_{rr} = 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} = 0$$

$$\tau_{r\theta} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right)$$

$$F_p = \oint_{r=R} -p \cos \theta \, dA = 2\pi\mu UR$$

$$F_\tau = \oint_{r=R} (\sigma_{rr} \cos \theta - \tau_{r\theta} \sin \theta) \, dA = 4\pi\mu UR$$

$$F_W = F_p + F_\tau = 6\pi\mu UR \quad (3.25)$$

Stokesscher Widerstand. Feste Kugel, $Re \ll 1$.

$$\oint_{r=R} -p \cos \theta \, dA = \frac{3\mu UR}{2R^2} 2\pi R^2 \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta \, d\theta = 3\pi\mu UR \left[-\frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_0^\pi$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{3\mu U \sin \theta}{2R}$$

$$-\oint_{r=R} \tau_{r\theta} \sin \theta \, dA = 3\pi\mu UR \int_0^\pi \sin^3 \theta \, d\theta = 3\pi\mu UR \left[-\cos \theta + \frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_0^\pi$$

Widerstandsbeiwert, Fallgeschwindigkeit

Widerstandsbeiwert, mit $Re = \frac{\rho U 2R}{\mu}$:

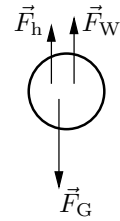
$$c_w = \frac{F_W}{\frac{1}{2}\rho U^2 R^2 \pi} = \frac{24}{Re} \quad (3.26)$$

Fallgeschwindigkeit:

$$F_W = F_G - F_h$$

$$6\pi\mu UR = g(\rho_V - \rho)\frac{4}{3}\pi R^3$$

$$U = \frac{2}{9}gR^2 \frac{\rho_V - \rho}{\mu} \quad (3.27)$$



3.4.2 Kugelförmige Tropfen und Blasen

Gl. (3.21) muss in den zwei Bereichen $r \leq R$ und $r \geq R$ gelöst werden.
Allgemeine Lösung:

$$r \geq R: \quad \psi = \left(\frac{A}{10} r^4 - \frac{B}{2} r + C r^2 + \frac{D}{r} \right) \sin^2 \theta$$

$$r \leq R: \quad \psi^{(V)} = \left(\frac{A_V}{10} r^4 - \frac{B_V}{2} r + C_V r^2 + \frac{D_V}{r} \right) \sin^2 \theta$$

Randbedingungen:

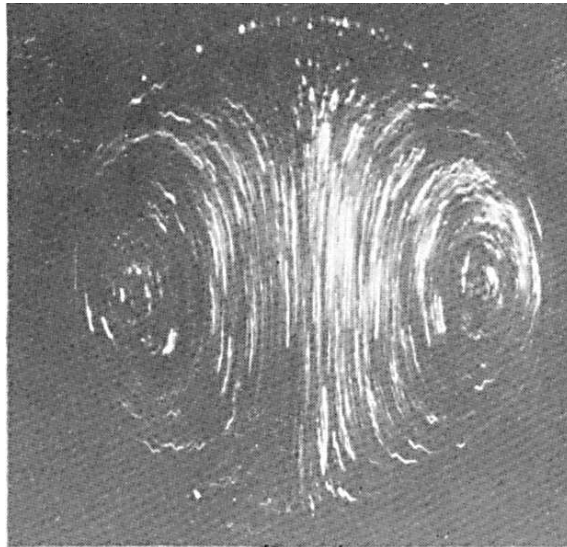
$$r \rightarrow \infty: \quad \text{wie zuvor, Gl. (3.19)} \Rightarrow A = 0, C = \frac{1}{2} U$$

$$r = 0: \quad v_r, v_\theta \text{ finit} \Rightarrow B_V = 0, D_V = 0$$

$$r = R: \quad \text{kinematische RB, } v_r = 0, v_r^{(V)} = 0$$

Übergangsbedingungen bei $r = R$:

$$v_\theta = v_\theta^{(V)}, \quad \tau_{r\theta} = \tau_{r\theta}^{(V)}$$



Strömung in einem Wassertropfen, der in Rhizinusöl fällt. Durchmesser 1,77 cm, Geschwindigkeit 1,16 cm/s, Belichtungszeit 0,5 s. (Abb. 3.5 a aus CLIFT et al.)

3.4.3 Widerstand von Tropfen und Blasen

$$F_W = 2\pi\mu UR \frac{2\mu + 3\mu_V}{\mu + \mu_V} \quad (3.28)$$

Ribtschinski und Hadamard. Kugelform, $Re \ll 1$.

μ_V ... dynamische Viskosität des Fluids im Inneren

$\mu_V \gg \mu$: $F_W = 6\pi\mu UR$, wie feste Kugel (z.B. Wassertropfen in Luft).

$\mu_V \ll \mu$, z.B. Gasblase in Flüssigkeit:

$$F_W = 4\pi\mu UR \quad (3.29)$$

Steiggeschwindigkeit einer Blase, $\mu_V \ll \mu$, $\rho_V \ll \rho$:

$$U = \frac{gR^2}{3\nu}$$

Einfluss adsorbierter Stoffe

Experimentell: Formel von Ribtschinski und Hadamard stimmt nur in *sehr* reinen Flüssigkeiten, unter Laborbedingungen.

Grund der Abweichung: An der Grenzfläche bildet sich ein Film oberflächenaktiver Stoffe. Bewegt sich die Grenzfläche, würden diese Stoffe stetig an den hinteren Pol transportiert werden. Dem widerstehen die oberflächenaktiven Stoffe. Die Grenzfläche bleibt immobil und nimmt die tangentialen Schubspannungen auf. Das Fluid im Inneren bleibt in Ruhe. (CLIFT et al., S. 35f; LEVICH, Kap. 8). Tropfen und Blasen haben normalerweise in schleichender Strömung den Widerstand einer festen Kugel, Gl. (3.25).

Dementsprechend beträgt die Steiggeschwindigkeit für $\rho_V \ll \rho$

$$U = \frac{2}{9} \frac{gR^2}{\nu}$$

3.5 Strömungen bei großen Re-Zahlen

Navier-Stokessche Gleichungen, dimensionslos:

$$\frac{D\vec{v}^*}{Dt^*} = -\text{grad}^* p^* + \underbrace{\frac{1}{\text{Re}} \Delta^* \vec{v}^*}_{\ll 1}$$

Fallen die Reibungsterme weg, bleiben die Euler-Gleichungen.

3.5.1 Euler-Gleichungen

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p \quad (3.30)$$

Gleichungen 1. Ordnung: Nicht alle RB der Navier-Stokesschen Gleichungen (3.2) können erfüllt werden.

Die Navier-Stokesschen Gleichungen sind 2. Ordnung in den Komponenten des Geschwindigkeitsvektors, die Eulerschen Gleichungen 1. Ordnung. An festen Berandungen zum Beispiel können die Navier-Stokesschen Gleichungen die Kontinuitäten der Normal- und Tangentialgeschwindigkeiten erfüllen, von den Euler-Gleichungen wird üblicherweise die Kontinuität der Normalgeschwindigkeit gefordert. Ein starrer Körper wird so in einem von den Euler-Gleichungen beschriebenen Strömungsfeld nicht durchströmt, aber reibungsfrei umflossen.

3.5.2 Drehungsfreiheit und Helmholtz'scher Wirbelsatz

Der Reibungsterm in den Navier-Stokesschen Gl. wird einerseits klein für $Re \gg 1$, andererseits wird er identisch Null für $\text{rot } \vec{v} = \text{const}$, wegen

$$\Delta \vec{v} = -\text{rot rot } \vec{v}$$

Drehungsfreie Strömungen erfüllen die Navier-Stokesschen Gleichungen! Das Druckfeld wird mittels der Euler-Gleichungen (3.30) bestimmt.

Für drehungsfreie Strömungen existieren nach wie vor Reibungsschubspannungen sowie Dissipation im Strömungsfeld, *nur* in der Bewegungsgleichung spielt die Reibung keine Rolle.

Drehung, Wirbelstärke

$$\vec{\omega} = \text{rot } \vec{v} \quad (3.31)$$

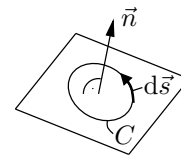
$\vec{\omega}$... Drehung, Wirbelstärke, auch Rotation; $[\vec{\omega}] = 1/\text{Zeit}$.

Die Definition der Rotation ist (siehe S. ??)

$$\text{rot } \vec{v} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S d\vec{S} \times \vec{v},$$

wobei S die Oberfläche des Volumens V ist. Die Komponente der Rotation in einer Richtung \vec{n} ist gegeben durch

$$\vec{n} \cdot \text{rot } \vec{v} = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{1}{A} \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{s}.$$

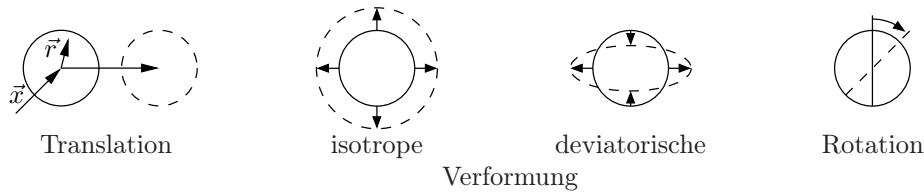


Hier ist A eine Fläche in der durch die Normalenrichtung \vec{n} gegebenen Ebene, C ist der Rand der Fläche und $d\vec{s}$ ist ein Wegelement entlang des Randes. In kartesischen Koordinaten ist

$$\text{rot } \vec{v} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Kinematik eines Fluidelementes

Die Bewegung eines Fluidelementes in unmittelbarer Umgebung (\vec{r}) eines Punktes \vec{x} lässt sich zerlegen in



$$v_i(\vec{x} + \vec{r}) = v_i(\vec{x}) + r_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = v_i(\vec{x}) + \frac{1}{2} r_j \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} r_j \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right),$$

oder symbolisch, $\vec{v}(\vec{x} + \vec{r}) = \vec{v}(\vec{x}) + \frac{1}{2} \vec{r} \cdot (\text{grad} \vec{v} + (\text{grad} \vec{v})^T) + \frac{1}{2} (\text{rot} \vec{v} \times \vec{r})$.

Die Verformung ist der symmetrische Anteil des Geschwindigkeitsgradienten.

Dieser lässt sich weiter zerlegen in den isotropen und deviatorischen Anteil, $\frac{1}{2} \vec{r} \cdot (\text{grad} \vec{v} + (\text{grad} \vec{v})^T) = \frac{1}{3} \vec{r} \text{div} \vec{v} + \frac{1}{2} \vec{r} \cdot (\text{grad} \vec{v} + (\text{grad} \vec{v})^T) - \frac{1}{3} \vec{r} \text{div} \vec{v}$

In inkompressibler Strömung ist die isotrope Verformung nicht vorhanden. Die deviatorische Verformung wird durch die Scherviskosität μ behindert, nicht aber die Rotation.

In der Bewegungsgleichung (3.2) stehen die partiellen Ableitungen der Geschwindigkeiten gerade in einer solchen Kombination, dass diese Kombination als Anwendung eines Operator auf die Rotation der Geschwindigkeit geschrieben werden kann. Es ergibt sich die scheinbar paradoxe Tatsache, dass die Viskosität für die Drehung eines Fluidelementes belanglos ist, dennoch aber der Reibungsterm in der Bewegungsgleichung eine Funktion der Drehung ist (BATCHELOR, S. 148).

Beispiele für Bewegungen mit Drehung

Festkörperrotation:

$$\vec{v} = \Omega r \vec{e}_\theta$$

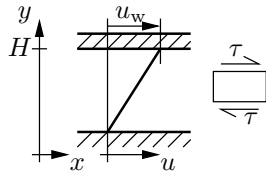
$$\vec{e}_z \cdot \text{rot} \vec{v} = \lim_{r^2 \pi \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \Omega r \vec{e}_\theta \cdot r \vec{e}_\theta d\theta = \frac{\Omega r^2 2\pi}{r^2 \pi} = 2\Omega$$

Für eine Festkörperrotation ist, im gesamten Feld, $\vec{\omega} = 2\Omega$.

Rohrströmung:

$$\vec{v}(r) = u_{\max} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \vec{e}_x \quad \Rightarrow \quad \vec{\omega} = -\frac{2u_{\max}}{R} \frac{r}{R} \vec{e}_\theta$$

Beispiel Couette-Strömung:



$$\vec{v} = u_w \frac{y}{H} \vec{e}_x \Rightarrow \text{rot} \vec{v} = -\frac{u_w}{H} \vec{e}_z = \text{const}$$

$$\Delta \vec{v} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 u}{dy^2} = 0 \Rightarrow u = c_1 y + c_2$$

- In der Bewegungsgleichung ist $\nu \Delta \vec{v} \equiv 0$. Viskosität bzw. das Fließgesetz spielt keine Rolle für das Geschwindigkeitsfeld.
- Reibungsschubspannungen sind vorhanden, $\tau = \mu u_w / H$. Im Inneren der Strömung ist die Summe der Schubspannungen an einem Fluidelement = 0.
- An den Rändern der Strömung wirken die Reibungsschubspannungen. Die Kraft, mit der die obere Platte gezogen werden muss, ist abhängig vom Fließgesetz.
- Dissipation ist vorhanden, $\Phi = \mu (du/dy)^2$. Sie ist gleich der an der Platte erbrachten Schleppleistung, $\tau_w u_w = \int_0^H \Phi dy$.

Helmholtzischer Wirbelsatz

Reibungs- oder drehungsfreie, inkompressible Strömungen, $\mu = const.$

Rotation auf Euler-Gleichungen angewandt gibt

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = -\vec{\omega} \cdot \text{grad}\vec{v} \quad (3.32)$$

Helmholtzischer Wirbelsatz

$\vec{\omega} \cdot \text{grad}\vec{v} \dots$ Wirbelstreckung

Insbesondere: $\vec{\omega} = 0$ für $t = 0 \Rightarrow \vec{\omega} = 0$ für alle $t > 0$.

Für ebene Strömung ist $\vec{\omega} \cdot \text{grad}\vec{v} = 0$, daher gilt

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = 0$$

Wirbelstärke bleibt erhalten.

Helmholtzischer Wirbelsatz: Die Wirbelstärke wird durch die Wirbelstreckung verringert und ansonsten wie ein materieller Punkt (substantielle Ableitung) transportiert. Zur Wirbelstreckung siehe BATCHELOR, S. 267.

Rotation der Euler-Gleichungen:

$$\text{rot} \left(\frac{D\vec{v}}{Dt} \right) = -\frac{1}{\rho} \text{rot}(\text{grad}p) = 0$$

Hier wurde die Vektoridentität $\text{rot grad}\phi = 0$, die für jede skalare Funktion ϕ gültig ist, verwendet. Die substantielle Ableitung lautet

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad}\vec{v} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad}(\vec{v} \cdot \vec{v}) - \vec{v} \times \text{rot}\vec{v}.$$

Davon wird die Rotation gebildet. Wieder ist $\text{rot grad}|\vec{v}|^2 = 0$,

$$\frac{\partial \text{rot}\vec{v}}{\partial t} - \text{rot}(\vec{v} \times \text{rot}\vec{v}) = \frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} - \text{rot}(\vec{v} \times \vec{\omega}) = 0.$$

Anwendung des Entwicklungssatzes liefert

$$\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} - \vec{\omega} \cdot \text{grad}\vec{v} - \vec{v} \cdot \text{grad}\vec{\omega} + \underbrace{\vec{v} \text{div}\vec{\omega}}_{\text{div rot}=0} - \underbrace{\vec{\omega} \text{div}\vec{v}}_{\text{div}\vec{v}=0 \text{ (Konti)}} = 0.$$

Für jedes Vektorfeld \vec{a} gilt $\text{div rot}\vec{a} = 0$. Die beiden Ausdrücke $\partial\vec{\omega}/\partial t$ und $\vec{v} \cdot \text{grad}\vec{\omega}$ werden zur substantiellen Ableitung zusammengefasst. Es bleibt der Helmholtzsche Wirbelsatz, Gl. (3.32).

Eigenschaften drehungsfreier Strömungen

- Flüssigkeitsteilchen werden nur verformt und translatorisch bewegt, aber nicht gedreht.
- Drehungsfreie Strömung: Parallelströmung mit konstanter Geschwindigkeit.
- Nach dem Helmholtzschen Wirbelsatz (3.32) bleiben *reibungsfree* Strömungen *drehungsfrei*, wenn sie zu irgendeinem Zeitpunkt *drehungsfrei* waren.
- Die *reibungsfree* Strömung um einen Körper ist daher *drehungsfrei*, wenn
 - die Anströmung eine Parallelströmung mit konstanter Geschwindigkeit ist oder
 - der Körper sich durch ein anfänglich ruhendes Medium bewegt.

Die parallele Anströmung eines Körpers und die Bewegung eines Körpers durch ruhendes Fluid sind wichtige und häufig vorkommende Strömungsformen. Deshalb ist die Annahme einer drehungsfreien Strömung keine so große oder willkürliche Einschränkung, wie es zuerst erscheinen mag. Ein drehungsfreies Strömungsfeld wird die tatsächliche Strömung dann gut wiedergeben, wenn drehungsbehaftete Regionen in der Strömung wenig Einfluss auf die gesamte Strömung haben. Das ist zum Beispiel der Fall, wenn die Verletzung der Wandhaftbedingung wenig Wirkung auf die gesamte Strömung hat. So wird die reale Strömung um schlanke Körper, nicht aber um stumpfe Körper, bei großen Re-Zahlen gut durch eine drehungsfreie Strömung wiedergegeben. Gut können auch Strömungen mit freien Oberflächen beschrieben werden, an denen keine Wandhaftbedingung zu erfüllen ist.

Zum Vergleich von realen mit drehungsfreien Strömungen siehe Abschnitt 3.5.6.

Grundgleichungen für drehungsfreie, inkompressible Strömungen

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (3.33)$$

$$\operatorname{rot} \vec{v} = 0 \quad (3.34)$$

3-dimensional: 3 Gleichungen 1. Ordnung für 3 Variable.
Das Druckfeld folgt aus den Euler-Gleichungen (3.30).

Ebene Strömung:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (3.35)$$

Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen

Die Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen verweisen auf die Funktionentheorie \Rightarrow Zur Lösung drehungsfreier, *ebener* Strömungen steht eine weitentwickelte Theorie zur Verfügung.

Eine komplexe Funktion mit u und v als Real- und Imaginärteil ist analytisch, falls sie die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt und die in diesen Gleichungen vorkommenden Ableitungen stetig sind (TEUBNER, Abschn. 1.14.3).

Eine weitere Eigenschaft analytischer Funktionen ist, dass deren Real- und Imaginärteile unabhängig voneinander die Laplace-Gleichung erfüllen. Es ist deshalb günstig, zwei-dimensionale, drehungsfreie Geschwindigkeitsfelder mit Hilfe des komplexen Potentials zu beschreiben (MILNE-THOMSON, Abschn. 5.33 und 6.0; PRANDTL et al., S. 61).

3.5.3 Geschwindigkeitspotential

Falls $\text{rot } \vec{v} = 0$ existiert eine skalare Funktion, das Potential ϕ , sodass

$$\vec{v} = \text{grad } \phi \quad (3.36)$$

Vektoridentität für eine skalare Funktion ϕ : $\text{rot grad } \phi = 0$.

Gleichung (3.36) erfüllt $\text{rot } \vec{v} = 0$ identisch. Das Geschwindigkeitsfeld \vec{v} ist nun auf *eine* abhängige Variable reduziert.

Die Kontinuitätsgleichung fordert

$$\text{div grad } \phi = \Delta \phi = 0 \quad (3.37)$$

Laplace-Gleichung für ϕ

Die Laplace-Gleichung ist linear. Lösungen lassen sich superponieren.

Falls $\text{rot } \vec{v} = 0$ ist das Integral entlang eines geschlossenen Weges gleich Null. Daraus folgt weiters, dass das Integral zwischen zwei Punkten wegunabhängig ist. Ist das Integral wegunabhängig, so kann der Wert von \vec{v} nur eine Funktion des Ortes sein, d.h., es existiert ein Potential.

Aus der Existenz eines Potentials folgt sofort $\text{rot } \vec{v} = 0$, umgekehrt ist der oben geschilderte Beweisweg zu gehen.

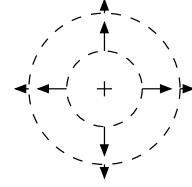
$$\begin{array}{ccc} \oint_C \vec{v} \, d\vec{s} = 0 & \iff & \int_A^B \vec{v} \, d\vec{s} \text{ wegunabhängig} \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \text{rot } \vec{v} = 0 & \iff & \exists \phi: \vec{v} = \text{grad } \phi \end{array}$$

Elementare Potentialströmungen

ebene Quelle, Linienquelle (von θ unabhängig):

$$\phi = \frac{Q}{2\pi} \ln r, \quad Q \dots \text{Quellstärke}$$

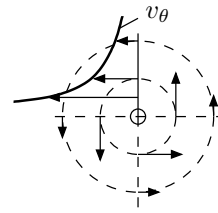
$$v_r = \frac{Q}{2\pi r}, \quad v_\theta = 0$$



Potentialwirbel (von r unabhängige Lösung):

$$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta, \quad \Gamma \dots \text{Zirkulation}$$

$$v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}, \quad v_r = 0$$



räumliche Quelle, Punktquelle (kugelsymmetrisch):

$$\phi = -\frac{Q}{4\pi r}; \quad v_r = \frac{Q}{4\pi r^2} \quad (3.38)$$

Vektoroperatoren in Zylinderkoordinaten:

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}$$

$$\text{grad}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \vec{e}_\theta$$

Von θ unabhängiger Ansatz, $\phi = \phi(r)$:

$$\phi'' + \frac{1}{r}\phi' = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi = c \ln r$$

$$v_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{c}{r}, \quad v_\theta = 0$$

Skalieren mit Quellstärke $Q = \oint v_r ds = 2\pi r v_r = 2\pi c = \text{const}$

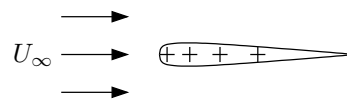
$$\phi = \frac{Q}{2\pi} \ln r, \quad v_r = \frac{Q}{2\pi r}$$

Potentialwirbel: Zirkulation $\Gamma = \text{const}$, $\Gamma = \oint v_\theta ds = 2\pi r v_\theta$

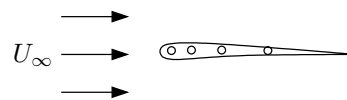
Singularitätenmethode

Quellen und Wirbel werden so verteilt, dass die Randbedingungen für die tangentielle Strömung um einen Körper erfüllt werden.

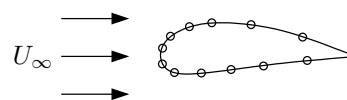
dünnnes, symmetrisches Profil: Quellenbelegung



asymmetrisches Profil: Wirbelbelegung

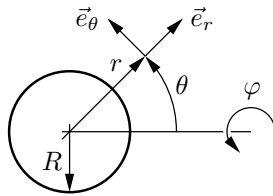


dicke Körper: Wirbelbelegung auf der Oberfläche



(SCHNEIDER, Kap. 18.)

3.5.4 Potentialströmung um eine Kugel



$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} \quad (3.39)$$

$$\vec{v} = (v_r, v_\theta, 0); \quad v_r = \frac{\partial\phi}{\partial r}, \quad v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}$$

Randbedingungen:

$$r \rightarrow \infty: \quad v_r = U \cos\theta, \quad v_\theta = -U \sin\theta \quad (3.40)$$

$$r = R: \quad v_r = 0, \quad (v_\theta \neq 0) \quad (3.41)$$

Potentialfunktion:

$$\phi = U \left(r + \frac{R^3}{2r^2} \right) \cos\theta \quad (3.42)$$

Rechengang

Gl. (3.40) legt Separationsansatz nahe: $\phi = Uf(r)\cos\theta$. Einsetzen in Gl. (3.39) ergibt, mit der Forderung $\Delta\phi = 0$,

$$r^2 f'' + 2r f' - 2f = 0.$$

Das ist eine Eulersche Differentialgleichung, der Ansatz $f = r^\lambda$ führt zu $(\lambda + 2)(\lambda - 1) = 0$ und zur allgemeinen Lösung,

$$f = c_1 r + \frac{c_2}{r^2}.$$

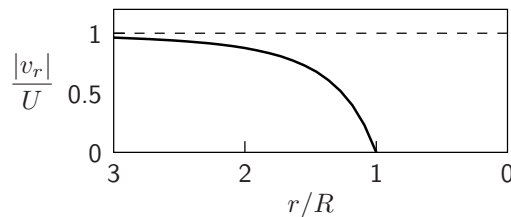
Die Geschwindigkeitskomponenten lauten

$$v_r = U \left(c_1 - 2\frac{c_2}{r^3} \right) \cos\theta, \quad v_\theta = -U \left(c_1 + \frac{c_2}{r^3} \right) \sin\theta.$$

Randbedingung (3.40) für v_r wird mit $c_1 = 1$ erfüllt, RB (3.41) mit $c_2 = R^3/2$. Es folgt Gl. (3.42).

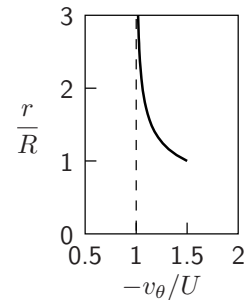
Geschwindigkeitsverteilung

$$v_r = U \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \cos \theta, \quad v_\theta = -U \left(1 + \frac{R^3}{2r^3} \right) \sin \theta \quad (3.43)$$



Radiale Geschwindigkeit entlang der Achse, $\theta = 0$ oder $\theta = \pi$.

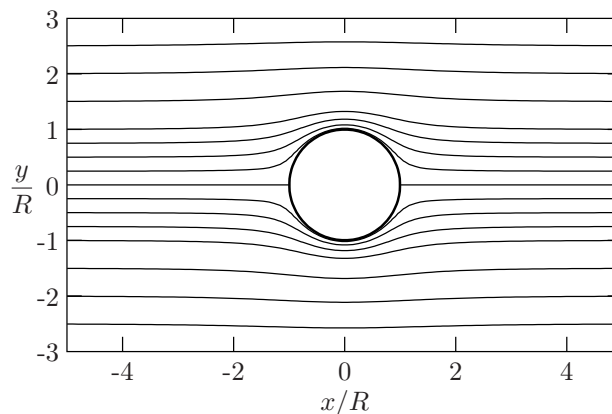
Bei $r = 2R$ ca. 10% Geschwindigkeitsstörung.



Geschwindigkeit in der Äquatorebene, $\theta = \pi/2$.

Stromlinien

Stromfunktion: $\psi = \frac{1}{2} U r^2 \sin^2 \theta \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right)$



Stromlinien für eine angeströmte, ruhende Kugel. Die Werte von $2\psi/UR^2$ auf den Linien sind, von der Achse nach außen, 0, 1/16, 4/16, 9/16, 1, 9/4, 4 und 25/4. Für $\vec{v} = U\vec{e}_x$ ist $2\psi/UR^2 = (y/R)^2$.

Bernoulli-Gleichung in Potentialströmung

Mit dem Entwicklungssatz lauten die Euler-Gleichungen (3.30)

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad} |\vec{v}|^2 - \underbrace{\vec{v} \times \omega}_{=0, \vec{\omega}=0} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p \quad (3.44)$$

In stationärer Strömung gilt daher

$$\text{grad} \left(\frac{1}{2} |\vec{v}|^2 + \frac{p}{\rho} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} |\vec{v}|^2 + \frac{p}{\rho} = \text{const}$$

In stationärer, drehungsfreier, inkompressibler Strömung gilt zwischen allen Punkten die Bernoulli-Gleichung,

$$p + \frac{\rho |\vec{v}|^2}{2} = p_{\infty} + \frac{\rho U^2}{2} = p_0 \quad (3.45)$$

Bernoulli-Gleichung (ohne Schwerkraft)

p ... statischer Druck, p_{∞} ... Anströmdruck, p_0 ... Ruhedruck

Die Bernoulli-Gleichung wurde hier aus der Impulsbilanz abgeleitet. Sie folgt auch aus der Bilanz für die mechanische Energie. (Siehe BATCHELOR, Abschn. 3.5, zur Energiebilanz in reibungsfreier Strömung.) Ungewöhnlicherweise beschreibt dieselbe Gleichung die Erhaltung verschiedener physikalischer Größen.

3.5.5 d'Alembertsches Paradoxon

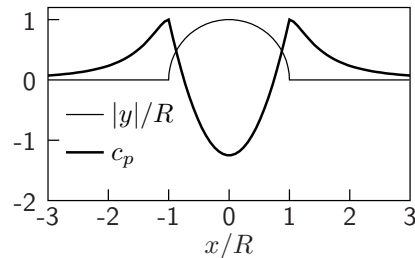
Druckverteilung auf Kugeloberfläche, $r = R$:

$$v_r = 0, \quad |\vec{v}|^2 = v_\theta^2 = \frac{9}{4}U^2 \sin^2 \theta$$

$$p = p_\infty + \frac{\rho U^2}{2} \left(1 - \frac{9}{4} \underbrace{\sin^2 \theta}_{1 - \cos^2 \theta = 1 - (x/R)^2} \right) \quad (3.46)$$

Druckverteilung symmetrisch bezüglich Äquator!

d'Alembertsches Paradoxon:
Ein reibungsfrei umströmter Körper hat in einer Potentialströmung keinen Widerstand.



Verlauf des Druckbeiwertes,
 $c_p = \frac{p - p_\infty}{\rho U^2 / 2}$.

Das d'Alembertsche Paradoxon wurde hier durch die reibungsfrei umströmten Kugel motiviert, es gilt aber allgemein für reibungsfrei umströmte Körper. Dies kann anschaulich anhand eines in eine Stromröhre platzierten Körpers gezeigt werden (MILNE-THOMSON, Abschn. 1.92).

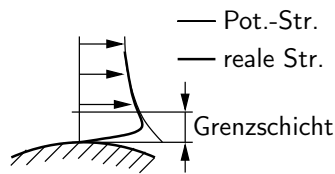
Damit das d'Alembertsche Paradoxon gültig ist, muss die Strömung überall drehungsfrei sein. Ein Tragflügel zum Beispiel erzeugt an jeder Flügelspitze ein Wirbelband, die Strömung ist nicht überall drehungsfrei. Ausserdem gilt das d'Alembertsche Paradoxon nur für geschlossene Körper bzw. geschlossene Totwassergebiete. Es gilt nicht für die Helmholtz-Strömung, einer Strömung mit Kavitationsblase, die von Stromlinien umschlossen ist.

Der Körper wird zwar reibungsfrei umströmt, in der Potentialströmung wird aber Energie dissipiert. Nun hat die Potentialströmung aber vor dem Körper dieselbe kinetische Energie wie hinter dem Körper. (In der Potentialströmung um die Kugel ist die Stromfunktion symmetrisch bezüglich der Ebene $\theta = \pi/2$.) Die dissipierte Energie wird der Strömung entlang der Körperkontur durch die Schleppleistung zugeführt, die nötig ist, um die tangentiale Geschwindigkeit ebendort zu ermöglichen. Für die Potentialströmung um die Kugel beträgt diese Schleppleistung $12\pi\mu U^2 R$. Zur Dissipation in der Potentialströmung siehe auch JOSEPH, D.D. (Int. J. Multiphase Flow 32, 285–310, 2006. Abschn. 9.)

3.5.6 Vergleich von Potentialstr. mit realer Strömung

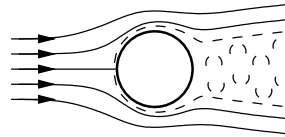
$Re \gg 1$: Potentialstr., die nicht im ganzen Strömungsfeld gültig sein kann.

1. Grenzschicht



Grenzschicht: Strömung erfüllt Haftbedingung an der Wand. In der Grenzschicht ist Reibung wichtig, obwohl $Re \gg 1$.

2. Nachlauf: Strömung löst ab



Dissipation kinetischer Energie in der Grenzschicht: Strömung kann Druckanstieg an der Rückseite des Körpers nicht folgen. Es entsteht stark verwirbeltes Totwasser- oder Nachlaufgebiet.

Durch die Reynoldszahl wird das Verhältnis von Impulsfluss zu Reibungsschubspannung mittels $\rho U^2 / (\mu U / L)$ abgeschätzt. In der Grenzschicht skaliert die Schubspannung aber mit $\mu U / \delta$, wobei δ die Dicke der Grenzschicht ist. Wegen $\delta \ll L$ ist eine die Strömung in der Grenzschicht beschreibende Re-Zahl wesentlich kleiner als die mit den charakteristischen Größen gebildete Re-Zahl.

Die Grenzschicht als starke Scherströmung ist drehungsbehaftet. Vergleiche mit der Couette-Strömung als Modellfall einer Scherströmung, in der die Drehung überall konstant ist, siehe S. 77. Aus der Grenzschicht wird die Drehung entsprechend der Wirbeltransportgleichung durch Konvektion weiter transportiert und durch Diffusion in Richtung der reibungsfreien Bereiche der Strömung ausgebreitet.

Die Wirbeltransportgleichung folgt aus der Anwendung der Rotation auf die Navier-Stokesschen Gleichungen (3.2) für inkompressible Strömungen,

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = -\vec{\omega} \cdot \text{grad}\vec{v} + \nu \Delta \vec{\omega}.$$

Die wie ein Materieteilchen in der Strömung transportierte Drehung, der Term auf der linken Seite, wird durch die Wirbelstreckung, dem 1. Term auf der rechten Seite, modifiziert und zufolge der Wirbeldiffusion, dem 2. Term, diffundiert. (BATCHELOR, Abschn. 5.2.)

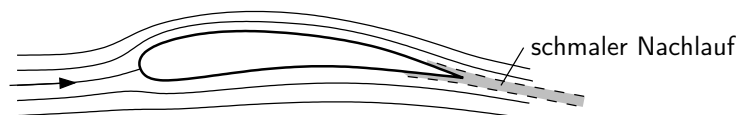
Widerstand stumpfer Körper

- Druck auf Vorderseite stimmt recht gut mit Potentialtheorie überein
- Druck im Totwasser ist kleiner als nach Potentialtheorie
- Widerstandsbeiwert $c_w = c_w(\text{Re})$;
Vereinfachung: Vorderseite Potentialtheorie $\neq f(\text{Re})$; Totwasser turbulent \Rightarrow Viskosität (Re) spielt keine Rolle, daher
$$c_w \approx \text{const}$$
- Aber: Ablösepunkt hängt davon ab, ob Grenzschicht laminar oder turbulent ist,
$$c_w = c_{w,1} \text{ für } \text{Re} < \text{Re}_{\text{krit.}}$$

$$c_w = c_{w,2} \text{ für } \text{Re} > \text{Re}_{\text{krit.}}, \quad c_{w,1} \neq c_{w,2}$$
- scharfkantige Körper: Ablösepunkt fixiert $\Rightarrow c_w \approx \text{const}$

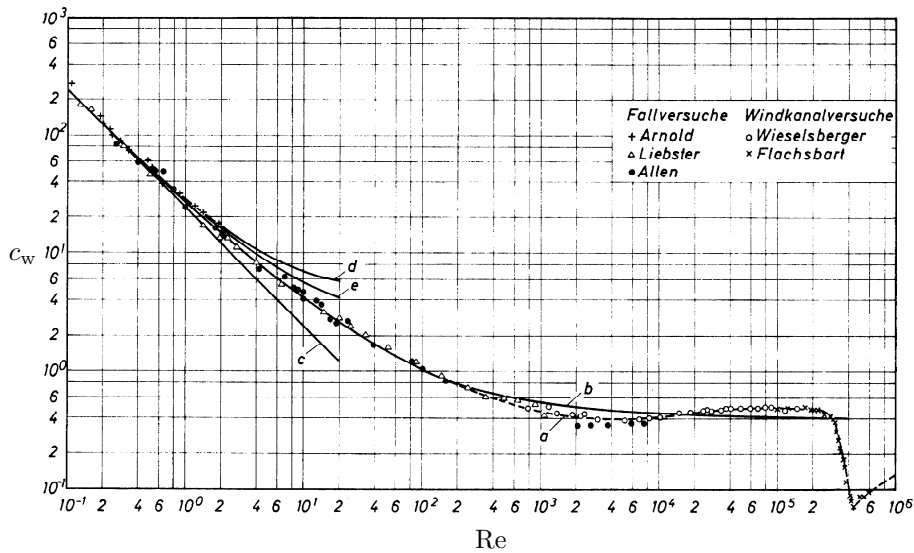
Widerstand schlanker Körper

Bei schlanken Körpern kann Ablösung nahezu ganz vermieden werden („stromlinienförmige Körper“).



- Potentialtheorie gibt in diesem Fall Stromlinien und Druckverteilung im ganzen Strömungsfeld recht gut wieder.
- Für Widerstandsberechnung natürlich nicht ausreichend – Grenzschichttheorie muss herangezogen werden.

3.5.7 Strömung um eine Kugel



Widerstandsbeiwert in Abhängigkeit von Re . (Abb. 5.2 aus BRAUER.)

$Re \lesssim 20$ Asymmetrische Strömung, Asymmetrie sichtbar ab $Re \approx 10$.

$20 \lesssim Re \lesssim 130$ Ablösung, Rezirkulation im Nachlauf. Ab $Re \approx 35$ konkaver, nicht konvexer Nachlauf. Ausbildung eines Wirbelringes.

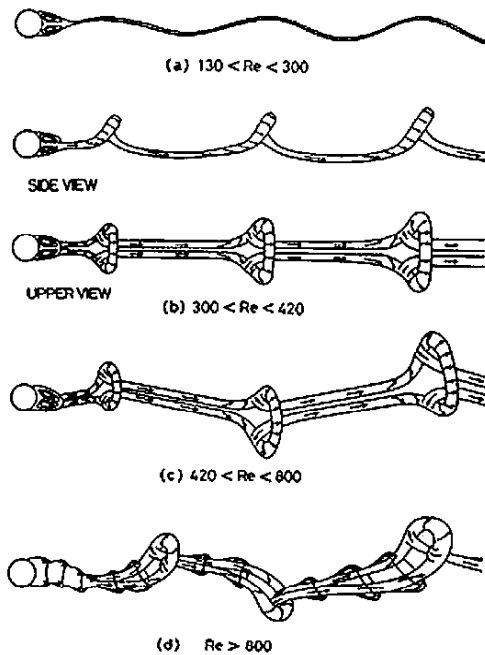
$130 \lesssim Re \lesssim 400$ Oszillierender Nachlauf. Ablösung einzelner Wirbel.

$400 \lesssim Re \lesssim 2,8 \cdot 10^5$ Regelmäßige Ablösung schlaufenförmiger Wirbel und Ausbildung einer Wirbelstraße, vgl. Kármánsche Wirbelstraße hinter einem Zylinder. Für $6000 \lesssim Re \lesssim 3 \cdot 10^5$ ist die Strouhal-Zahl nahezu konstant, $0,18 < Sr < 0,2$. Auch der Widerstandsbeiwert variiert nur um $\pm 13\%$ um den Wert $c_w = 0,445$.

$Re \gtrsim 2,8 \cdot 10^5$ Die abgelöste freie Scherschicht wird kurz nach der Ablösung turbulent und legt sich wieder an die Kugel an. Die turbulente Grenzschicht kann dem positiven Druckgradient auf der Rückseite der Kugel länger widerstehen, der Ablösepunkt bewegt sich sprunghaft stromab. Der Widerstandsbeiwert fällt von $c_w = 0,5$ bei $Re = 2 \cdot 10^5$ auf $c_w = 0,07$ bei $Re = 4 \cdot 10^5$.

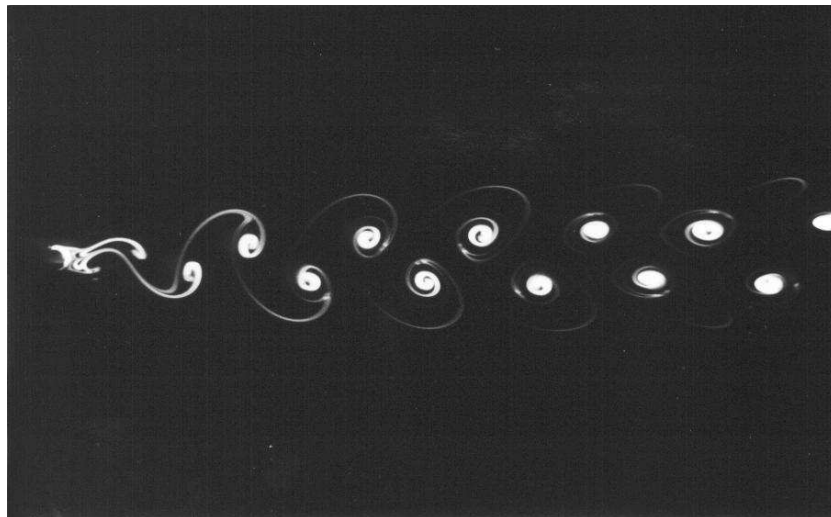
$Re \gtrsim 10^6$ Umschlag zu turbulenter Strömung in der Grenzschicht, keine Ablöseblase. Umschlag- und Ablösepunkt bewegen sich stromauf, geringe Zunahme von c_w auf $c_w \approx 0,19$ bei $Re = 10^7$.

(Beschreibung nach CLIFT et al., S. 100 ff.)



Darstellung des Nachlaufs einer Kugel in verschiedenen Re-Zahl-Bereichen. (Abb. 8 aus SAKAMOTO und HAINU, J. Fluids Eng. 112, 1990.)

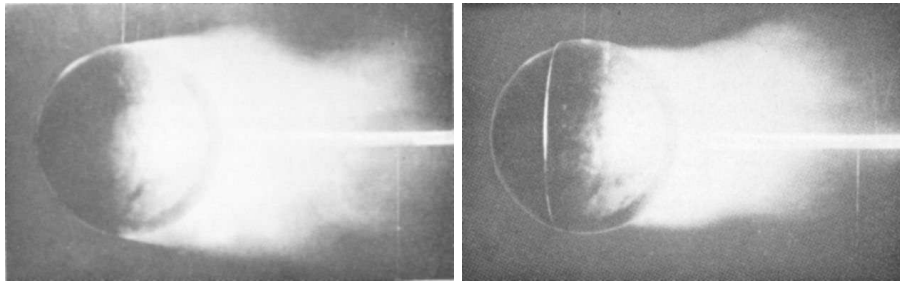
Der Nachlauf hinter einem Zylinder ist, da es sich hier um eine zwei-dimensionale, nicht um eine drei-dimensionale Strömung handelt, topologisch wesentlich einfacher als der hinter einer Kugel. Im Bereich von $40 \lesssim Re \lesssim 200$ lösen abwechselnd auf beiden Seiten des Zylinders Wirbel ab und formen die Kármánsche Wirbelstraße.



Streichlinien in der Strömung hinter einem Zylinder, $Re = 105$. (Aus TANEDA, S. 22.)

Eiffel-Paradoxon

Turbulente Grenzschicht kann wegen intensiveren Energie- und Impulsaustausches mit der Außenströmung größeren Druckanstieg vertragen als laminare Grenzschicht \Rightarrow größerer Druckrückgewinn, niedrigerer Formwiderstand bei turbulenter Grenzschicht.

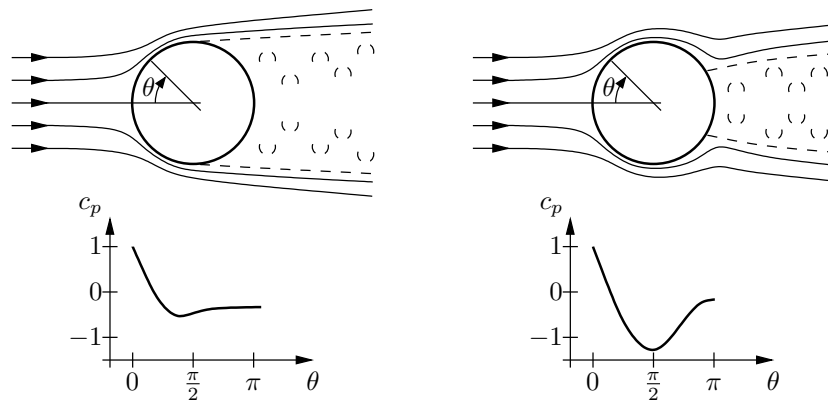


$$c_w \approx 0,48$$

$$c_w \approx 0,18$$

Strömung um eine Kugel. Links ohne, rechts mit Stolperdraht. (Wieselsberger, 1914. Abb. 4.14 aus SCHLICHTING und TRUCKENBRODT).

Im klassischen Experiment von Wieselsberger wird durch einen ringförmigen Stolperdraht der Umschlag zu turbulenter Strömung in der Grenzschicht erzwungen. Dadurch kann schon bei niedrigeren Re-Zahlen derjenige Widerstandsbeiwert gemessen werden, der in ungestörter Strömung erst bei höheren Re-Zahlen auftritt. Der Nachlauf hinter der Kugel wurde durch Rauch sichtbar gemacht.



Strömung und Druckverteilung an der Kugeloberfläche für (links) $Re < 2 \cdot 10^5$ und (rechts) $Re > 4 \cdot 10^5$. (Druckverteilung nach Abb. 5.10 in CLIFT et al.)

3.5.8 Tropfen und Tropfenzerfall

Widerstand von Tropfen

Tropfen in Gas, $Re \gg 1$;

wegen $\mu_V \gg \mu$ wie fester Körper, $c_w = 0,4 - 0,5 \approx const$ für $Re > 750$

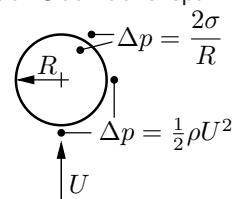
Fallgeschwindigkeit aus $F_W = F_G$

$$c_w \frac{1}{2} \rho U^2 \frac{\pi d^2}{4} = \rho_V g \frac{\pi d^3}{6} \Rightarrow U = \sqrt{\frac{4}{3c_w} \frac{\rho_V}{\rho} g d}$$

Bedingung für Kugelform: Druckdifferenz aufgrund der Oberflächenspannung muss über Staudruck dominieren

$$p_{\text{Gas}} - p_{\text{Fl.}} = \frac{4\sigma}{d} \gg \frac{1}{2} \rho U^2$$

$$\Rightarrow We \ll 8, \quad We = \rho U^2 d / \sigma$$



praktisch ausreichend: Kugelform, falls $We < 6$

Wasser in Luft:

$d = 1 \text{ mm} \Rightarrow U \approx 4 \text{ m/s}$, $Re \approx 300$, $We \approx 0,3$;

$d = 4 \text{ mm} \Rightarrow U \approx 9 \text{ m/s}$, $Re \approx 2500$, $We \approx 5,5$, Abflachung.

Tropfenzerfall

$We > 6$: zunächst Abplattung, dann hutartiges Auswölben \Rightarrow Widerstand steigt

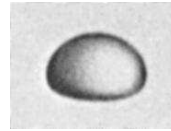
$We \approx 12$: Zerfall des Tropfens

Wasser: $We = 12 \Rightarrow d \approx 6,5$ mm
größere, frei fallende Tropfen sind nicht möglich

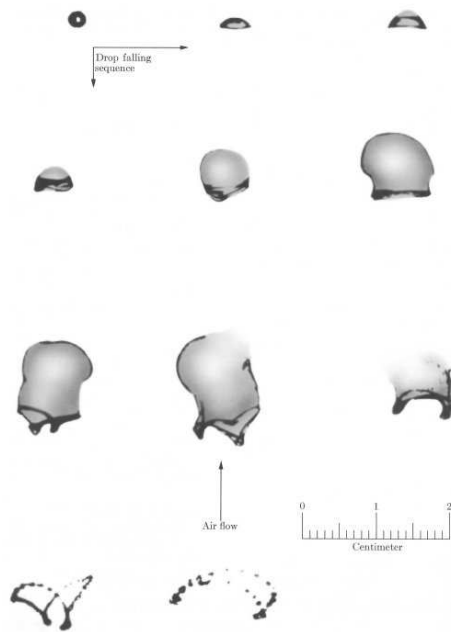
$$d \dots \text{äquivalenter Durchmesser, } d = (6V/\pi)^{1/3}$$

Zusätzliche Kennzahl, falls innere Viskosität eine Rolle spielt:
Ohnesorge-Zahl,

$$Oh = \frac{\mu_V}{\sqrt{\rho_V \sigma d}}$$



Wassertropfen in Luft.
 $d = 5,8$ mm, $We = 7,8$.



Zerfall eines Wassertropfens in einem Luftstrom. $d = 2,2$ mm, $U = 24$ m/s, $We \approx 22$.

(Abb. 17.11 aus BRODKEY.)

3.5.9 Vergleich von Potentialströmung mit realer Strömung um eine kugelförmige Gasblase

Mit adsorbiertem Film:

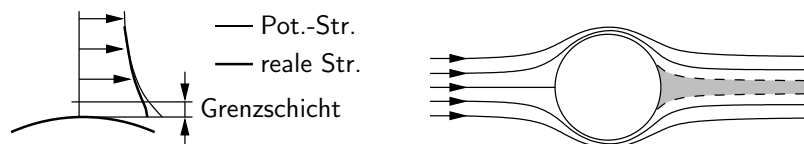
wie fester Körper bzw. Kugel für $We < 6$;

$c_w = 0,4 - 0,5 \approx const$ für $Re > 750$

$$\text{Steiggeschwindigkeit } U = \sqrt{(4/3c_w)gd}$$

In reiner Flüssigkeit:

Potentialströmung stimmt fast überall. Winzige Grenzschicht um $\tau = 0$ an Grenzfläche zu erfüllen \Rightarrow geringer Geschwindigkeitsverlust \Rightarrow Ablösung erst kurz vor dem hinteren Staupunkt



An der Oberfläche einer Blase muss wegen $\mu_V \ll \mu$ die Schubspannung und damit die Normalableitung der Tangentialgeschwindigkeit verschwinden. Diese Randbedingung bedingt eine wesentlich kleinere Störung der Geschwindigkeit als durch die Wandhaftbedingung an der Oberfläche eines festen Körpers entsteht. Wegen der geringen Geschwindigkeitsabnahme in der Grenzschicht verträgt diese einen starken Druckanstieg und löst erst nahe am hinteren Staupunkt ab. Die Potentialströmung ist deshalb im ganzen Raum eine gute Näherung für die Geschwindigkeitsverteilung und den Druck.

Im Folgenden wird der Widerstand einer Blase mit Hilfe der Potentialströmung um eine Kugel abgeschätzt.

Widerstandsberechnung aus Dissipation

Schleppeistung $F_W U = \text{Dissipation} \times \text{Volumen}$

Schätzungen:

$$\text{Geschwindigkeitsgradient } \dot{\gamma} \sim \frac{U}{R} = \frac{2U}{d}; \tau \sim \mu \dot{\gamma}$$

$$\text{Volumen, in dem Energie dissipiert wird } V \sim (2d)^3 \pi / 6$$

$$F_W U \sim \tau \dot{\gamma} V = \mu \left(\frac{2U}{d} \right)^2 \frac{(2d)^3 \pi}{6} \approx 5\pi \mu U^2 d$$

$$\Rightarrow F_W \approx 10\pi \mu U R$$

$$\text{genaue Rechnung: } F_W = 12\pi \mu U R \Rightarrow c_w = \frac{48}{\text{Re}}$$

Doppelter Stokescher Wert! Proportional U , nicht U^2 , obwohl $\text{Re} \gg 1$.

$$\text{Steiggeschwindigkeit } U = \frac{gd^2}{36\nu}$$

Gasblase, kugelförmig, *ohne* Film, $\text{Re} \gg 1$

Die globale Energiebilanz fordert, dass die in der Strömung dissipierte Energie gleich der am Fluid verrichteten Arbeit ist. In der realen Strömung hat ein Körper bzw. eine Blase einen Widerstand, die vom Körper am Fluid verrichtete Schleppeistung ist gleich der Dissipation. Die Dissipation in der realen Strömung kann gut durch die Dissipation in der Potentialströmung genähert werden, damit erhält man den Widerstand des Körpers.

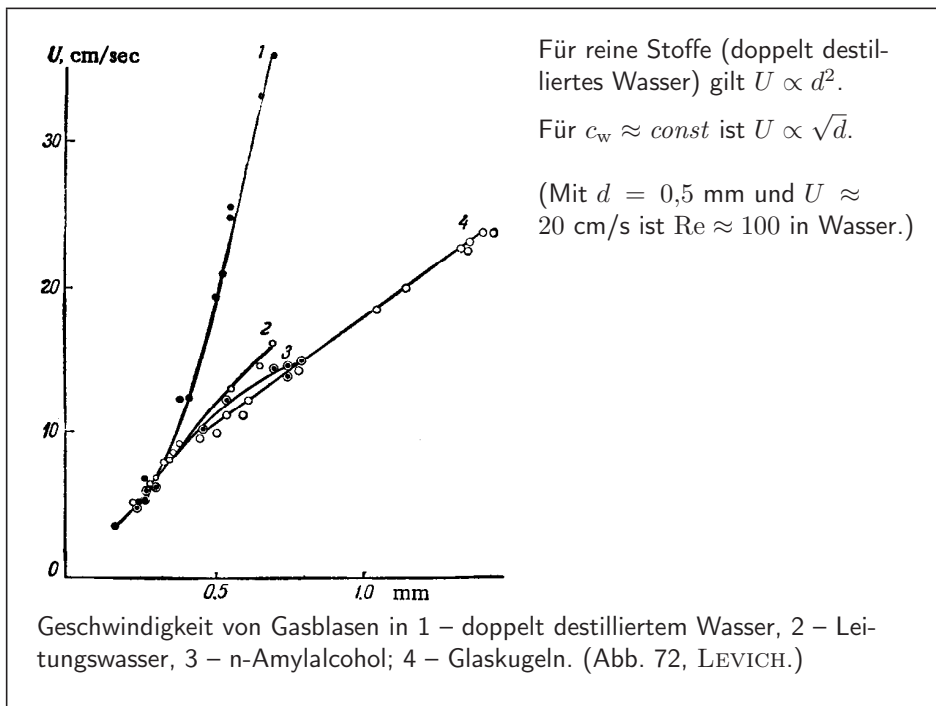
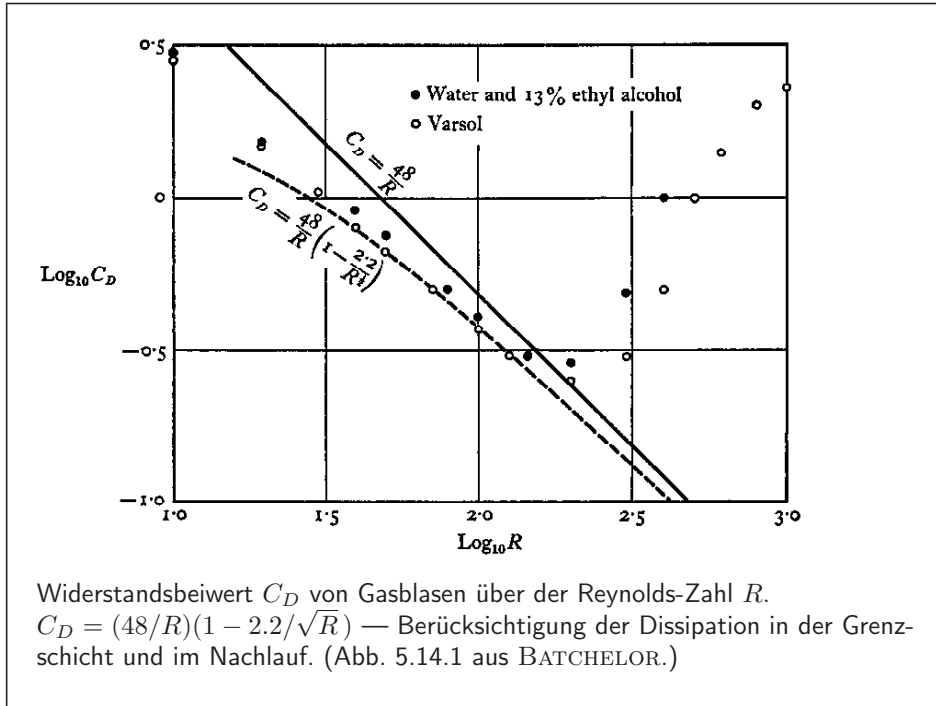
In der Potentialströmung erfährt ein Körper bzw. eine Blase keinen Widerstand. Der Körper bewegt sich durch das Fluid, ohne dabei Arbeit zu verrichten. Die Arbeit wird dem Fluid entlang der Körperkontur zugeführt. Diese Arbeit ist nötig, um die tangential Geschwindigkeit zu ermöglichen, die die Drehungsfreiheit der Potentialströmung erfüllt.

In der Potentialströmung um eine Kugel ist $\tau_{r\theta}(r = R) = 3\mu U \sin \theta / R$, wegen

$$\tau_{r\theta} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) \quad (\text{S. 70}) \text{ sowie mit } v_r \text{ und } v_\theta \text{ aus}$$

Gl. (3.43). Damit folgt für die Schleppeistung P_τ

$$P_\tau = - \oint v_\theta \tau_{r\theta} dA = \int_0^\pi \frac{3}{2} \frac{3\mu U}{R} 2\pi R^2 \sin^2 \theta d\theta = 12\pi \mu U^2 R.$$



3.5.10 Gasblasen

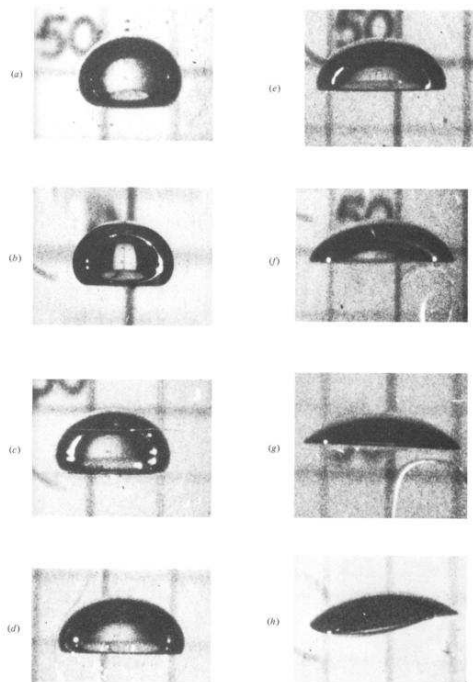
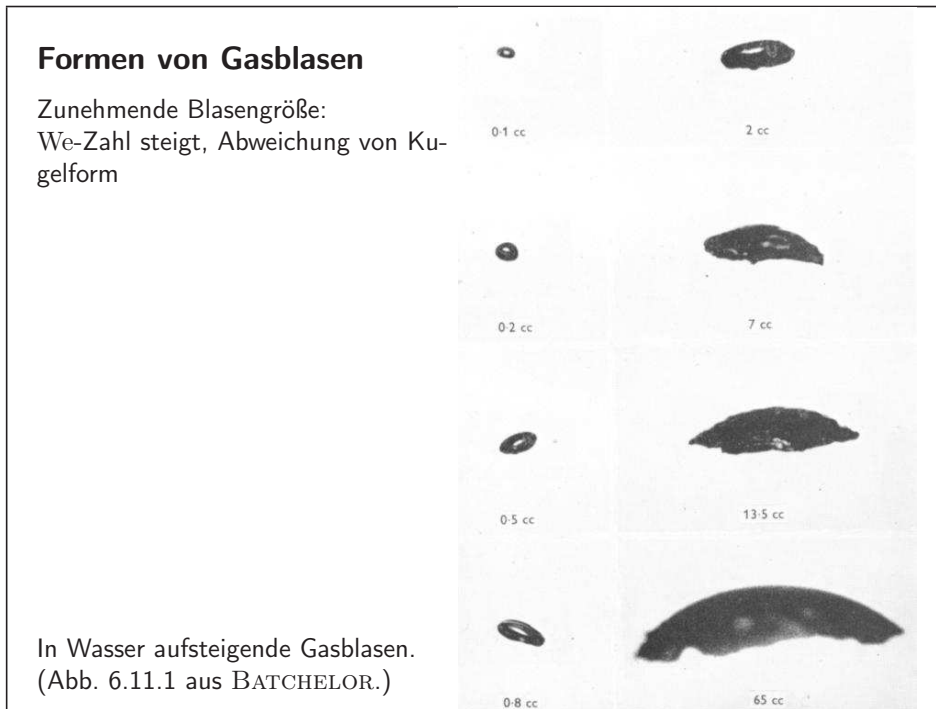
Bewegung kugelförmiger Blasen

- Bedingung für Kugelform: $We < 6$
- Größere Re-Zahlen: Instabilität der vertikalen Bewegung, z.B. Gasblasen in Wasser:

d [mm]	Re	Bewegung
1,3 – 2,0	565 – 880	schraubenförmig
2,0 – 3,6	880 – 1350	zickzack (eben) dann schraubenförmig
3,6 – 4,2	1350 – 1510	zickzack
4,2 – 17	1510 – 4700	geradlinig, schaukelnd

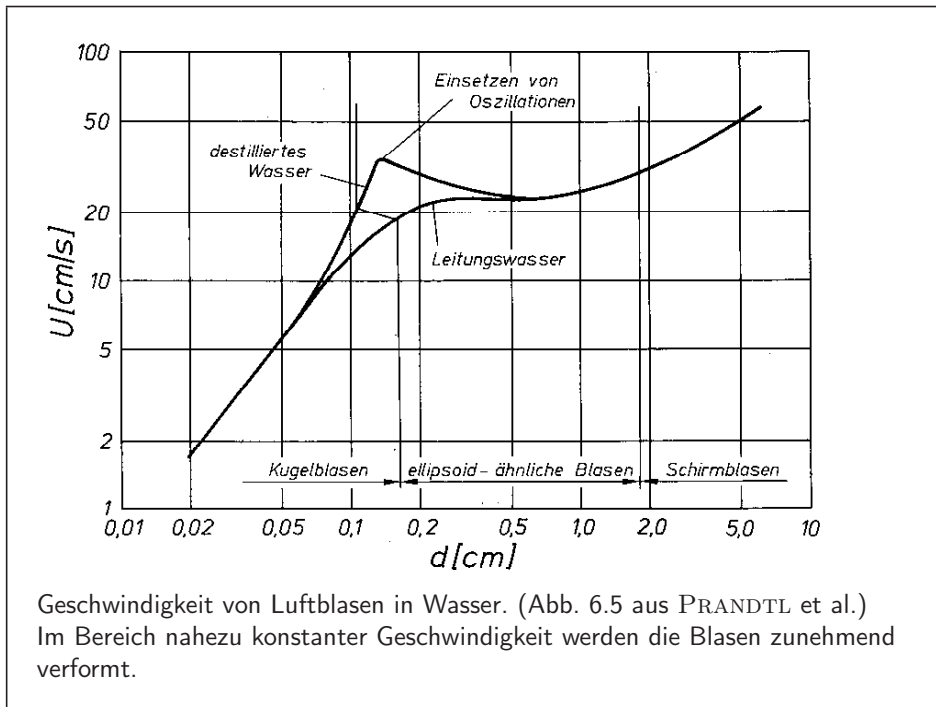
(Nach Tabelle 7.1 aus CLIFT et al.)

- Bewegung stabil in reinen Flüssigkeiten mit $Mo > 10^{-8}$ oder $Mo < 10^{-8}$ und $We < 3$
- Verunreinigungen wirken destabilisierend

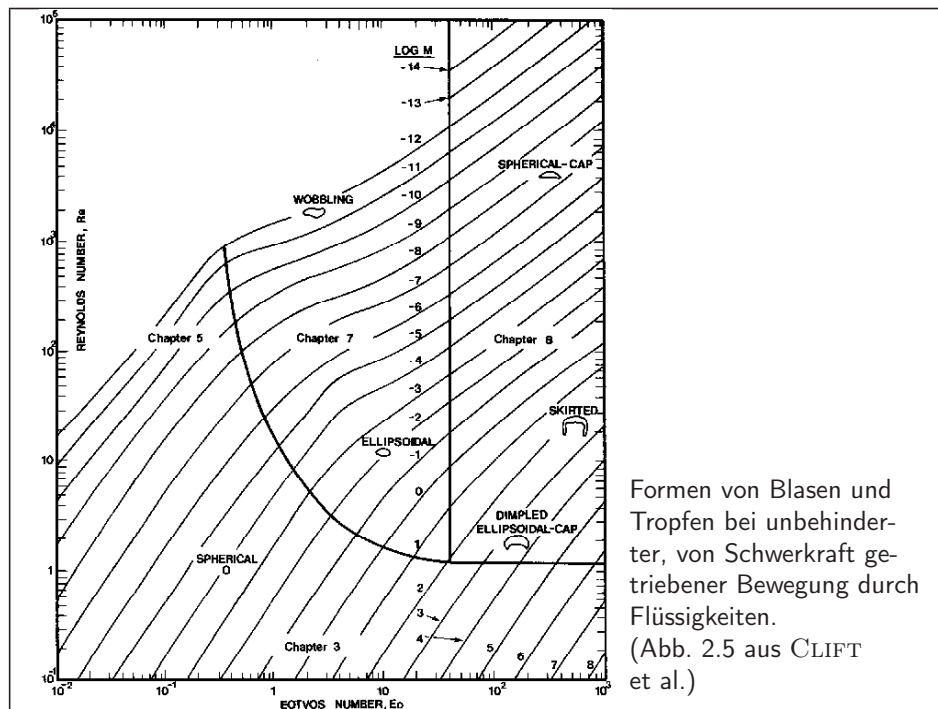


Gasblasen mit einem Volumen von $9,3 \text{ cm}^3$ in Lösungen unterschiedlicher Viskosität. (Abb. 3 aus BHAGA und WEBER, J. Fluid Mech. 105, 1981.)

	Re	Mo
(a)	2,47	848
(b)	3,57	266
(c)	7,16	41,1
(d)	13,3	5,51
(e)	20,4	1,31
(f)	42,2	0,103
(g)	94,0	$4,63 \cdot 10^{-3}$
(h)	151	$8,60 \cdot 10^{-4}$



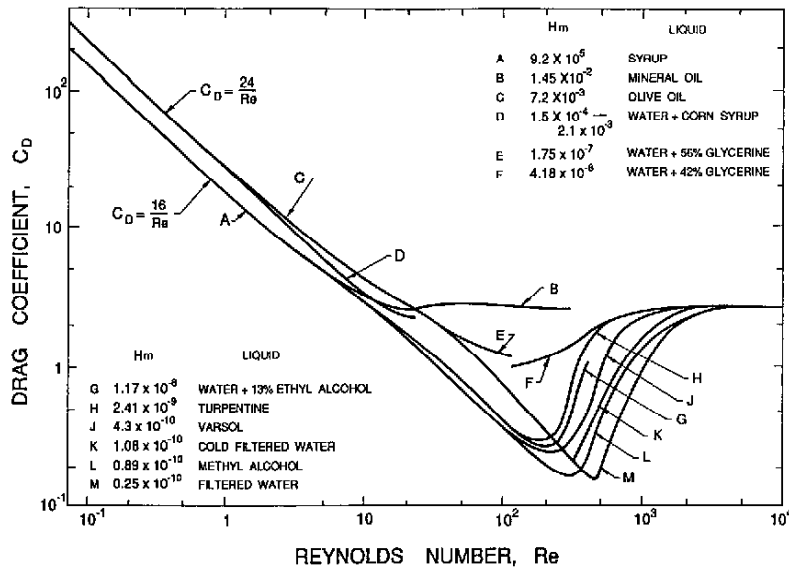
Um die Geschwindigkeit von kugelförmigen Blasen zu bestimmen, muss zwischen reinen und verunreinigten Systemen unterschieden werden. In reinen Systemen ist der Widerstand von Gasblasen aufgrund der mobilen Grenzfläche geringer als in verunreinigten Systemen. Im Diagramm ist zu erkennen, dass Blasen in reinen Systemen eine höhere Geschwindigkeit haben können.



Falls Gasblasen nicht von gegebener Form sind, spielt zusätzlich zu den Größen ρ , μ , d , g und U auch die Oberflächenspannung σ eine Rolle. Eine Dimensionsanalyse zeigt: Sechs Größen minus den drei Basisgrößen Masse, Länge und Zeit gibt drei unabhängige, dimensionslose Kennzahlen. Die Steiggeschwindigkeit ist durch eine Relation $f(\text{Re}, \text{We}, \text{Fr}) = 0$ oder gleichwertig $c_w = c_w(\text{Re}, \text{We})$ gegeben. (Für kugelförmige Blasen gilt $c_w = c_w(\text{Re})$). Statt Re , Fr und We zu nehmen, die alle drei die Endgeschwindigkeit U enthalten, ist es günstiger, einen anderen Satz unabhängiger Kennzahlen zu wählen. In obiger Abbildung werden die Formen von Blasen und Tropfen als Funktion der Reynolds-, Morton- und Eötvös-Zahlen dargestellt,

$$\text{Mo} = \frac{g\mu^4\Delta\rho}{\rho^2\sigma^3}, \quad \text{Eo} = \frac{g\Delta\rho d^2}{\sigma}, \quad \Delta\rho = |\rho_V - \rho|$$

Das Diagramm erlaubt auch, einen groben Wert für die Endgeschwindigkeit einer Blase oder eines Tropfens bei gegebenem Volumen abzulesen.



Widerstandsbeiwert C_D über Re für verschiedene Werte der Haberman-Morton Zahl $H_m = (g\mu^4/(\rho\sigma^3))(1 - m_V/\rho V)$. (Abb. 3.6 aus BRENNEN.)

Obiges Diagramm ermöglicht eine relativ genaue Bestimmung der Steiggeschwindigkeit von Gasblasen.

Für verunreinigte Systeme schlagen CLIFT et al. (Abschn. 7.3) im Bereich

$$Mo < 10^{-3}, \quad Eo < 40, \quad Re > 0,1$$

mit $Mo = g\mu^4\Delta\rho/(\rho^2\sigma^3)$, $Eo = g\Delta\rho d^2/\sigma$ und $\Delta\rho = |\rho_V - \rho|$ folgende Korrelationen vor:

$$J = 0,94H^{0,757} \quad \text{für } 2 < H \leq 59,3,$$

$$J = 3,42H^{0,441} \quad \text{für } H > 59,3.$$

J und H sind definiert als

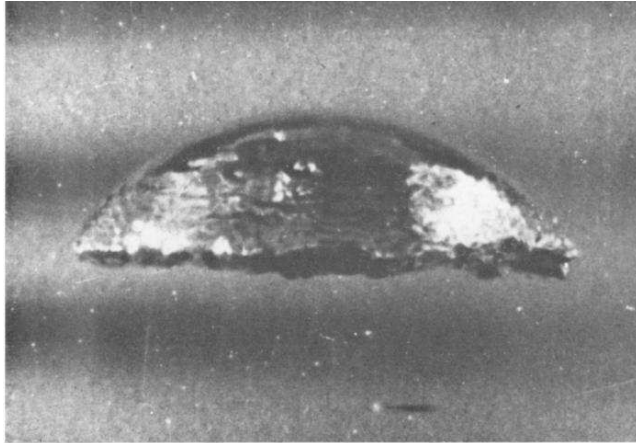
$$H = \frac{4}{3}Eo Mo^{-0,149} (\mu/\mu_W)^{-0,14}, \quad J = Re Mo^{0,149} + 0,857,$$

mit $\mu_W = 9 \cdot 10^{-4}$ Pa s.

In Abschn. 7.4 geben CLIFT et al. eine Korrektur an, um obige Korrelationen auf reine Systeme anwenden zu können.

Schirmblasen

Ab $We \approx 20$ nehmen Blasen eine Form ein, die einem Kugelabschnitt ähnelt („spherical cap bubble“). Wasser: ab ca. 5 cm^3 Volumen.



Schirmblase (Abb. 1 aus WEGENER und PARLANGE, Ann. Rev. Fluid Mech. 5, 1973.)

Schirmblasen sind wiederum über einen weiten Re-Zahl Bereich stabil. Anekdotische Evidenz besagt, dass Schirmblasen ab einem Durchmesser von ca. 30 cm zerfallen (BRENNEN, S. 64).

Steiggeschwindigkeit von Schirmlblasen

$Re \gg 1, We \gg 1 \Rightarrow \nu$ und σ unbedeutend.

Dimensionsanalyse: $f(Fr) = 0 \Rightarrow Fr = const$
mit $Fr = U^2/(gR)$

$$U = k\sqrt{gR}$$

R ... Radius der Kugelkalotte

Theorie (DAVIES und TAYLOR, Proc. R. Soc. Lond. A 200, 1950):

$$k = 2/3 \quad (3.47)$$

Numerik und Experiment: $\theta_B \approx 50^\circ$

Wird ein fiktiver Widerstandsbeiwert der Schirmlase durch den Widerstandsbeiwert der Kugel definiert, aus dem die Schirmlase geschnitten wird, $c_w \frac{1}{2} \rho U^2 R^2 \pi = \frac{4}{3} R^3 \pi \rho g$, $c_w = 8Rg/(3U^2)$, so entspricht das Ergebnis von DAVIES und TAYLOR (1950), Gl. (3.47),

$$c_w = 6.$$

JOSEPH (J. Fluid Mech. 448, 2003) hat die Analyse von DAVIES und TAYLOR durch Berücksichtigung der viskosen Terme in der Normalspannungsbedingung an der Blasenoberfläche erweitert. JOSEPH erhält, in exzellenter Übereinstimmung mit experimentellen Daten,

$$c_w = 6 + 32/Re,$$

mit $Re = 2UR/\nu$.

Der Radius einer Kugel, die dasselbe Volumen wie die Schirmlase hat, beträgt im Limit großer Reynolds-Zahlen $0,445R$ (JOSEPH, 2003). Das Volumen der Schirmlase ist somit das $0,445^3 = 0,088$ -fache des Volumens der Kugelkalotte. Dies entspricht einem Winkel von $\theta_B = 50,6^\circ$.

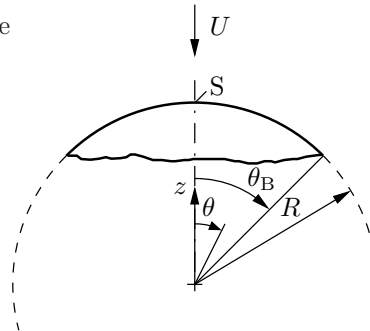
Berechnung der Steiggeschwindigkeit

Geschwindigkeit der Potentialströmung um eine Kugel, $r = R$:

$$v = v_\theta = \frac{3}{2}U \sin \theta$$

Bernoulligleichung, mit hydrostatischer Druckänderung:

$$\frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = gz_S + \frac{p_0}{\rho}$$



Hier ist z_S die z -Koordinate des Scheitelpunktes und p_0 ist der Druck in der Flüssigkeit im dort gelegenen Staupunkt.

Der Druck in der Blase ist wegen $\mu_V \ll \mu$ und $\rho_V \ll \rho$ konstant. Die Oberflächenspannung ist wegen $We \gg 1$ vernachlässigbar. Der Druck in der Blase ist deshalb gleich dem Druck in der Flüssigkeit bei $r = R$. Mit $p = p_0$ folgt aus der Bernoulligleichung,

$$\frac{v^2}{2} = g(z_S - z) = gR(1 - \cos \theta).$$

Einsetzen für v gibt

$$\frac{9}{8}U^2 \sin^2 \theta = gR(1 - \cos \theta).$$

Entwicklung nach kleinen Werten von θ liefert

$$U^2 = \frac{8}{9}gR \frac{1 - \cos \theta}{\sin^2 \theta} \approx \frac{8}{9}gR \frac{\frac{1}{2}\theta^2 - \frac{1}{24}\theta^4}{\theta^2 - \frac{1}{3}\theta^4} \approx \frac{8}{9}gR \left(\frac{1}{2} + O(\theta^2) \right).$$

Es folgt das in Gl. (3.47) berichtete Ergebnis,

$$U = \frac{2}{3}\sqrt{gR}.$$

Das Bemerkenswerte an dieser Rechnung ist, dass die Geschwindigkeit aus der Form der Blase folgt.

Große Gasblasen in einem Rohr



(„slug flow“, „Taylor bubble“)

Verwandt mit Schirmblasen; ebenfalls $Re \gg 1$, $We \gg 1$. Mit Rohrdurchmesser D

$$U = k_R \sqrt{gD}$$

Exp. und Theorie (DUMITRESCU, Z. Angew. Math. Mech. 23, 1943):

$$k_R \approx 0,35$$

Stimmt gut für $Re > 200$, $Eo > 40$ (VIANA et al., J. Fluid Mech. 494, 2003).

(Abb. 5 aus VIANA et al.)

Zusammenfassung

		Partikel	Tropfen	Blasen	Schirmbl.	Propfenbl.
$Re \ll 1$	c_w	$24/Re$	$24/Re$	$16/Re$		
	F_W	$6\pi\mu UR$ Stokes	$6\pi\mu UR$ Ribtsch.-Had.	$4\pi\mu UR$		
$Re \gg 1$	c_w	0,45	0,45	$48/Re$	2,67*	11

Tropfen: $\mu_V \gg \mu$, $\rho_V \gg \rho$; Blasen: $\mu_V \ll \mu$, $\rho_V \ll \rho$.

*Auf die Querschnittsfläche der volumengleichen Kugel bezogen.

3.6 Kavitation

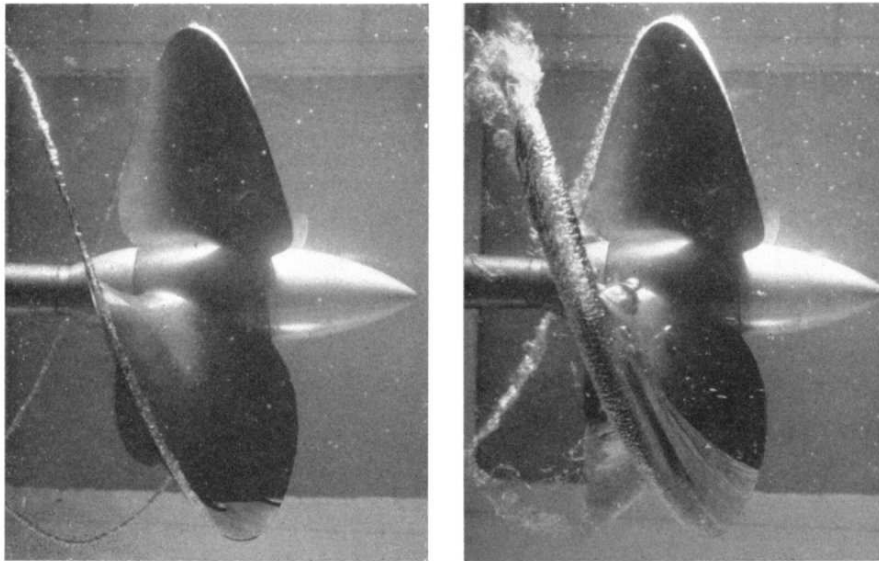
Kavitation: Bildung von dampf- oder gaserfüllten Hohlräumen.

Flüssigkeit kann verdampfen durch

- Temperaturerhöhung: Sieden
- Druckverringering: Kavitation

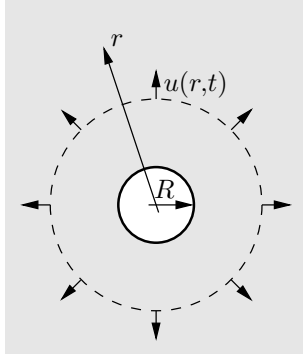
In Flüssigkeitsströmungen kann der Druck leicht unter den Sättigungsdampfdruck p_{sat} fallen. Dampfblasen entstehen.

Steigt der Druck wieder, kollabieren diese Dampfblasen. Es entstehen hohe Drücke im Zentrum der Blasen. Kavitationsschäden, z.B. an Turbinenschaufeln oder Schiffspropellern, sind die Folge.



Kavitation an einem Propeller. Links bildet sich ein Hohlraum im Zentrum des von der Propellerspitze abgehenden Wirbels. Rechts, bei höherer Strömungsgeschwindigkeit, bilden sich auch schon auf der Saugseite der Propellerblätter Kavitationsblasen. (Abb. 6.12.2 aus BATCHELOR.)

Wachstum einer Gasblase



Druck in der Blase: p_G , Radius: $R = R(t)$

Kontinuität: $u(r,t) = \frac{f(t)}{r^2}$

(Quellenströmung, Gl. (3.38))

Randbedingung: $u(r = R) = \dot{R}$,

$$u(r,t) = \dot{R} \frac{R^2}{r^2} \quad (3.48)$$

Einsetzen in Eulersche Gleichungen (3.44),
Integration, dynamische Randbedingung bei $r = R$:

$$\ddot{R}R + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = -\frac{p_\infty - p_G}{\rho} - 4\frac{\mu\dot{R}}{\rho R} - \frac{2\sigma}{\rho R} \quad (3.49)$$

Rayleigh-Plesset Gleichung

Gl. (3.44) sind die Eulerschen Gleichungen nach Anwendung des Entwicklungssatzes,

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad} |\vec{v}|^2 = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p.$$

Einsetzen des Ausdrucks für die Geschwindigkeit, Gl. (3.48), ergibt

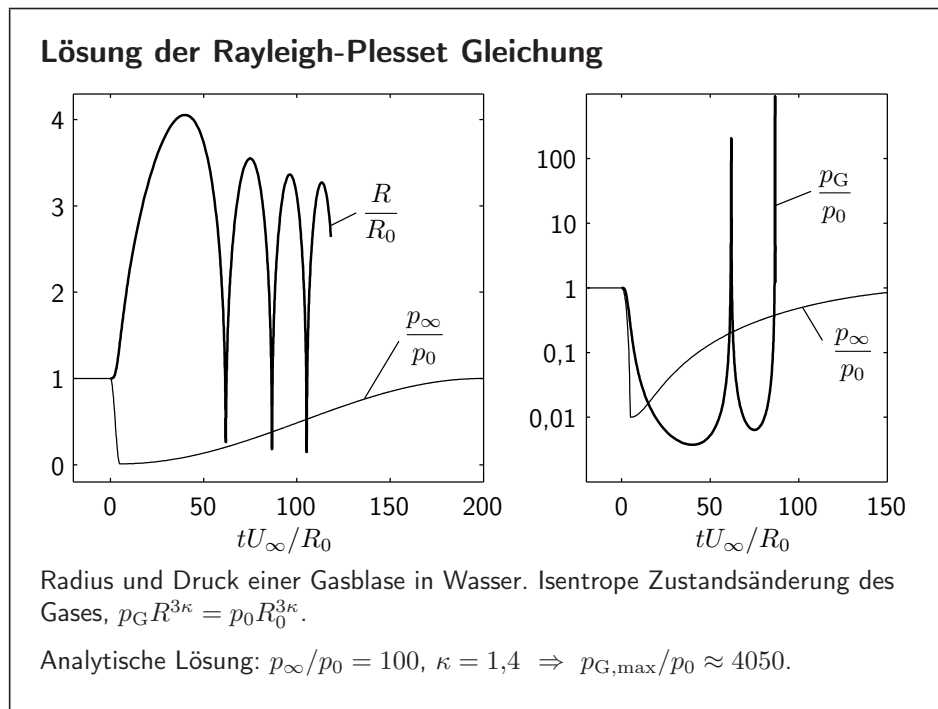
$$\ddot{R} \frac{R^2}{r^2} + 2\dot{R} \frac{R}{r^2} - 2\dot{R}^2 \frac{R^4}{r^5} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}.$$

Integration, $\int_R^\infty dr$ unter der Annahme, p liesse sich separieren, $p(r,t) = f(r)g(t)$, ergibt

$$\ddot{R}R + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = -\frac{p_\infty - p(r = R_+)}{\rho}.$$

Die Rayleigh-Plesset Gleichung folgt nach Anwendung der dynamischen Randbedingung an der Stelle $r = R$, unter Vernachlässigung der Viskosität des Gases, $\sigma_{rr}(r = R_-) - p_G = \sigma_{rr}(r = R_+) - p(r = R_+) - 2\sigma/R$,

$$-p_G = 2\mu \frac{\partial u}{\partial r} - p(r = R_+) - \frac{2\sigma}{R}.$$



Die Rayleigh-Plesset Gleichung beschreibt eine Blase in Abhängigkeit vom Druck p_∞ im Fernfeld. In den Abbildungen oben ist der Verlauf des Radius und des Drucks in der Blase nach rascher Absenkung des Außenruckes auf $p_{\infty,\min} = 0,01 p_0$ und langsamen Anstieg auf $p_\infty = p_0$ gezeigt. Gerechnet für $R_0 = 1$ mm, $p_0 = 1$ bar, $U_\infty = 20$ m/s.

Im gezeigten Beispiel fällt der Druck in der Blase unter den minimalen Druck in der Außenströmung, $p_{G,\min} = 0,004 p_0$. Dann kollabiert die Blase, der Druck steigt auf ein Vielfaches des Ausgangswertes, $p_{G,\max} = 204 p_0$. Danach oszilliert der Radius der Blase um den Ausgangswert. Tatsächlich wird die Symmetrie der radialsymmetrischen Strömung schon beim ersten Zusammenfallen zerstört und die Rayleigh-Plesset Gleichung beschreibt die Bewegung der Blase nicht mehr gut.

Analytische Lösung der Rayleigh-Plesset Gleichung

Für eine sprunghafte Änderung des Außendruckes ist eine analytische Lösung der nicht-viskosen Rayleigh-Plesset Gleichung möglich. Sei eine Gasblase im Gleichgewicht mit der Außenströmung, $p_G = p_0$, $p_\infty = p_0$ für $t < 0$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Außendruck plötzlich auf einen konstanten Wert erhöht, $p_\infty > p_0$ für $t \geq 0$.

Multiplikation der inerten Terme und des Druckterms in der Rayleigh-Plesset Gleichung mit $2R^2\dot{R}$ ergibt

$$2R^3\dot{R}\ddot{R} + 2R^2\dot{R}^3 = -\frac{p_\infty}{\rho}R^2\dot{R} - 2\frac{p_0}{\rho}R_0^{3\kappa}R^{2-3\kappa}\dot{R}.$$

Das unbestimmte Integral lautet

$$R^3\dot{R}^2 = -\frac{p_\infty}{\rho}\frac{2}{3}R^3 - \frac{p_0R_0^{3\kappa}}{\rho}\frac{2}{3(1-\kappa)}R^{3-3\kappa}.$$

Nun werden die Anfangsbedingungen und der Umstand, dass \dot{R} in den Extrema von R verschwindet, berücksichtigt. Damit ergibt die Auswertung des Integral zwischen den Grenzen $t = 0$: $\dot{R} = 0$, $R = R_0$ und $t = t_1$: $\dot{R} = 0$, $R = R_{\min}$,

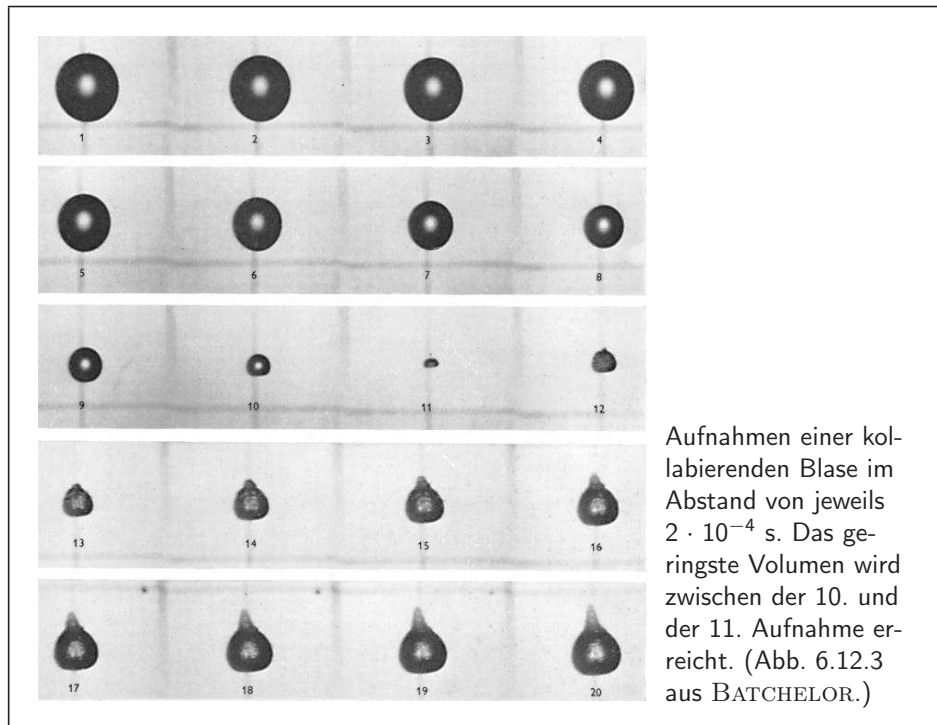
$$0 = -\frac{p_\infty}{\rho}\frac{2}{3}(R_{\min}^3 - R_0^3) - \frac{p_0}{\rho}\frac{2}{3(1-\kappa)}R_0^{3\kappa}(R_{\min}^{3-3\kappa} - R_0^{3-3\kappa}).$$

Nach algebraischer Umformung erhält man

$$\left(\frac{R_0}{R_{\min}}\right)^{3\kappa-3} - 1 = (\kappa - 1)\frac{p_\infty}{p_0}\left(1 - \left(\frac{R_{\min}}{R_0}\right)^3\right).$$

Für $R_0 \gg R_{\min}$ gilt in guter Näherung $(R_0/R_{\min})^{3\kappa-3} \approx (\kappa - 1)(p_\infty/p_0)$. Mit $\kappa = 1,4$ und $p_\infty/p_0 = 100$ erhält man beispielsweise $R_0/R_{\min} \approx 40^{1/1,2} = 21,63$. Mit der Isentropenbeziehung, $p_{G,\max}R_{\min}^{3\kappa} = p_0R_0^{3\kappa}$, folgt

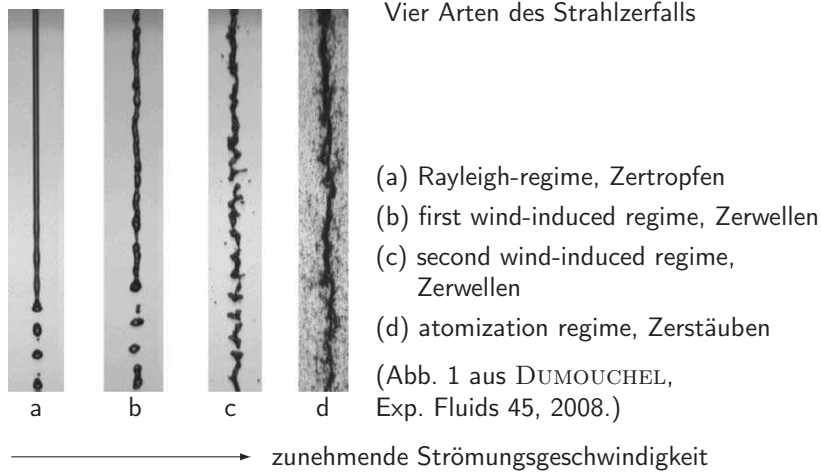
$$\frac{p_{G,\max}}{p_0} \approx \left((\kappa - 1)\frac{p_\infty}{p_0}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{p_{G,\max}}{p_\infty} \approx (\kappa - 1)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \left(\frac{p_\infty}{p_0}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}.$$



Beim Zusammenfallen verliert eine Blase meist ihre radiale Symmetrie. Die Blase wird auf einer Seite flacher. Die an dieser Stelle gegeneinander strömende Flüssigkeit erzeugt einen kleinen Freistrahл („microjet“), in dem die Flüssigkeit jedoch hohe Geschwindigkeiten erreichen kann. In der Abbildung oben ist die durch den Freistrahл verursachte Störung auf der dem Freistrahл gegenüberliegenden Seite der Blase zu sehen.

Kavitationsschäden werden einerseits durch den Freistrahл, andererseits durch die Ermüdung des Materials zufolge der beim Zusammenfallen generierten Stoß- bzw. Druckwellen verursacht (BRENNEN, Abschn. 5.2.4).

3.7 Zerfall von Flüssigkeitsstrahlen



Die Bereiche unterscheiden sich aufgrund der Instabilitätsmechanismen, die zum Strahlzerfall führen.

Bildung eines Strahls: $We_L > 8$, davor Tropfen. Vgl. Stabilität eines Tropfens, S. 93.

Rayleigh-regime: Instabilität aufgrund von Oberflächenspannung und inerten Kräften. Die Tropfen sind von ähnlicher Größe, der Tropfendurchmesser ist größer als der Durchmesser des Strahls. Der Strahl bricht viele Düsendurchmesser stromab der Düse auf. Die Länge des Strahls wird durch die Strömung in der Düse nicht beeinflusst.

First wind-induced regime: Zusätzlich zu Oberflächen- und Trägheitstermen spielt das umgebende Gas eine Rolle. Ein zutreffenderer Name wäre wind-assisted regime. Störungen werden durch die Präsenz des Gases, vor allem die Normalspannungsterme an der Oberfläche, stärker angefacht. Die Tropfendurchmesser variieren stärker, sind aber noch immer von ungefähr gleicher Größe wie der Strahldurchmesser. Der Strahl hat eine Länge von vielen Düsendurchmessern, der Strömungszustand in der Düse spielt eine Rolle.

Second wind-induced regime: Der Strahl zerfällt durch das Wachstum kurzweiliger Oberflächenwellen. Oberflächenspannung wirkt hemmend auf den Strahlzerfall. Die Länge ist unabhängig vom Düsendurchmesser, We_G ist kein kontrollierende Parameter mehr, stattdessen die Gruppe $(\rho_L/\rho_G)(\sigma/\mu U)^2$. Der Durchmesser der Tropfen ist wesentlich kleiner als der Strahldurchmesser. Der Strahlzerfall beginnt in einiger Entfernung von der Düse, an der Oberfläche des Strahls. Der Strahl ist im Inneren länger als an der Oberfläche.

Atomization regime: Der Strahlzerfall beginnt an der Düse. Die Form des Strahls ähnelt einem Kegel, dessen Spitze in der Düse liegt. Die Oberfläche ist schon

beim Austritt aus der Düse gestört, durch Ereignisse stromauf der Düsenöffnung. Die Störungen werden rapide angefacht. Die Strömung stromauf der Düse hat großen Einfluss auf den Strahlzerfall.

(Beschreibung nach REITZ und BRACCO, in CHEREMISINOFF, Encyclopedia of Fluid Mechanics, 1986.)

4 Zweiphasenströmungen

Phase: Homogener Teilbereich eines heterogenen Systems. Gasförmig, flüssig oder fest.

Zweiphasenströmungen: Ein Gemisch von zwei Phasen strömt. Gasförmig-fest, gasförmig-flüssig oder flüssig-flüssig.

analog: Zweikomponentenströmungen. Flüssig-flüssig, Strömung zweier nicht mischbarer Flüssigkeiten.

Streng genommen versteht man unter einer Phase jenen Bereich eines Systems, in dem die physikalischen Eigenschaften überall gleich sind. Ein Satz von nötigen Zustandsgrößen beschreibt den Zustand einer Phase in allen Punkten. Eine Phase ist deshalb nötigerweise im thermodynamischen Gleichgewicht. Eine Strömung ist nicht im thermodynamischen Gleichgewicht, da sie nicht im mechanischen Gleichgewicht ist. Praktisch verwendet man eine nicht gar so strenge Definition und bezeichnet als Phase die homogenen Bereiche eines Systems, falls das System in den thermodynamischen Gleichgewichtszustand gebracht wird. Beispiele von Zweiphasenströmungen: Lawinen, Geschiebe eines Flusses, Nebel und Wolken, auch die Strömung von Blut. In technischen Anwendungen: Transport von Feststoffen durch Rohre („pneumatic transport“), Wirbelschichtverfahren, Kondensations- und Verdampfungsvorgänge, Kraftstoffeinspritzung in Brennkammern.

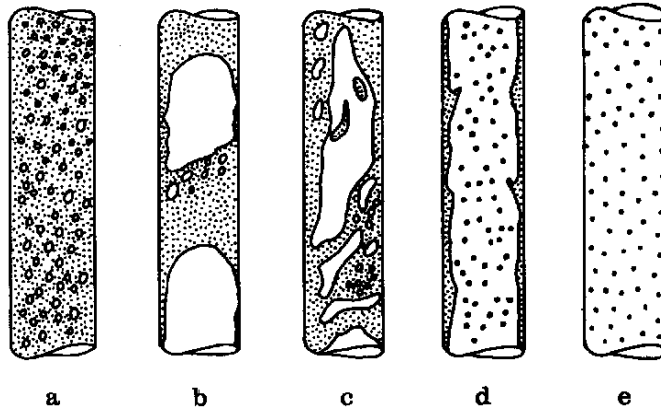
4.1 Strömungsformen

Am Beginn jeder Untersuchung einer Zweiphasenströmung

Morphologische Beschreibung der Strömung

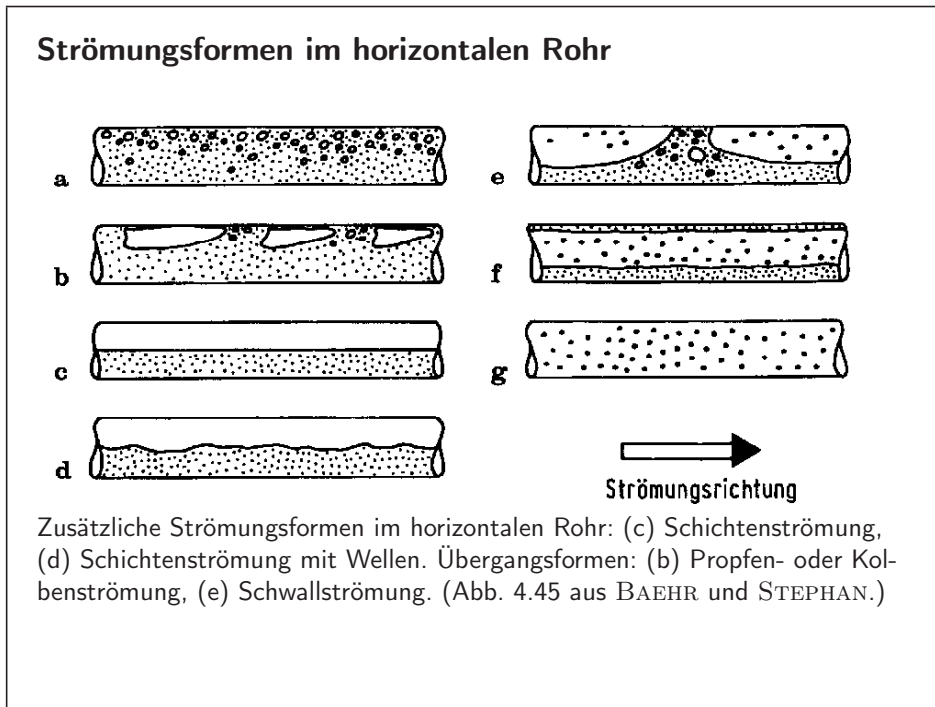
(Anordnung, Verteilung und räumliche Gestalt beider Phasen)

Strömungsformen im vertikalen Rohr



(a) Blasen-, (b) Propfen-, (c) Schaum-, (d) Ring- oder Film- und (e) Tropfenströmung. (Nach Abb. 4.44 aus BAEHR und STEPHAN.)

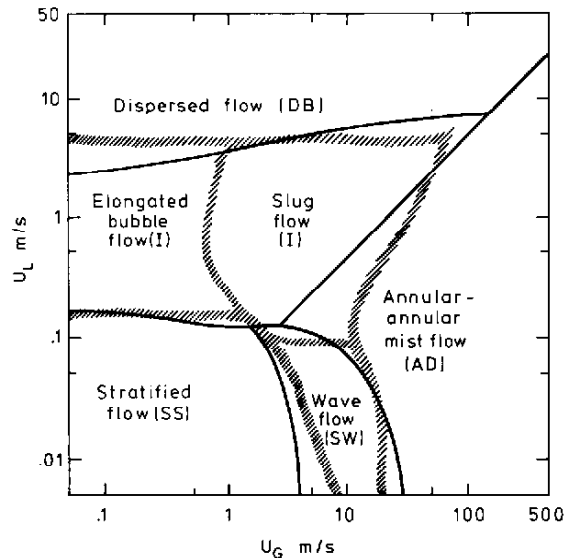
Im vertikalen Rohr: Die beiden Phasen müssen nicht in die gleiche Richtung strömen. *Gleichstrom* oder *Gegenstrom* möglich.



Die Strömungsformen sind von vielen Parametern abhängig, D , x , \vec{v}_1 , \vec{v}_2 , μ_1 , μ_2 , ρ_1 , ρ_2 , sowie ev. σ und g . Die Bedingungen, unter denen verschiedene Strömungsformen auftreten, wären deshalb nur in mehrdimensionalen Diagrammen beschreibbar.

Abgesehen von der Darstellbarkeit solcher Diagramme, wären dafür eine Unzahl an Daten nötig. Vorhandene Diagramme gelten deshalb nur für einen gewissen Bereich und sind oft nur beschränkt anwendbar. Teilweise werden diese Diagramme nicht einmal in dimensionsloser Form dargestellt. Ein Beispiel ist nebenstehende Abbildung. Die Grenzen zwischen den verschiedenen Strömungsbereichen in der Luft-Wasser Strömung in einem horizontalen Rohr mit dem Durchmesser 2,5 cm sind

nach theoretischen Korrelationen (durchgezogene Linien) und experimentell ermittelten Korrelationen (schraffierte Bereiche) eingetragen. (Abb. 2.1.27 aus HETSRONI.)



4.2 Homogene Gleichgewichtsströmungen

Geschwindigkeits- und Temperaturunterschiede zwischen den Phasen verursachen Kräfte und Wärmeübergänge, die diese Unterschiede zu reduzieren versuchen.

Homogene Gleichgewichtsströmung:

Die Wechselwirkungen zwischen den Phasen sind so stark, dass beide Phasen

- a) gleiche Geschwindigkeit (*homogene* Zweiphasenströmung)
- b) gleiche Temperatur haben (*thermisches* Gleichgewicht).

Eine homogene Gleichgewichtsströmung kann wie eine Einphasenströmung behandelt werden, allerdings gelten für die Zustandsgrößen des Gemisches besondere Zustandsgleichungen.

Beispiele von Strömungen mit starker Wechselwirkung: Fein dispergierte Tröpfchen oder Blasen, Schaum.

Eine homogene Gleichgewichtsströmung ist die einfachste Möglichkeit, Zweiphasenströmungen zu beschreiben. Allerdings muss überprüft werden, ob die Voraussetzungen stimmen.

4.2.1 Zustandsgrößen des Gemisches

Phase 1: Dichte ρ_1 , Volumenanteil $1 - \alpha$, Massenanteil $1 - x$.

Phase 2: Dichte ρ_2 , Volumenanteil α , Massenanteil x .

$$\alpha = \frac{V_2}{V} \quad (4.1) \quad x = \frac{m_2}{m} \quad (4.2)$$

$$1 - \alpha = \frac{V_1}{V} \quad (4.3) \quad 1 - x = \frac{m_1}{m} \quad (4.4)$$

a) homogene Strömung: $v_1 = v_2 = v$ (4.5)

b) thermisches Gleichgewicht: $T_1 = T_2 = T$ (4.6)

zusätzlich: $p_1 = p_2 = p$ (4.7)

In diesem Skriptum wird mit Phase 1 meist die inkompressible Phase (Flüssigkeit), mit Phase 2 die kompressible Phase (Gas) bezeichnet. Wir beschäftigen uns hauptsächlich mit Gemischen die ungefähr zur Hälfte aus Gas, zur Hälfte aus Flüssigkeit bestehen, $\alpha \approx 0,5$. Wegen der wesentlich höheren Dichte der Flüssigkeit ist der Massenanteil des Gases entsprechend klein, $x = O(10^{-3})$. Achtung: Für die Geschwindigkeit wird dasselbe Zeichen, v , wie für das spezifische Volumen verwendet.

Zur Beschreibung von nicht-homogenen Zweiphasenströmungen, $v_1 \neq v_2$, ist auch der Massenstromanteil nötig,

$$\dot{x} = \frac{\dot{m}_2}{\dot{m}}$$

Insbesondere in Zusammenhang mit Nassdampf wird \dot{x} als „Qualität“ bezeichnet.

Hier wird angenommen, dass in beiden Phasen der selbe Druck herrscht. Das ist dann nicht der Fall, wenn kleine Tröpfchen oder Blasen in der zweiten Phase dispergiert sind. Aufgrund der Krümmung der Grenzfläche besteht dann zwischen den Phasen eine von der Teilchengröße abhängige Druckdifferenz.

Gemischgrößen

Auf Volumeneinheit bezogene Größen, z.B. ρ , ergeben sich additiv aus den Volumenanteilen der einzelnen Phasen:

$$\rho = (1 - \alpha)\rho_1 + \alpha\rho_2 \quad (4.8)$$

Spezifische, d.h. auf die Masseinheit bezogene Größen, werden additiv aus den Massenanteilen ermittelt. Hier für das spezifische Volumen v :

$$v = (1 - x)v_1 + xv_2 \quad (4.9)$$

Zusammenhang zwischen Massen- und Volumenanteil:

$$(1 - x)\rho = (1 - \alpha)\rho_1 \quad (4.10)$$

$$x\rho = \alpha\rho_2 \quad (4.11)$$

Herleitung der Gl. (4.8): Die Gleichung $m = m_1 + m_2$ wird zu $V\rho = V_1\rho_1 + V_2\rho_2$ erweitert und durch V dividiert,

$$\rho = \frac{V_1}{V}\rho_1 + \frac{V_2}{V}\rho_2.$$

Gl. (4.9): $V = V_1 + V_2$ wird zu $mv = m_1v_1 + m_2v_2$ erweitert und durch m dividiert.

Wie für das spezifische Volumen gilt für andere spezifische Größen:

$$u = (1 - x)u_1 + xu_2,$$

$$h = (1 - x)h_1 + xh_2,$$

$$c_p = (1 - x)c_{p,1} + xc_{p,2}.$$

Gl. (4.10) folgt aus $m_1 = (1 - x)m = (1 - x)\rho V$ sowie $m_1 = \rho_1 V_1 = \rho_1(1 - \alpha)V$ und Gleichsetzen der beiden letzten Terme.

Mit $m_2 = xm = x\rho V$ und $m_2 = \rho_2 V_2 = \rho_2 \alpha V$ erhält man Gl. (4.11).

Bestimmung von x

Ohne Phasenumwandlungen:

$$x = \text{const} \quad (4.12)$$

Mit Phasenumwandlungen, z.B. für Nassdampf. Lokales thermodynamisches Gleichgewicht vorausgesetzt ist x eine Funktion des thermodynamischen Zustands des Gemisches:

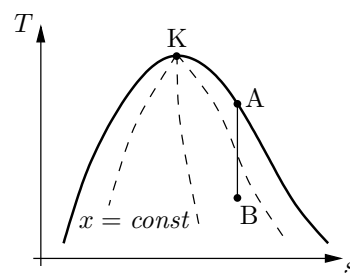
$$x = \bar{x}(p, \rho) \quad \text{oder} \quad x = \bar{x}(p, s) \quad (4.13)$$

Doppelt gestrichene Größe: Thermodynamisches Gleichgewicht.

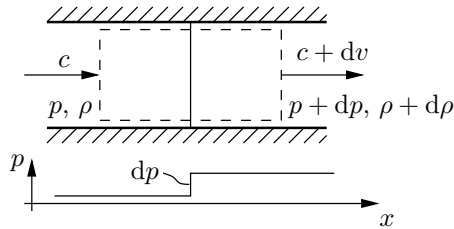
Ohne Phasenumwandlungen, zum Beispiel für eine Mischung von Luft und Wasser, gilt für jede der beiden Phasen die Massenerhaltung. In einer homogenen Strömung bleibt somit x konstant. Für den Volumenanteil gilt aber im Allgemeinen $\alpha \neq \text{const}$.

Der Zustand eines reinen Stoffes im thermodynamischen Gleichgewicht ist durch zwei Variable vollständig bestimmt. Dies ist zu berücksichtigen, da x eine der möglichen Variablen ist. Sind schon zwei andere Zustandsgrößen gegeben, ergibt sich x aus den Werten dieser Größen. Zur Bestimmung der fehlenden Zustandsgrößen werden Dampftafeln verwendet.

Zum Beispiel bleibt bei der isentropen Expansion von Nassdampf durch eine Turbine die spezifische Entropie s konstant. Bei gegebenem Anfangszustand (p_A, x_A) mit $s_A = \bar{s}(p_A, x_A)$ und gegebenem Enddruck p_B ist $x_B = \bar{x}(p_B, s_B) = \bar{x}(p_B, s_A)$.



4.2.2 Schallgeschwindigkeit



Kontinuitäts-Gl.:

$$\rho c = (\rho + d\rho)(c + dv)$$

$$\rho c = \rho c + c d\rho + \rho dv + O(d^2)$$

$$\Rightarrow c d\rho = -\rho dv$$

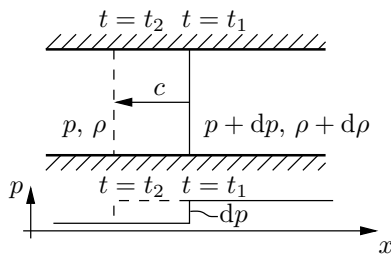
Impulssatz: $\underbrace{(\rho + d\rho)(c + dv)^2}_{\text{ausströmender Impuls}} - \underbrace{\rho c^2}_{\text{einstr. Impuls}} = \underbrace{p - (p + dp)}_{\text{res. Kraft}}$

$$\rho c^2 + c^2 d\rho + \underbrace{2\rho c dv}_{-2c^2 d\rho, \text{Konti.}} + O(d^2) - \rho c^2 = -dp \quad \Rightarrow \quad -c^2 d\rho = -dp$$

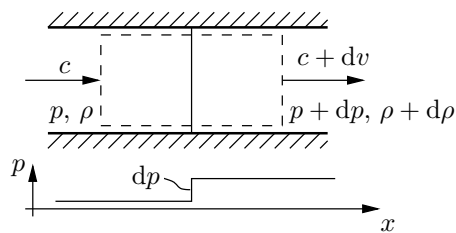
Für die Schallgeschwindigkeit folgt

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} \quad (4.14)$$

Die Schallgeschwindigkeit ist jene Geschwindigkeit, mit der sich eine infinitesimal kleine Druckänderung in ein ruhendes Medium ausbreitet. Praktisch werden diese infinitesimal kleinen Druckänderungen ein sich kontinuierlich änderndes Drucksignal, eine Schallwelle, beschreiben. Die in einem ruhenden Medium fortlaufende Druckänderung ist äquivalent zur stehenden Druckänderung, die von dem sich mit Schallgeschwindigkeit bewegenden Medium angeströmt wird. Die stehende Schallwelle lässt sich leichter beschreiben, da es sich um eine stationäre Strömung handelt.



laufende Schallwelle



stehende Schallwelle

Schallgeschwindigkeit in Medium mit Phasenumwandlungen

Im lokalen thermodynamischen Gleichgewicht, ohne Reibung oder andere irreversible Terme:

$$c^2 = \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \rho} \right)_s = \bar{c}^2 \quad (4.15)$$

$p = \bar{p}(\rho, s)$... Zustandsgleichung im thermodyn. Gleichgewicht

Ohne Phasenumwandlungen, $x = const$

Aus $p_1 = p_2 = p$ und $1/\rho = (1-x)/\rho_1 + x/\rho_2$ folgt

$$\frac{1}{\rho c_x^2} = \frac{1-x}{\rho_1 c_1^2} + \frac{x}{\rho_2 c_2^2} \quad (4.16)$$

Aus der Gleichung zur Bestimmung der Schallgeschwindigkeit, Gl. (4.14), geht nicht hervor, unter welcher Zustandsänderung die Dichte nach dem Volumen differenziert werden soll. Gleichung (4.15) gilt, falls angenommen werden kann, dass die Änderungen einerseits langsam genug sind, dass sich das Zweiphasen-Gemisch im lokalen thermodynamischen Gleichgewicht befinde, andererseits rasch genug, dass kein nennenswerter Wärmetransport zwischen komprimierten und expandierten Bereichen der Schallwelle bestehe.

Zur Art der Zustandsänderung in der Strömung ohne Phasenumwandlungen siehe auch weiter hinten, S. 122.

Um Gl. (4.16) zu erreichen wurden nur die Bedingung $x = const$ verwendet, aber keine Annahme über die Art der Zustandsänderung gemacht: Differentiation

von $\frac{1}{\rho} = \frac{1-x}{\rho_1} + \frac{x}{\rho_2}$ nach p , $\frac{d}{dp} \left(\frac{1}{\rho} \right) = -\frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{dp} = -\frac{1}{\rho^2 c_x^2}$, ergibt

$$-\frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{dp} = -\frac{1-x}{\rho_1^2} \frac{d\rho_1}{dp} - \frac{x}{\rho_2^2} \frac{d\rho_2}{dp}, \quad \frac{1}{\rho^2 c_x^2} = \frac{1-x}{\rho_1^2 c_1^2} + \frac{x}{\rho_2^2 c_2^2}.$$

Mit $(1-x)/\rho_1 = (1-\alpha)/\rho$ und $x/\rho_2 = \alpha/\rho$ nach Gl. (4.10) und (4.11) folgt Gl. (4.16).

Schallgeschwindigkeit für Flüssigkeits-Gas Gemisch

Näherung von Gl. (4.8) für $\alpha\rho_2 \ll (1 - \alpha)\rho_1$

$$\rho \approx (1 - \alpha)\rho_1 \quad (4.17)$$

Mit Gl. (4.17) und für $(1 - \alpha)/(\rho_1 c_1^2) \ll \alpha/(\rho_2 c_2^2)$ wird Gl. (4.16)

$$c_x^2 \approx \underbrace{\frac{\rho_2}{\rho_1}}_{\ll 1} \underbrace{\frac{c_2^2}{\alpha(1 - \alpha)}}_{O(c_2^2)} \quad (4.18)$$

Schallgeschwindigkeit im Gemisch klein gegen c_2 , $c_x^2 \ll c_2^2$!

Voraussetzungen erfüllt für $\rho_1 \gg \rho_2$, $O(c_1^2) = O(c_2^2)$ sowie weder $\alpha \rightarrow 0$ noch $\alpha \rightarrow 1$.

Die Dichte von Flüssigkeiten ist typischerweise ca. das Tausendfache der Dichte von Gasen. Vergleiche z.B. die Werte von Wasser, $\rho_1 = 1000 \text{ kg/m}^3$, und Luft bei Normalbedingungen, $\rho_2 = 1,2 \text{ kg/m}^3$. Solange nicht $1 - \alpha \ll 1$ ist, gilt $\alpha\rho_2 \ll (1 - \alpha)\rho_1$ und die Dichte des Gemisches kann mit Gl. (4.17) genähert werden.

Ähnlich gilt die zweite Ungleichung, die zu Gl. (4.18) führt, für realistische Werte von α , ρ_1 , ρ_2 , c_1 und c_2 .

Man kann sagen, die Schallgeschwindigkeit ist niedrig, weil das Gemisch die Kompressibilität der leichten, aber die Masse der schwereren Phase besitzt. Homogene Strömung vorausgesetzt! Gut erfüllt bei Blasen, problematisch bei Tropfen, die träge sind und der Geschwindigkeit nicht gut folgen \Rightarrow in Nebel ergibt sich eine Schallgeschwindigkeit wie in Gas mit Dämpfung.

Art der Zustandsänderung

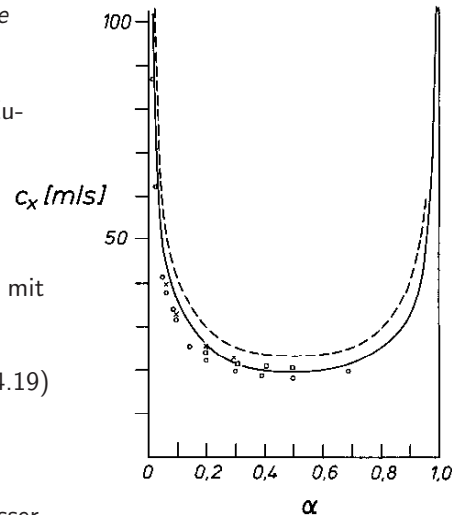
Schallgeschwindigkeit in Gas: *Isentrope*
Zustandsänderung

Flüssigkeits-Gas Gemisch: *Isotherme* Zu-
standsänderung

$$c_2^2 = c_{2T}^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T$$

Für ideales Gas ist $c_{2T}^2 = RT = p/\rho_2$, mit
Gl. (4.18) folgt

$$c_{xT}^2 = \frac{p}{\rho_1 \alpha (1 - \alpha)} \quad (4.19)$$



Schallgeschw. in einem Luftblasen-Wasser

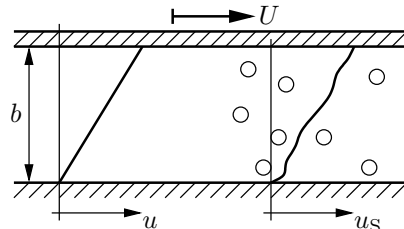
Gemisch für isotherme (—), isentrope ZÄ (---), gemessen bei 1 kHz (×),
0,5 kHz (□) und extrapoliert auf 0 Hz (○). (Abb. 6.23 aus PRANDTL et al.)

In Luft ist die Schallgeschwindigkeit ca. 300 m/s, bei einer Frequenz von 1000 Hz ist die Wellenlänge $300/1000 = 0,3$ m. Zwischen den komprimierten und expandierten Bereichen in der Schallwelle, also über einen Weg von ca. 30 cm, ist innerhalb einer Tausendstel Sekunde kaum ein Wärmetransport möglich. In diesem Fall ist deshalb die Annahme einer isentropen Zustandsänderung gerechtfertigt.

In einem Flüssigkeits-Gas Gemisch ist die Situation anders. Die Temperatur der flüssigen Phase bleibt wegen ihrer großen Dichte nahezu konstant. Falls die beiden Phasen gut durchmischt sind, bleibt auch die Temperatur der kompressiblen Phase nahezu konstant. Zum Beispiel muss bei Blasen in einer Flüssigkeit Wärme nur über eine Distanz entsprechend dem typischen Radius der Blasen transportiert werden. Außerdem ist in einem Flüssigkeits-Gas Gemisch die Schallgeschwindigkeit und damit die Wellenlänge wesentlich kleiner als im Gas. Wärmetransport zwischen den Phasen und zwischen den komprimierten und expandierten Bereichen der Schallwelle ist gut möglich. Es kann eine isothermen Zustandsänderung angenommen werden.

Bei hohen Frequenzen bleibt allerdings keine Zeit für Wärmetransport, dann ist die Annahme einer isentropen Zustandsänderung realistischer.

4.2.3 Viskosität von Suspensionen



Newtonsches Fluid: Lineares Geschwindigkeitsprofil, $\dot{\gamma} = U/b$,

$$\tau_w = \mu \dot{\gamma}, \quad D = \mu \dot{\gamma}^2 \quad (4.20)$$

D ... Dissipation

Newtonsches Fluid Suspension

Suspension: Störung des linearen Geschwindigkeitsprofils durch feste Teilchen oder Blasen

$$\tau_{w,S} = \mu \frac{1}{A} \int \dot{\gamma}_S dA, \quad D_S = \mu \frac{1}{V} \int \dot{\gamma}_S^2 dV$$

Definition der scheinbaren Viskosität μ_s

$$\tau_{w,S} = \mu_s \dot{\gamma}, \quad D_S = \mu_s \dot{\gamma}^2 \quad (4.21)$$

Die makroskopisch beobachtbare Schubspannung ist ein Mittelwert der lokalen Schubspannungen an der Wand, die beobachtete Dissipation ist ähnlich der Mittelwert der lokalen Dissipation im gesamten Volumen.

Das Verhältnis zwischen $\frac{1}{A} \int \dot{\gamma}_S dA$ und $\dot{\gamma}$ bzw. zwischen $\frac{1}{V} \int \dot{\gamma}_S^2 dV$ und $\dot{\gamma}^2$ wird in die scheinbare Stoffeigenschaft μ_s gezogen. Mittels Gl. (4.21) wird μ_s genau durch jenes Verhältnis, multipliziert mit der Viskosität des reinen Fluides μ , definiert,

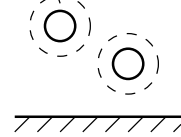
$$\mu_s = \mu \frac{\int \dot{\gamma}_S dA}{\dot{\gamma} A}, \quad \text{bzw.} \quad \mu_s = \mu \frac{\int \dot{\gamma}_S^2 dV}{\dot{\gamma}^2 V}.$$

Da die Schlepplleistung an der Platte gleich der Dissipation im Fluid sein muss, liefert die Definition von μ_s durch τ_w oder D identische Werte.

Abschätzung der scheinbaren Viskosität

$$D_S - D = \mu_s \dot{\gamma}^2 - \mu \dot{\gamma}^2 = \mu \frac{1}{V} \int \dot{\gamma}_S^2 - \dot{\gamma}^2 dV$$

Bereich $\dot{\gamma}_S \neq \dot{\gamma}$ Das Volumen, in dem die Strömung gestört ist, skaliert mit dem Volumen der Teilchen, $V_{\dot{\gamma}_S \neq \dot{\gamma}} \sim V_S$.



Die Störung skaliert mit $\dot{\gamma}$, $\dot{\gamma}_S^2 - \dot{\gamma}^2 \sim \dot{\gamma}^2$.

Damit folgt: $\frac{1}{V} \int \dot{\gamma}_S^2 - \dot{\gamma}^2 dV \sim \frac{1}{V} V_S \dot{\gamma}^2 = \alpha \dot{\gamma}^2$

$$(\mu_s - \mu) \dot{\gamma}^2 \sim \mu \alpha \dot{\gamma}^2 \quad \Rightarrow \quad \mu_s = (1 + C\alpha) \mu$$

Rechnung (EINSTEIN, Ann. Phys. 19, 1906; 34, 1911; BATCHELOR, S. 253):

$$\mu_s = (1 + \frac{5}{2}\alpha) \mu \quad \text{für feste Kugeln} \quad (4.22)$$

$$\mu_s = (1 + \alpha) \mu \quad \text{für Blasen} \quad (4.23)$$

Um den Wert von μ_s zu berechnen, muss das Volumenintegral über die gestörte Schergeschwindigkeit ausgewertet werden.

Obige Abschätzung verlangt, dass sich die Einflussbereiche der Teilchen nicht überlappen. Schätzen wir den Einflussbereich mittels des Strömungsfeldes in schleichender Strömung um eine feste Kugel, siehe Abschnitt 3.4.1. In schleichender Strömung ist in einem Abstand von 10 Kugelradien noch eine Geschwindigkeitsstörung von ca. 10% vorhanden. Erlauben wir also alle 5 Kugeldurchmesser ein Teilchen, so darf der Volumenanteil der Teilchen $(1/5)^3 = 0,008$ nicht übersteigen. Ein wenig näher dürfen sich die Teilchen offenbar kommen: Gleichung (4.22) ist bis $\alpha \approx 0,02$ gültig (BATCHELOR, S. 253).

Auch Blasen bewirken eine Erhöhung der scheinbaren Zähigkeit, obwohl die Schubspannung im Gas verschwindend klein ist. Die Erklärung ist, dass das lineare Geschwindigkeitsprofil die Dissipation minimiert. Jede Abweichung vom linearen Geschwindigkeitsprofil erhöht die Dissipation.

Mittels Variationsrechnung wird ein Extremum der Dissipation gesucht,

$$F(y, u, u') = \mu \int_0^b (du/dy)^2 dy \stackrel{!}{=} \text{Extremum.}$$

Eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Extremums ist die Eulersche Differentialgleichung,

$$F_u - F_{u'u} u'' - F_{u'u'} u' - F_{u'y} = 0.$$

Indizes an F bedeuten eine Differentiation nach der entsprechenden Größe. Mit $F_u = 0$, $F_{u'u'} = 2$, $F_{u'u} = 0$ und $F_{u'y} = 0$ folgt

$$u'' = 0.$$

Das Geschwindigkeitsprofil ist linear.

4.3 Eindimensionale, homogene Strömungen ohne Phasenumwandlungen

(a) Flüssigkeits-Gas Gemische, (b) ohne Energiezufuhr

a) Phase 1: Flüssigkeit, $\rho = \text{const}$

Phase 2: Gas, $c_p = \text{const}$

b) Energiegleichung, ohne Schwerkräfteinfluss:

$$\frac{v^2}{2} + h = \text{const}$$

Falls $v^2 \ll c_{T,2}^2$ ist $T \approx \text{const}$,

$$T_1 = T_2 = T = \text{const} \quad (4.24)$$

Energiegleichung degeneriert zu $T = \text{const}$.

Der Schwerkräfteinfluss ist vernachlässigbar, falls $g\Delta z \ll c_p T$. Diese Bedingung ist praktisch immer erfüllt.

Für $c_p = \text{const}$ lautet die Energiegleichung

$$\frac{v^2}{2} + c_p T = \text{const}.$$

Die spezifischen Wärmekapazitäten von Materie sind von derselben Größenordnung, c_p kann mit $c_{p,2}$ abgeschätzt werden. Beispiel: Wasser, $c_p = 4,2 \text{ kJ/kgK}$, Luft: $c_p = 1 \text{ kJ/kgK}$. Die Wärmekapazität eines Gases kann wiederum durch die spezifische Gaskonstante geschätzt werden, $c_p \sim R$, also $c_p T \sim c_{p,2} T \sim R_2 T$. Weiters ist $R_2 T$ gleich der isothermen Schallgeschwindigkeit in der Gasphase, $R_2 T = c_{T,2}^2$, wir erhalten also die Abschätzung

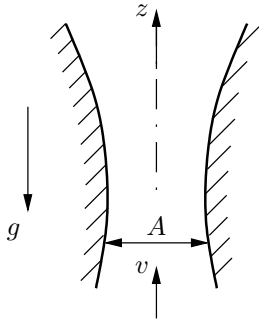
$$c_p T \sim c_{T,2}^2.$$

Der Enthalpieterm in der Energiegleichung ist demnach groß gegen den Term der kinetischen Energie, solange $v^2 \ll c_{T,2}^2$ ist. Unter dieser Bedingung ändert sich die Temperatur kaum.

Beachte, dass die Geschwindigkeit des *Gemisches* klein gegen die Schallgeschwindigkeit der *Gasphase* sein muss. Diese Bedingung kann wegen $c_{xT}^2 \ll c_{T,2}^2$, siehe Gl. (4.18), auch für $v > c_{xT}$, d.h. $M > 1$, erfüllt sein.

4.3.1 Grundgleichungen

Eindimensionale, homogene, stationäre Strömung:



Kontinuitätsgleichung:

$$\rho v A = \dot{m} = \text{const} \quad (4.25)$$

Bewegungsgleichung:

$$\rho v \frac{dv}{dz} = -\frac{dp}{dz} - \rho g - F_W^{(V)} \quad (4.26)$$

$F_W^{(V)}$... Widerstandskraft/Vol.-einheit

Definition des Rohrreibungsbeiwertes λ_R : $\Delta p = -\lambda_R \frac{\Delta z}{d} \frac{\rho v^2}{2}$

Die Bewegungsgleichung wird, mit $F_W^{(V)} = -\frac{\Delta p}{\Delta z} = -\frac{\lambda_R}{d} \frac{\rho v^2}{2}$,

$$v \frac{dv}{dz} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} - g - \frac{\lambda_R}{d} \frac{v^2}{2} \quad (4.27)$$

Thermische Zustandsgleichung des Gemisches

Phase 2: Ideales Gas, $T = \text{const} \Rightarrow p/\rho_2 = \text{const}$

Gl. (4.10) und (4.11) ergeben $\rho_2 = \frac{x}{1-x} \frac{1-\alpha}{\alpha} \rho_1$,

$$\frac{p}{\rho_2} = \frac{p \alpha}{1-\alpha} \underbrace{\frac{1-x}{x \rho_1}}_{\text{const}} = \text{const}$$

Somit gilt:

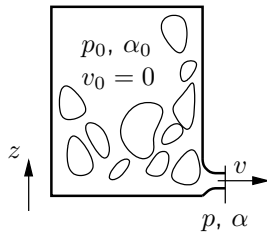
$$\frac{p \alpha}{1-\alpha} = \frac{p_r \alpha_r}{1-\alpha_r} = \text{const} \quad (4.28)$$

In der Näherung $\rho = (1-\alpha)\rho_1$, Gl. (4.17), wird α mittels Gl. (4.28) eliminiert,

$$\rho = \rho_1 \left(1 + \frac{\alpha_r}{1-\alpha_r} \frac{p_r}{p} \right)^{-1} \quad (4.29)$$

Isotherme des Gemisches

4.3.2 Reibungsfreie Düsenströmung



Vernachlässigung des Widerstands in Gl. (4.26),
somit Bewegungsgleichung:

$$v \frac{dv}{dz} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} - g$$

Referenzzustand: Ruhezustand 0, $v_0 = 0$.

Einsetzen der Isotherme, Gl. (4.29), Separation ($\times dz$),

$$v dv + g dz = -\frac{1}{\rho_1} \left(1 + \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_0} \frac{p_0}{p} \right) dp$$

Integration $\int_{v_0}^v dv$, $\int_{p_0}^p dp$, $\int_{z_0}^z dz$,

$$\rho_1 \frac{v^2}{2} + p + \rho_1 g(z - z_0) = p_0 \left[1 + \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_0} \ln \left(\frac{p_0}{p} \right) \right] \quad (4.30)$$

verallgemeinerte Bernoulligleichung für reibungsfreie 2ph-Strömung

Die verallgemeinerte Bernoulligleichung gilt für die homogene, isotherme, reibungsfreie Zweiphasenströmung. Auf der linken Seite der Gl. (4.30) stehen die Terme der klassischen Bernoulligleichung für inkompressible, reibungsfreie Strömung. Der Term mit dem Logarithmus auf der rechten Seite trägt der Kompressibilität des Mediums Rechnung.

Die Schwerkraft ist vernachlässigbar, falls $g\Delta z \ll v^2/2$. Für ein Wasser-Luft Gemisch mit $\alpha = 0,5$ und $v = c_{xT}$, $c_{xT} \approx 20$ m/s, bedeutet dies

$$\Delta z \ll \frac{20^2}{20} = 20 \text{ m.}$$

Aus der Kontinuitäts- und der Bewegungsgleichung ohne Schwerkraft folgt auch das aus der Gasdynamik bekannte Verhalten kompressibler Strömungen in konvergenten und divergenten Kanälen:

$$v \frac{dv}{dz} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho} \frac{d\rho}{dz} = -\frac{1}{\rho} c_{xT}^2 \frac{d\rho}{dz},$$

$$\rho v A = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} + \frac{1}{v} \frac{dv}{dz} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dz} = 0.$$

Somit gilt weiter

$$-\frac{1}{\rho} c_{xT}^2 \frac{d\rho}{dz} = c_{xT}^2 \frac{1}{v} \frac{dv}{dz} + c_{xT}^2 \frac{1}{A} \frac{dA}{dz}$$

und schließlich

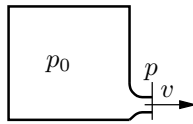
$$(1 - M^2) \frac{1}{v} \frac{dv}{dz} = -\frac{1}{A} \frac{dA}{dz}.$$

Wegen des Terms $(1 - M^2)$ liest man ab:

$M < 1$: v steigt, falls die Querschnittsfläche A kleiner wird,

$M > 1$: v steigt, falls A größer wird.

Insbesondere: Um $M > 1$ zu erreichen, ist eine Lavaldüse nötig.

Kritisches Druckverhältnis p^*/p_0 

Düsenströmung bei gegebenem Ruhedruck p_0 ,
Außendruck p sinkt.

$p > p^*$: $M < 1$, v steigt mit sinkendem p

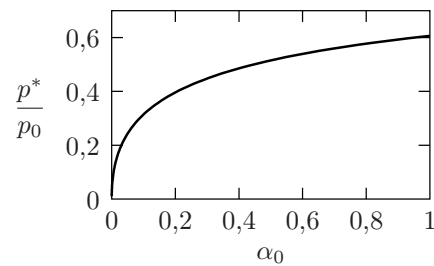
$p = p^*$: $M = 1$, max. Geschwindigkeit $v = c_{xT}^*$ erreicht

$p < p^*$: $M = 1$, $v = c_{xT}^*$, Nachexpansion hinter der Düse

Für $p < p^*$ ist der Massenstrom unabhängig von p , „choking“. Keine Beeinflussung der Strömung von stromab.

$$\frac{1 - \alpha_0}{\alpha_0} \left(1 - \frac{p^*}{p_0} \right) - \ln \left(\frac{p^*}{p_0} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1 - \alpha_0}{\alpha_0} \frac{p^*}{p_0} \right)^2 \quad (4.31)$$

kritisches Druckverhältnis



Berechnung von p^*/p_0 :

Einsetzen in die verallgemeinerte Bernoulligleichung, Gl. (4.30), mit $p = p^*$,
 $v = c_{xT}^*$, Vernachlässigung von g ergibt

Krit. Druckverhältnis, Gl. (4.31)

$$\rho_1 \frac{c_{xT}^{*2}}{2} + p^* = p_0 \left[1 + \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_0} \ln \left(\frac{p_0}{p} \right) \right].$$

Aus $\frac{p^* \alpha^*}{1 - \alpha^*} = \frac{p_0 \alpha_0}{1 - \alpha_0}$, Gl. (4.28), folgt $\frac{p^*}{1 - \alpha^*} = \frac{p_0 \alpha_0}{\alpha^*(1 - \alpha_0)}$ sowie $\frac{1}{\alpha^*} = 1 + \frac{p^*}{p_0} \frac{1 - \alpha_0}{\alpha_0}$,
somit kann c_{xT}^{*2} durch

$$c_{xT}^{*2} = \frac{p^*}{\alpha^*(1 - \alpha^*)\rho_1} = \frac{p_0 \alpha_0}{\alpha^{*2}(1 - \alpha_0)\rho_1} = \frac{p_0 \alpha_0}{\rho_1(1 - \alpha_0)} \left(1 + \frac{1 - \alpha_0}{\alpha_0} \frac{p^*}{p_0} \right)^2$$

ausgedrückt werden. Dies oben einsetzen und umformen ergibt Gl. (4.31).

Maximale (kritische) Massenstromdichte $\rho^* v^*$

$$\rho^* v^* = \rho^* c_{xT}^*$$

Mit $c_{xT}^2 = \frac{p}{\alpha(1-\alpha)\rho_1} = \frac{p}{\alpha\rho}$ und $\frac{p\alpha}{1-\alpha} = \frac{p_0\alpha_0}{1-\alpha_0}$, $\frac{1}{\alpha} = \frac{1-\alpha_0}{p_0\alpha_0} \frac{p}{1-\alpha}$ folgt

$$c_{xT}^2 = \frac{1-\alpha_0}{p_0\alpha_0} \frac{p^2}{(1-\alpha)\rho}, \times \frac{\rho_1}{\rho_1} \Rightarrow c_{xT}^2 = \frac{(1-\alpha_0)\rho_1}{p_0\alpha_0} \frac{p^2}{\rho^2}, c_{xT} \propto \frac{p}{\rho}$$

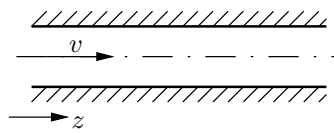
Somit:

$$\rho^* v^* = \rho_0 c_{xT,0} \frac{\rho^* c_{xT}^*}{\rho_0 c_{xT,0}} = \rho_0 c_{xT,0} \frac{\rho^* p^* \rho_0}{\rho_0 p_0 \rho^*} = \rho_0 c_{xT,0} \frac{p^*}{p_0}$$

$$\rho^* v^* = \rho_0 c_{xT,0} \frac{p^*}{p_0} \quad (4.32)$$

Beim Ausströmen aus einem Kessel ist die maximal erreichbare Massenstromdichte von Interesse. Man denke z.B. an die Frage, welche Querschnittsfläche ein Sicherheitsventil mindestens haben muss, um einen gewissen Massenstrom abführen zu können. Falls der Außendruck den kritischen Druck unterschreitet, wird in der Ausströmöffnung Schallgeschwindigkeit erreicht. Wegen des Werts von $p^*/p_0 \approx 0,5$, siehe den Graphen von p^*/p_0 über α_0 auf der vorigen Seite, ist anzunehmen, dass in vielen technischen Anwendungen das kritische Druckverhältnis erreicht wird. Der austretende Massenstrom bleibt dann konstant, gleich dem kritischen Massenstrom, und ist unabhängig vom Außendruck. Eine größere Massenstromdichte kann, auch mit einer Lavaldüse, nicht erreicht werden. Wie Gl. (4.32) zeigt, ist der kritische Massenstrom gleich dem Produkt von Ruhedichten mal dem kritischen Druckverhältnis.

4.3.3 Rohrströmung mit Reibung



horizontales Rohr (ohne Schwerkraft),
konstanter Querschnitt,
homogene, isotherme Strömung

Bewegungsgleichung, siehe Gl. (4.27):

$$v \frac{dv}{dz} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} - \frac{\lambda_R}{d} \frac{v^2}{2} \quad (4.33)$$

Kontinuitätsgleichung:

$$\rho v = \text{const} \quad (4.34)$$

Kritische Rohrlänge

Mit Conti.-Gl. $\rho v = \text{const} \Rightarrow \frac{1}{\rho} d\rho = -\frac{1}{v} dv$, somit

$$v \frac{dv}{dz} = -\frac{v^2}{\rho} \frac{d\rho}{dz} = -\frac{v^2}{\rho} \frac{d\rho}{dp} \frac{dp}{dz} = -\frac{1}{\rho} \frac{v^2}{c_{xT}^2} \frac{dp}{dz}$$

in Bewegungsgl. (4.33):

$$(1 - M^2) \frac{dp}{dz} = \underbrace{-\frac{\lambda_R}{d} \frac{\rho v^2}{2}}_{<0} \quad (4.35)$$

$M < 1$: $dp/dz < 0$, p sinkt $\Rightarrow \rho$ sinkt $\Rightarrow v$ steigt bis $M = 1$

$M > 1$: $dp/dz > 0$, p steigt (!) $\Rightarrow \rho$ steigt $\Rightarrow v$ sinkt bis $M = 1$

Blockieren („choking“) begrenzt zulässige Rohrlänge!

Kritische (maximale) Rohrlänge für stationäre Strömung bei gegebenem Eintrittszustand.

Bei gegebenem Druck und Massenstrom an einer Stelle eines Rohres sinkt der Druck für $M < 1$ mit zunehmender Rohrlänge. Bei $M = 1$ blockiert die Strömung wegen $dp/dz \rightarrow -\infty$. Bei $M > 1$ blockiert die Strömung wegen $dp/dz \rightarrow \infty$.

Einen ähnlichen Effekt gibt es bei der Strömung mit Wärmezufuhr: Thermisches Blockieren bei kritischer Wärmezufuhr.

Die kritische Rohrlänge begrenzt die Länge eines Rohres bei *gegebenem* Massenstrom. Für eine an ein Rohr angelegte Druckdifferenz ergibt sich immer ein, womöglich sehr kleiner, Massenstrom.

Identitäten für die Rohrströmung

Aus der Kontinuitätsgleichung bei konstantem Querschnitt, Gl. (4.34), folgt mit Gl. (4.28) und (4.19),

$$Mp = \text{const} \quad (4.36)$$

$$K = \frac{\alpha}{(1-\alpha)M} = \text{const} \quad (4.37)$$

K kann durch die Massenstromdichte, \dot{m}/A , ausgedrückt werden:

$$K = \frac{A}{\dot{m}} \sqrt{\frac{\rho_1 p \alpha}{1-\alpha}} = \frac{A}{\dot{m}} \rho_1 \alpha c_{xT} \quad (4.38)$$

Die Kontinuitätsgleichung (4.34), $\rho v = \text{const} = \dot{m}/A$, wird durch $\rho v = (1-\alpha)\rho_1 M c_{xT}$ erweitert. Mit Gl. (4.19), $c_{xT} = p/(\rho_1 \alpha (1-\alpha))$, folgt

$$(1-\alpha)\rho_1 M \sqrt{\frac{p}{\rho_1 \alpha (1-\alpha)}} = \frac{\dot{m}}{A}$$

Konstante Werte werden auf die rechte Seite gebracht,

$$M \sqrt{\frac{p(1-\alpha)}{\alpha}} = \frac{\dot{m}}{A\sqrt{\rho_1}}$$

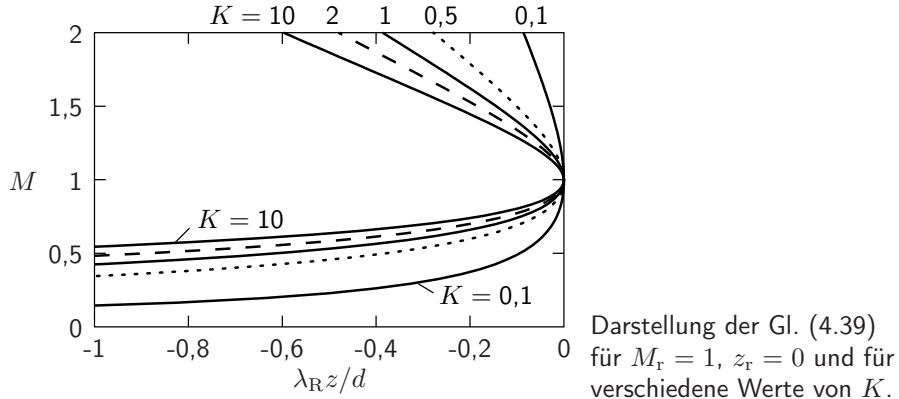
Multiplikation mit $\sqrt{p\alpha/(1-\alpha)} = \text{const}$, Gl. (4.28), liefert

$$Mp = \frac{\dot{m}}{A\sqrt{\rho_1}} \sqrt{\frac{p\alpha}{1-\alpha}} = \text{const}.$$

Division durch $\sqrt{p\alpha/(1-\alpha)}$ ergibt die Relationen (4.37) bzw. (4.38).

Gleichung für Rohrströmung, $\lambda_R = const$

$$\begin{aligned}
 & K \left(\frac{1}{M_r} - \frac{1}{M} \right) + K^2 \ln \left(\frac{M_r}{M} \right) + (1 - K^2) \ln \left(\frac{1 + KM_r}{1 + KM} \right) \\
 &= \frac{\lambda_R}{2d} (z - z_r), \quad K = \frac{\alpha}{(1 - \alpha)M} = const
 \end{aligned} \tag{4.39}$$



In der Bewegungsgleichung (4.35) wird v durch $M c_{xT}$ substituiert,

$$(1 - M^2) \frac{dp}{dz} = -\frac{\lambda_R}{2d} \rho M^2 c_{xT}^2.$$

Mit Gl. (4.19), $c_{xT}^2 = p/(\alpha\rho)$, erhalten wir nach Multiplikation mit dz/p

$$(1 - M^2) \frac{dp}{p} = -\frac{\lambda_R}{2d} \frac{M^2}{\alpha} dz.$$

Aus $Mp = const$ folgt $dp/p = -dM/M$. Außerdem wird α mittels Gl. (4.37) durch K und M ersetzt, $\alpha = KM/(1 + KM)$. Wir erhalten die Differentialgleichung

$$\frac{(1 - M^2)K}{M^2(1 + KM)} dM = \frac{\lambda_R}{2d} dz.$$

Nach einer Partialbruchzerlegung,

$$\frac{(1 - M^2)K}{M^2(1 + KM)} = -\frac{K^2}{M} + \frac{K}{M^2} - \frac{K(1 - K^2)}{1 + KM},$$

und Integration folgt, für $\lambda_R = const$, Gl. (4.39).

Rohrreibungsbeiwert λ_R , homogene Strömung

Für homogene Strömung: λ_R analog zu Einphasen-Strömungen

1. Laminare Strömung

$$\lambda_R = 64/\text{Re} \quad (4.40)$$

mit $\text{Re} = \rho U d / \mu_s$, $\mu_s \dots$ scheinbare Zähigkeit

2. Turbulente Strömung

a) raue Rohre, $\lambda_R \approx \text{const}$, z.B.:

$$\lambda_R = 0,02 \quad (4.41)$$

b) glatte Rohre, $\lambda_R = \lambda_R(\text{Re})$:

$$\lambda_R^{-1/2} = 1,93 \log_{10} \left(\text{Re} \lambda_R^{1/2} \right) - 0,537 \quad (4.42)$$

(McKeon, J. Fluid Mech. 511, 2004)

Für homogene Strömung, d.h. guter Durchmischung beider Phasen, können die für den Rohr widerstand von Einphasen-Strömungen geltenden Gesetze auf Zweiphasenströmungen angewendet werden. Bei der Strömung durch raue Rohre folgt der Rohr widerstand bei niedrigen Re-Zahlen dem Wert für glatte Rohre. Ab einer gewissen Re-Zahl nimmt λ_R einen ungefähr konstanten Wert an, siehe die Lehrveranstaltung Wärmeübertragung bzw. Abschn. 4.13 in PRANDTL et al.. Der Wert von $\lambda_R = 0,02$ ergibt sich bei $\text{Re} = 60\,000$.

Mit der Definition von λ_R ,

$$\lambda_R = - \frac{\Delta p}{\Delta z} \frac{d}{\rho v^2 / 2},$$

ist das Hagen-Poiseuillesche Gesetz, Gl. (2.11),

$$\dot{V} = \frac{R^4 \pi}{8\mu} \frac{p_1 - p_2}{l},$$

identisch zu $\lambda_R = 64/\text{Re}$,

$$\frac{d^2 \pi}{4} v = \frac{d^4 \pi}{16 \cdot 8\mu} \lambda_R \frac{\rho v^2 / 2}{d}, \quad \lambda_R = \frac{64\mu}{\rho v d} = \frac{64}{\text{Re}}.$$

Rohrreibungsbeiwert, inhomogene Strömungen

Unterschiedliche Strömungsformen möglich, siehe S. 114. Eigenschaften der Strömung wie λ_R , Qualität \dot{x} etc. meist nur durch empirische Beziehungen gegeben:

- Lockhart-Martinelli Korrelationen
(eig. Martinelli und Mitarbeiter, 1944–1949).
Siehe BRENNEN, Abschn. 8.3 oder WALLIS, S. 49ff.
- „Universelle“ Korrelation auf Grundlage einer umfangreichen Datenbasis:
GARCÍA et al. (Int. J. Multiphase Flow 33, 2007).

Widerstandsverringering durch Additiva

„polymer drag reduction“; Toms-Effekt

Zusatz von langkettigen Polymermolekülen, $M \approx 10^6$ kg/kmol, in turbulente Rohrströmung;

Anteil von wenigen ppm \Rightarrow Widerstandsverringering um bis zu 80%.

Widerstandsverringering durch Unterdrückung von Wirbelstrukturen, deren Größe gleich der Länge der Polymermoleküle ist.

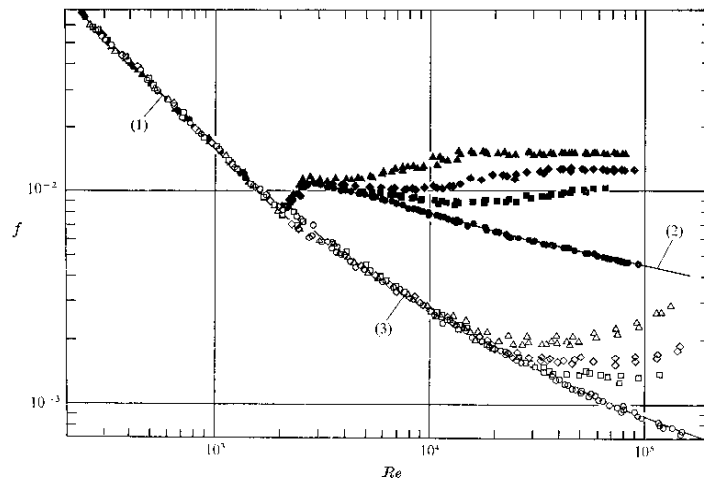
Wirkt nur in einer Wandgrenzschicht oder an einer freien Oberfläche, nicht in überfluteten Freistrahlen.

Siehe WHITE und MUNGAL (Ann. Rev. Fluid Mech. 40, 2008).



Erhöhung der Wurfweite von Freistrahlen durch Zusatz von Additiva. (Abb. 1.3 aus SCHOWALTER.)

Der Strahl „Ucar Rapid Water“ kommt ca. doppelt so weit wie der gewöhnliche Wasserstrahl, „Conventional“. Der Strahl mit Zusätzen scheint weniger stark zu zerfallen als der reine Wasserstrahl. Aus der Abbildung ist nicht ersichtlich, ob die Wurfweite alleine durch den geringeren Strahlzerfall oder zusätzlich auch durch die Widerstandsverringering im Schlauch vergrößert wird.



Widerstandszahl f , $f = \lambda_R/4$, über Re für raue und glatte Rohre. Kreise: Glatte Rohre. Geschlossene Symbole: Reine Flüssigkeit. Offene Symbole: Maximal erreichbare Widerstandsverringern durch Zugabe von Polymeren. Linien: (1) laminare Strömung, $f = 16/Re$, (2) Prandtl-Kármán Korrelation, (3) Virk's Asymptote für maximale Widerstandsverringern. (Abb. 8 aus VIRK, J. Fluid Mech. 45, 1971.)

Definition der Widerstandszahl f („Fanning friction factor“):

$$|\tau_w| = f \rho v^2 / 2.$$

Mit $\tau_w = -\frac{R}{2} \frac{p_1 - p_2}{l}$, Gl. (2.5), folgt

$$\frac{d}{4} \frac{\Delta p}{\Delta z} = f \rho v^2 / 2, \quad f = \frac{1}{4} \frac{\Delta p}{\Delta z} \frac{d}{\rho v^2 / 2} = \frac{1}{4} \lambda_R.$$

Die Abbildung oben zeigt, dass der Widerstand teilweise um mehr als 50% verringert werden kann.

4.4 Zweiphasenströmungen mit Relativgeschwindigkeit

4.4.1 Allgemeine Beziehungen

- Bei Strömungen mit Relativgeschw. besonders wichtig: Strömungsform: Gleich- oder Gegenstrom.
- Bei bekannter Strömungsform ist die eindimensionale Strömung eindeutig bestimmt durch:

$$\begin{array}{cccc} p, & \rho_1, & v_1, & (1 - \alpha), \text{ Phase 1} \\ & \rho_2, & v_2, & \alpha, \text{ Phase 2} \end{array}$$

Als Druck wird der Mittelwert über die Querschnittsfläche genommen und in beiden Phasen als gleich angenommen.

Grundgleichungen

- je eine Kontinuitätsgleichung für jede Phase
- je eine Bewegungsgleichung für jede Phase (oder eine BWglg für Gemisch und eine BWglg. für Relativbewegung)
- je eine Dichte-Druck-Relation (Zustandsgleichung) für jede Phase. (z.B. $\rho = \text{const}$, oder isentrope bzw. isotherme ZÄ, oder Energiebilanz + Zustandsgleichung)

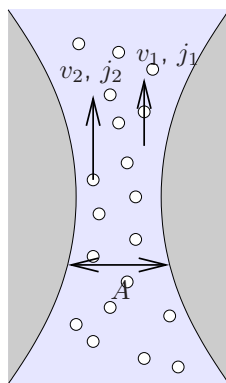
Die Bewegungsgleichungen (mit Ausnahme jener des Gemisches) enthalten Wechselwirkungskräfte zwischen den Phasen (Widerstand zufolge der Relativbewegung).

- Wenn eine Phase in der anderen verteilt ist (Dispersion), so wird auch die dispergierte Phase ("Teilchen, Tropfen- bzw. Blasenschwarm") wie ein Kontinuum behandelt. Dabei bedeutet ρ immer die Dichte des Stoffes aus dem die Phase besteht, und nicht die Dichte des Schwarms! (Diese ist durch $\alpha\rho_2$ gegeben, wenn Phase 2 in Phase 1 dispergiert ist.)
- Es werden einheitliche Geschwindigkeiten für jede Phase angenommen. Stellt bei Ringströmungen, Schichtenströmungen und anderen Strömungsformen mit getrennten Phasen lediglich die konsequente eindimensionale Näherung dar.
- Bei dispergierter Phase jedoch zusätzliche Voraussetzung nötig: Teilchengrößen dürfen nicht zu unterschiedlich sein, damit annähernd gleiche Wechselwirkungskräfte auch für annähernd gleiche Relativgeschwindigkeiten sorgen. Anderenfalls "Schlupfterm" in Gemisch-Bewegungsgleichung!

4.4.2 Driftfluss

Ziel: Näherungsweise Beschreibung, die wesentliche Effekte erfasst, ohne dass die (komplizierten) Grundgleichungen gelöst werden müssen.

Zur Vereinfachung der Darstellung: Feste Teilchen in Flüssigkeit oder in Gas, *keine* Phasenumwandlungen.



Volumenstromdichte

$$j_1 = \frac{\dot{V}_1}{A} = (1 - \alpha)v_1$$

$$j_2 = \frac{\dot{V}_2}{A} = \alpha v_2$$

Volumenstromdichte des Gemisches

$$j = \frac{\dot{V}_1 + \dot{V}_2}{A} = j_1 + j_2 = (1 - \alpha)v_1 + \alpha v_2$$

Definition Driftfluss j_{12} : Volumenstromdichte der Phase relativ zu einer Querschnittsfläche, die sich mit der Volumenstromdichte j bewegt.

$$j_{12} = (1 - \alpha)(v_1 - j) = j_1 - (1 - \alpha)(j_1 + j_2) = \alpha j_1 - (1 - \alpha)j_2$$

$$j_{21} = \alpha(v_2 - j) = j_2 - \alpha(j_1 + j_2) = -\alpha j_1 + (1 - \alpha)j_2 = -j_{12}$$

Es gilt

$$j_1 = (1 - \alpha)j + j_{12}, \quad j_2 = \alpha j - j_{12}$$

$$\begin{aligned} j_{12} &= (1 - \alpha)(v_1 - j) = (1 - \alpha)(v_1 - (1 - \alpha)v_1 - \alpha v_2) = \\ &= \alpha(1 - \alpha) \underbrace{(v_1 - v_2)}_{v_{12}} = -j_{21} \end{aligned}$$

Achtung $v_{12} = v_1 - v_2$, aber $j_{12} \neq j_1 - j_2$.
Aufgabe: Wie hängt j_{12} bzw. v_{12} von α ab?,

Weitere Vereinfachungen der Bewegungsgleichungen

- hinreichend kleine Geschwindigkeiten: Vernachlässigung der Beschleunigungsterme und der konvektiven Terme
- Vernachlässigung der Wandreibung
- Betrachten nur Strömungen in einem senkrechten Rohr mit konstantem Querschnitt

Folgen

- A) Bewegungsgleichung für Gemisch: Druck = hydrostatische Druckverteilung (als ob Gemisch ruhen würde)
- B) Bewegungsgleichung für Relativbewegung: Gleichgewichtsbedingung für Kräfte, die an einem Teilchen angreifen.

$$\underbrace{g|\rho_2 - \rho|V_p}_{\text{Bem 1}} = \underbrace{c_w \alpha \frac{\rho_1 v_{12}^2}{2}}_{\text{Bem 2}} A_p.$$

Bem 1 Gewicht minus Auftrieb eines Teilchens im hydrostat. Druckgradienten der im Gemische herrscht.

Bem 2 Widerstand eines Teilchens im Schwarm mit Konzentration α , (d.h. gegenseitige Beeinflussung der Teilchen). V_p , A_p Volumen bzw. Querschnittsfläche eines Teilchens.

Dimensionsanalyse:

$$c_{w,\alpha} = c_{w,\alpha}(\text{Re}_{12}, \alpha), \quad \text{mit} \quad \text{Re}_{12} = \frac{|v_{12}|d_p}{\nu_1}, \quad d_p = \frac{3V_p}{2A_p}.$$

Weitere Vereinfachungen für $\text{Re}_{12} \gg 1$ oder $\text{Re}_{12} \ll 1$ möglich (meist auch bei $\text{Re}_{12} \sim 1$ verwendet.)

- $\text{Re}_{12} \gg 1$: Ablösung unabhängig von Re_{12} (im unter- oder überkritischen Bereich) $\Rightarrow c_{w\alpha}$ unabhängig von Re_{12}

$$c_{w\alpha} = c_{w0}\phi(\alpha) \quad \text{mit} \quad \phi(0) = 1,$$

c_{w0} Widerstandsbeiwert für Einzelteilchen.

- $\text{Re}_{12} \ll 1$: Widerstand proportional μ_1 , (schleichende Strömung, Stokesche Formel!)

$$c_{w\alpha} = c_{w0}\varphi(\alpha) = \frac{\text{const}}{\text{Re}_{12}}\varphi(\alpha), \quad \text{mit} \quad \varphi(0) = 1.$$

Vergleich mit Einzelteilchen:

$$g|\rho_2 - \rho_1|V_p = c_{w0} \frac{\rho_1 U^2}{2} A_p$$

U ... Sink- oder Steiggeschwindigkeit eines Einzelteilchens

Es gilt:

$$|\rho_2 - \rho| = (1 - \alpha)|\rho_2 - \rho_1|.$$

Vergleich ergibt:

$$(1 - \alpha)c_{w0} \frac{\rho_1 U^2}{2} A_p = c_{w\alpha} \frac{\rho_1 v_{12}^2}{2} A_p,$$

$$j_{12} = \alpha(1 - \alpha)v_{12} = \alpha(1 - \alpha)^{3/2} \sqrt{\frac{c_{w0}}{c_{w\alpha}}} U.$$

Driftfluss-Relation:

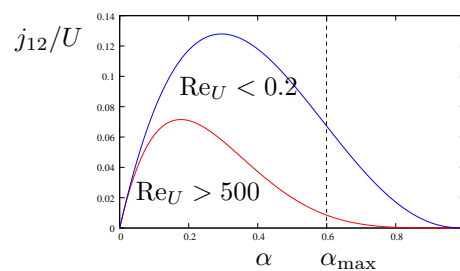
$$j_{12} = U f(\alpha, \text{Re}_{12})$$

wobei $f(\alpha) \rightarrow 0$ für $\alpha \rightarrow 0$.

Bsp.: Experimentell für feste Teilchen in Flüssigkeit (Richardson & Zaki):

$$f(\alpha; \text{Re}_U) = \alpha(1 - \alpha)^n, \quad n = \begin{cases} 4.65 & \text{Re}_U > 500 \\ 2.39 & \text{Re}_U < 0.2 \end{cases}$$

mit $\text{Re}_U = \frac{Ud}{\nu_1}$, α_{\max} Volumenanteil bei dichtester Kugelpackung

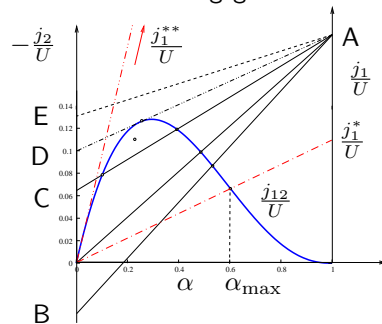


4.4.3 Stationäre Strömungszustände, Wirbelschicht

Anwendung der Driftfluss-Relation:

Bestimmung des stationären Zustandes bei gegebenen j_1 und j_2 :

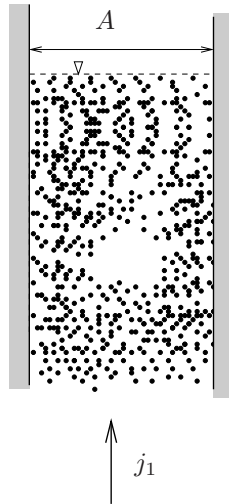
Es gilt: $\begin{cases} \alpha = 0: j_{12} = -j_2 \\ \alpha = 1: j_{12} = j_1 \end{cases}$, Alle möglichen Driftflüsse j_{12} bei geg. j_1 und j_2 liegen auf der Verbindungsgeraden.



- 0A Wirbelschicht mit unterem j_1^* und oberem Fluid Volumenstrom j_1^{**} .
- AB Gleichstrom (1 Lösung)
- AC Gegenstrom (2 Lösungen)
- AD Grenze des Gegenstrombetriebs
- AE stationärer Zustand nicht möglich

Anwendung auf Wirbelschicht (Fließbett, "fluidized bed")

Feste Teilchen in einem vertikalen Behälter der von einem spezifisch leichteren Fluid von unten nach oben durchströmt wird.

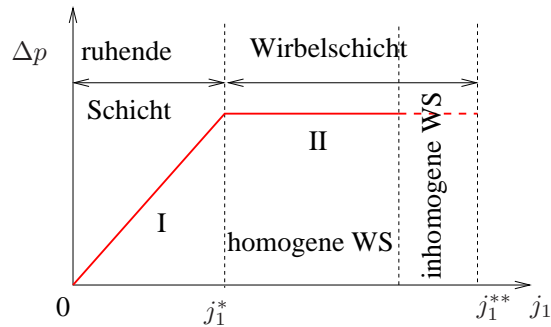


- $j_1 < j_1^*$ Ruhende Schicht
 - $j_1^* < j_1 < j_1^{**}$ Wirbelschicht: Verhalten analog zu Flüssigkeit, freie Oberfläche, Oberflächenwellen, spez. leichter Körper schwimmt, strahlförmiges Austreten
 - $j_1^{**} < j_1$ Teilchen werden von Fluid mitgerissen und treten oben aus dem Behälter aus.
- Wirbelschicht kann $\left\{ \begin{array}{l} \text{homogen} \\ \text{inhomogen} \end{array} \right\}$ sein; inhomogen vor allem bei höheren Geschwindigkeiten; "Blasen", "Strahlen"

4.4.4 Druckverluste

Druckverlust in Wirbelschicht (Flüssigkeitswirbelschicht)

Bemerkung: Bei Gasen treten Blasen schon bei $j_1 > j_1^*$ auf!

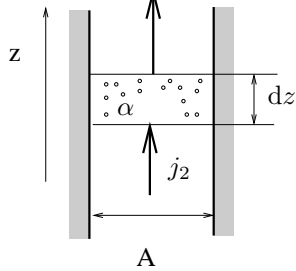


- I linearer Bereich, Darcysches Gesetz: $j_1 = -\frac{k}{\mu_1} \frac{dp}{dx}$,
 k ...Permeabilität [k] = m²(nur von porösen Medium abhängig) ,
 II konstanter Wert = Gewicht der festen Teilchen pro Fläche,
 (Voraussetzung: Vertikales Rohr, konstanter Querschnitt)

4.4.5 Sedimentation, kinematische Wellen

Kontinuitätsgleichung für Phase 2

$$\frac{\partial \alpha A dz}{\partial t} = A \left[j_2 - \left(j_2 + \frac{\partial j_2}{\partial z} dz \right) \right],$$



$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial j_2}{\partial z} = 0,$$

inkomp. Gemisch, konst. Querschnitt:

$$\frac{\partial j}{\partial z} = 0.$$

Bei festem Boden gilt: $j = 0$ und somit $j_2 = \alpha j - j_{12} = -U f(\alpha)$,

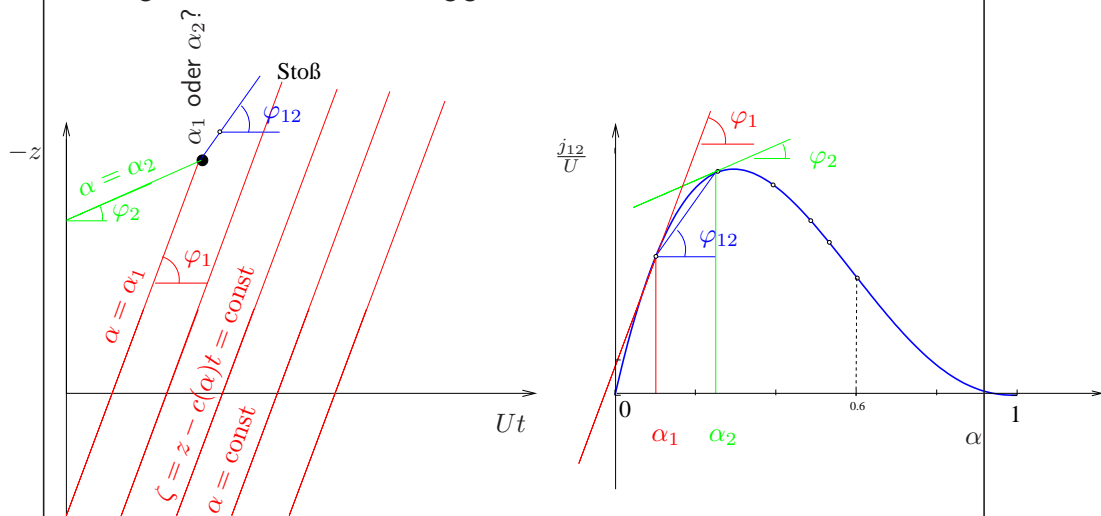
$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} - U \frac{\partial f(\alpha)}{\partial z} = 0 \quad \text{kinematische Wellengleichung}$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + c(\alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial z} = 0, \quad c(\alpha) = -U f'(\alpha).$$

Für einen Beobachter, der sich mit der Geschwindigkeit $c = c(\alpha)$ bewegt, ist die Lösung konstant; m. a. W.: die Lösung ist entlang von Geraden in der (z,t) -Ebene konstant:

$$\text{allg. Lösung } \alpha = \alpha(\zeta), \quad \zeta = z - c(\alpha)t.$$

Lösung der kinematischen Wellenglg. mittels Charakteristiken



$$c(\alpha_1) = -U \tan \varphi_1, \quad c(\alpha_2) = -U \tan \varphi_2, \quad s_{12} = -U \tan \varphi_{12}$$

kinematische Stoßwelle

Falls für $z_1 < z_2$ gilt $c(\alpha(z_1)) > c(\alpha(z_2))$ kommt es zum "Aufsteilen" der kinematischen Welle \Rightarrow nicht differenzierbare Lösung, bzw. wandernde Unstetigkeit (Stoß).

Bestimmung der Stoßgeschwindigkeit:

$$\text{Anfangsbedingung } \alpha = \begin{cases} \alpha_1, & z < 0 \\ \alpha_2, & z > 0 \end{cases}$$

mit $c(\alpha_1) > c(\alpha_2)$, Lösung:

$$\alpha(z,t) = \begin{cases} \alpha_1, & z < st \\ \alpha_2, & z > st \end{cases}$$

mit s Stoßgeschwindigkeit.

Integration über ein Kontrollvolumen, das den Stoß enthält ergibt:

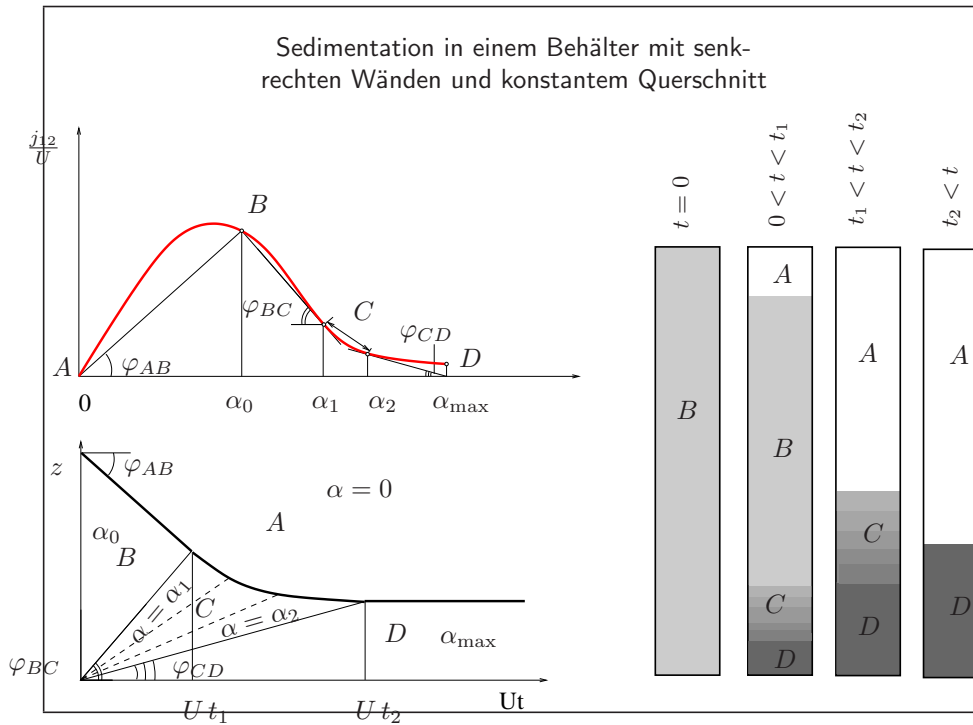
$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha + \frac{\partial}{\partial z} j_2 = 0, \quad \left| \int_{z_1}^{z_2} dz \right.$$

mit $j_2 = \alpha j - j_{12}$ und $j = 0$ erhalten wir

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int \alpha dz}_{s(\alpha_1 - \alpha_2)} + j_2(\alpha_2) - j_2(\alpha_1) = 0$$

$$s = \frac{j_2(\alpha_2) - j_2(\alpha_1)}{\alpha_2 - \alpha_1} =$$

$$= -\frac{j_{12}(\alpha_2) - j_{12}(\alpha_1)}{\alpha_2 - \alpha_1} = -U \tan \varphi_{12}$$



- Randbedingung an Oberseite: $j_2 = 0$, Wegen negativer Ausbreitungsgeschwindigkeit $c < 0$ entsteht Zone mit klarer Flüssigkeit $\alpha = 0$, Zone A;
- Zone B: Ungestörter Anfangsvolumenanteil α_0 , Sinkgeschwindigkeit v_2
- Stoß AB: Übergang von Zustand A ($\alpha = 0$) nach $\alpha = \alpha_0$ (Zustand B) erfolgt mittels Stoß.
Stoßgeschwindigkeit = Sinkgeschwindigkeit in Bereich B

$$s_{AB} = -\frac{j_{12}(\alpha_0) - 0}{\alpha_0 - 0} = v_2$$

- Randbedingung an Boden: $j_2 = 0$: Teilchen akkumulieren auf Boden mit $\alpha = \alpha_{\max}$ (Zustand D)
- In Bereich D: $j_2 = 0 = j_1 = 0$, Driftflussrelation hier nicht gültig da Teilchen auf dem Boden ruhen.
- Grenze des Bereichs D: Ausbreitung mit Stoßgeschwindigkeit

$$s_{CD} = -\frac{j_{12}(\alpha_2) - 0}{\alpha_2 - \alpha_{\max}}$$

aber auch mit Ausbreitung mit Charakteristikengeschw.

$$c(\alpha_2) = -\frac{\partial j_{12}}{\partial \alpha}$$

Daher $s_{CD} = c(\alpha_2)$.

- Bestimmung von α_2 : Tangente aus $(\alpha_{\max}, 0)$ an Driftflusskurve.

- Übergang BC: Tangente aus $(\alpha_0, j_{12}(\alpha_0))$ an Driftflusskurve $\rightarrow \alpha_1$,
- Bereich C: Verdünnungsfächer (stetiger Übergang von α_1 nach α_2),
- Übergang von Zustand B in D erfolgt nicht mittels eines Stoßes (wäre aufgrund der Kontinuitätsgleichung möglich), sondern mittels eines Stoßes und eines "Verdünnungsfächers". Begründung: Die Verbindungslinie der Endzustände eines Stoßes muss unterhalb der Driftflusskurve liegen (Entropiebedingung, Folge aus 2. HS)
- Falls die Gerade durch $(\alpha_{\max}, 0)$ (Zustand D) und $(\alpha_0, j_{12}(\alpha_0))$ (Zustand B) unterhalb der Driftflusskurve liegt, entfällt der Bereich C.

Analoge Behandlung

- Zentrifugieren
- Drainage von Schäumen

Verallgemeinerung

- Behälter mit geneigten Wänden: Erhöhung der effektiven Absetzgeschwindigkeit (bis zu Faktor 7) Boycott-Effekt (experimentell 1925).

Literaturverzeichnis

- BAEHR H.D. und STEPHAN K., Wärme- und Stoffübertragung. 2. Auflage, Springer, 1996.
- BARNES H.A., HUTTON J.F. und WALTERS K., An Introduction to Rheology. Elsevier, 1989.
- BATCHELOR G.K., An Introduction to Fluid Dynamics. Cambridge, 1967.
- BIRD R.B., STEWART W.E. und LIGHTFOOT E.N., Transport Phenomena. Wiley, 1960.
- BOGER D.V. und WALTERS K., Rheological Phenomena in Focus. Elsevier, 1993.
- BRAUER H., Grundlagen der Einphasen- und Mehrphasenströmungen. Sauerländer, 1971.
- BRENNEN C.E., Fundamentals of Multiphase Flow. Cambridge, 2005.
- BRODKEY R.S., The Phenomena of Fluid Motion. Addison-Wesley, 1967.
- CLIFT R., GRACE J.R. und WEBER M.E., Bubbles, Drops, and Particles. Academic, 1978.
- GIESEKUS H., Phänomenologische Rheologie. Eine Einführung. Springer, 1994.
- HETSRONI G. (Hg.) Handbook of Multiphase Systems. Hemisphere, 1982.
- LEVICH V.G., Physicochemical Hydrodynamics. Prentice-Hall, 1962.
- MILNE-THOMSON L.M., Theoretical Hydrodynamics. 5. Auflage, Macmillan, 1974.
- PRANDTL L., OSWATITSCH K. und WIEGHARDT K., Führer durch die Strömungslehre. 9. Auflage, Vieweg, 1990.
- SCHLICHTING H. und TRUCKENBRODT E., Aerodynamik des Flugzeuges. Erster Band. 2. Auflage, Springer, 1967.
- SCHNEIDER W., Mathematische Methoden der Strömungsmechanik. Vieweg, 1978.

SCHOWALTER W.R., Mechanics of Non-Newtonian Fluids. Pergamon, 1978.

TANEDA S., Flow Visualization: Scientific Images. SciPress, Tokyo, 2000, <http://www.scipress.org/e-library/fv/>.

WALLIS G.B., One-dimensional two-phase flow. McGraw-Hill, 1969.

ZEIDLER E. (Hg.) Teubner-Taschenbuch der Mathematik. Teubner, 1996.