

### 3.6 Kavitation

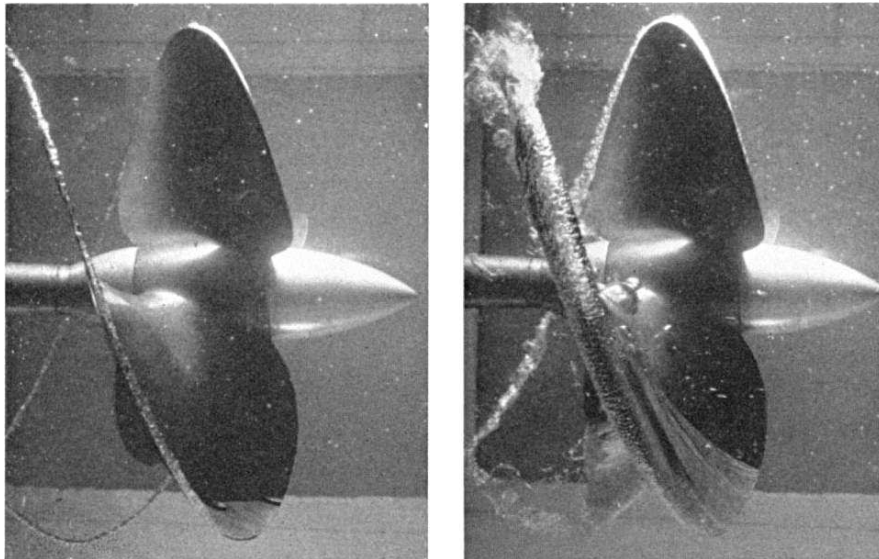
*Kavitation:* Bildung von dampf- oder gaserfüllten Hohlräumen.

Flüssigkeit kann verdampfen durch

- Temperaturerhöhung: Sieden
- Druckverringerung: Kavitation

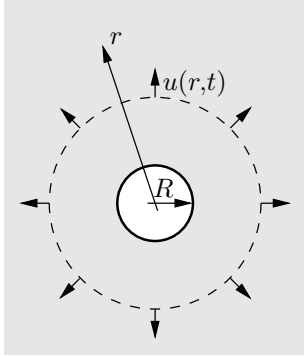
In Flüssigkeitsströmungen kann der Druck leicht unter den Sättigungsdampfdruck  $p_{\text{sat}}$  fallen. Dampfblasen entstehen.

Steigt der Druck wieder, kollabieren diese Dampfblasen. Es entstehen hohe Drücke im Zentrum der Blasen. Kavitationsschäden, z.B. an Turbinenschaufeln oder Schiffspropellern, sind die Folge.



Kavitation an einem Propeller. Links bildet sich ein Hohlraum im Zentrum des von der Propellerspitze abgehenden Wirbels. Rechts, bei höherer Strömungsgeschwindigkeit, bilden sich auch schon auf der Saugseite der Propellerblätter Kavitationsblasen. (Abb. 6.12.2 aus BATCHELOR.)

### 3.6.1 Rayleigh-Plesset Gleichung



Druck in der Blase:  $p_G$ , Radius:  $R = R(t)$

Kontinuität:  $u(r,t) = \frac{f(t)}{r^2}$   
(Quellenströmung, Gl. (3.38))

Randbedingung:  $u(r = R) = \dot{R}$ ,

$$u(r,t) = \dot{R} \frac{R^2}{r^2} \quad (\text{E1})$$

Einsetzen in Eulersche Gleichungen (3.44),  
Integration, dynamische Randbedingung bei  $r = R$ :

$$\ddot{R}R + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = -\frac{p_\infty - p_G}{\rho} - 4\frac{\mu\dot{R}}{\rho R} - \frac{2\sigma}{\rho R} \quad (\text{E2})$$

Rayleigh-Plesset Gleichung

Die Rayleigh-Plesset Gleichung beschreibt das Wachstum einer kugelförmigen Dampf- oder Gasblase.

Gl. (3.44) sind die Eulerschen Gleichungen nach Anwendung des Entwicklungssatzes,

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad} |\vec{v}|^2 = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p.$$

Einsetzen des Ausdrucks für die Geschwindigkeit, Gl. (E1), ergibt

$$\ddot{R} \frac{R^2}{r^2} + 2\dot{R} \frac{R}{r^2} - 2\dot{R}^2 \frac{R^4}{r^5} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}.$$

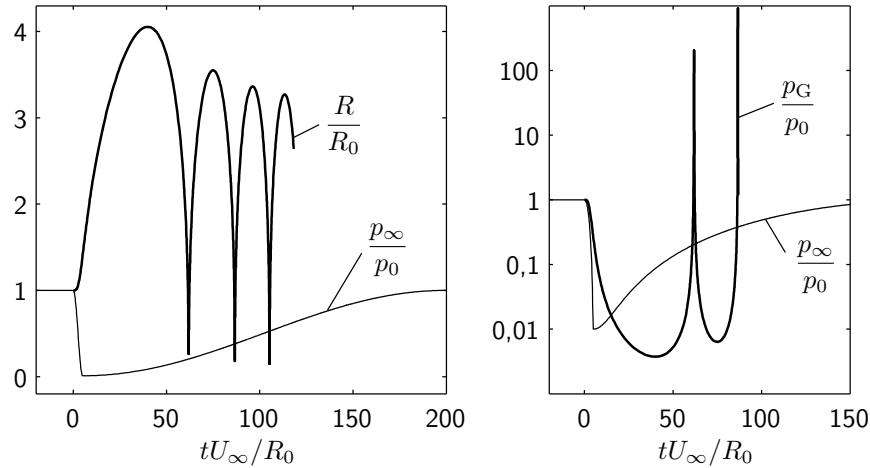
Integration,  $\int_R^\infty dr$  unter der Annahme,  $p$  liesse sich separieren,  $p(r,t) = f(r)g(t)$ , ergibt

$$\ddot{R}R + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = -\frac{p_\infty - p(r = R_+)}{\rho}.$$

Die Rayleigh-Plesset Gleichung folgt nach Anwendung der dynamischen Randbedingung an der Stelle  $r = R$ , unter Vernachlässigung der Viskosität des Gases,  $\sigma_{rr}(r = R_-) - p_G = \sigma_{rr}(r = R_+) - p(r = R_+) - 2\sigma/R$ ,

$$-p_G = 2\mu \frac{\partial u}{\partial r} - p(r = R_+) - \frac{2\sigma}{R}.$$

### Lösung der Rayleigh-Plesset Gleichung



Radius und Druck einer Gasblase in Wasser. Isentrope Zustandsänderung des Gases,  $p_G R^{3\kappa} = p_0 R_0^{3\kappa}$ .

Analytische Lösung:  $p_\infty/p_0 = 100$ ,  $\kappa = 1,4 \Rightarrow p_{G,\max}/p_\infty \approx 4050$ .

Die Rayleigh-Plesset Gleichung beschreibt eine Blase in Abhängigkeit vom Druck  $p_\infty$  im Fernfeld. In den Abbildungen oben ist der Verlauf des Radius und des Drucks in der Blase nach rascher Absenkung des Außenruckes auf  $p_{\infty,\min} = 0,01 p_0$  und langsamen Anstieg auf  $p_\infty = p_0$  gezeigt. Gerechnet für  $R_0 = 1 \text{ mm}$ ,  $p_0 = 1 \text{ bar}$ ,  $U_\infty = 20 \text{ m/s}$ .

Im gezeigten Beispiel fällt der Druck in der Blase unter den minimalen Druck in der Außenströmung,  $p_{G,\min} = 0,004 p_0$ . Dann kollabiert die Blase, der Druck steigt auf ein Vielfaches des Ausgangswertes,  $p_{G,\max} = 204 p_0$ . Danach oszilliert der Radius der Blase um den Ausgangswert. Tatsächlich wird die Symmetrie der radialsymmetrischen Strömung schon beim ersten Zusammenfallen zerstört und die Rayleigh-Plesset Gleichung beschreibt die Bewegung der Blase nicht mehr gut.

## Analytische Lösung der Rayleigh-Plesset Gleichung

Für eine sprunghafte Änderung des Außendruckes ist eine analytische Lösung der nicht-viskosen Rayleigh-Plesset Gleichung möglich. Sei eine Gasblase im Gleichgewicht mit der Außenströmung,  $p_G = p_0$ ,  $p_\infty = p_0$  für  $t < 0$ . Zum Zeitpunkt  $t = 0$  wird der Außendruck plötzlich auf einen konstanten Wert erhöht,  $p_\infty > p_0$  für  $t \geq 0$ .

Multiplikation der inertierten Terme und des Druckterms in der Rayleigh-Plesset Gleichung mit  $2R^2\dot{R}$  ergibt

$$2R^3\dot{R}\ddot{R} + 2R^2\dot{R}^3 = -\frac{p_\infty}{\rho}R^2\dot{R} - 2\frac{p_0}{\rho}R_0^{3\kappa}R^{2-3\kappa}\dot{R}.$$

Das unbestimmte Integral lautet

$$R^3\dot{R}^2 = -\frac{p_\infty}{\rho}\frac{2}{3}R^3 - \frac{p_0R_0^{3\kappa}}{\rho}\frac{2}{3(1-\kappa)}R^{3-3\kappa}.$$

Nun werden die Anfangsbedingungen und der Umstand, dass  $\dot{R}$  in den Extrema von  $R$  verschwindet, berücksichtigt. Damit ergibt die Auswertung des Integrals zwischen den Grenzen  $t = 0$ :  $\dot{R} = 0$ ,  $R = R_0$  und  $t = t_1$ :  $\dot{R} = 0$ ,  $R = R_{\min}$ ,

$$0 = -\frac{p_\infty}{\rho}\frac{2}{3}(R_{\min}^3 - R_0^3) - \frac{p_0}{\rho}\frac{2}{3(1-\kappa)}R_0^{3\kappa}(R_{\min}^{3-3\kappa} - R_0^{3-3\kappa}).$$

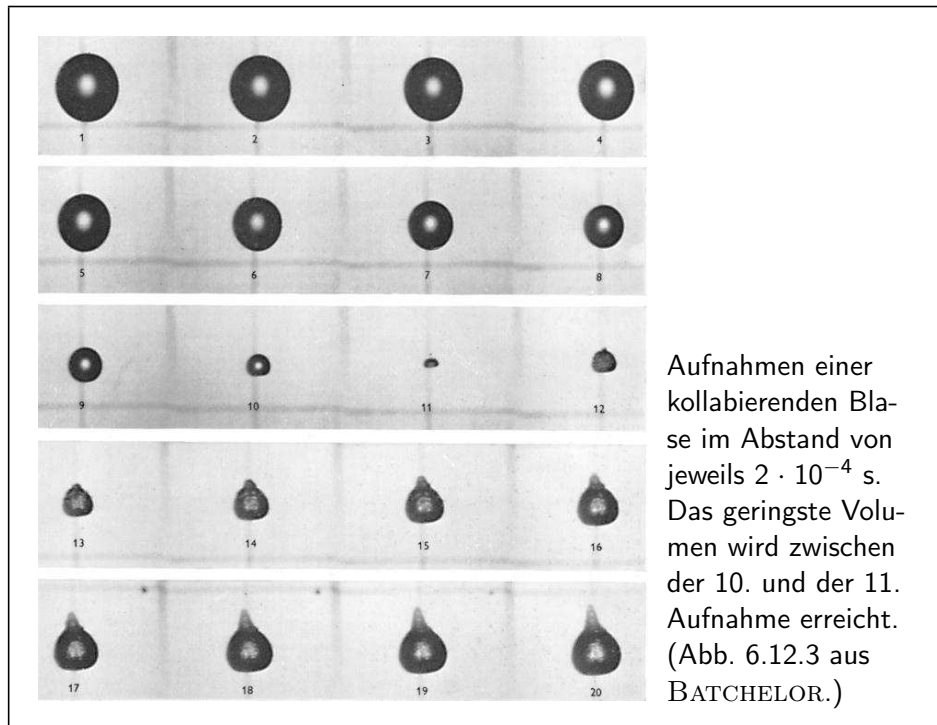
Nach algebraischer Umformung erhält man

$$\left(\frac{R_0}{R_{\min}}\right)^{3\kappa-3} - 1 = (\kappa - 1)\frac{p_\infty}{p_0}\left(1 - \left(\frac{R_{\min}}{R_0}\right)^3\right).$$

Für  $R_0 \gg R_{\min}$  gilt in guter Näherung  $(R_0/R_{\min})^{3\kappa-3} \approx (\kappa - 1)(p_\infty/p_0)$ . Mit  $\kappa = 1,4$  und  $p_\infty/p_0 = 100$  erhält man beispielsweise  $R_0/R_{\min} \approx 40^{1/1,2} = 21,63$ .

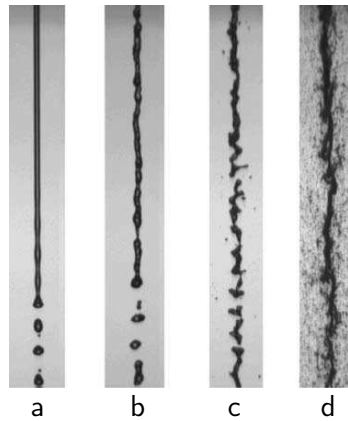
Mit der Isentropenbeziehung,  $p_{G,\max}R_{\min}^{3\kappa} = p_0R_0^{3\kappa}$ , folgt

$$\frac{p_{G,\max}}{p_0} \approx \left((\kappa - 1)\frac{p_\infty}{p_0}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{p_{G,\max}}{p_\infty} \approx (\kappa - 1)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \left(\frac{p_\infty}{p_0}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}.$$



Beim Zusammenfallen verliert eine Blase meist ihre radiale Symmetrie. Die Blase wird auf einer Seite flacher. Die an dieser Stelle gegeneinander strömende Flüssigkeit erzeugt einen kleinen Freistrah (,,microjet“), in dem die Flüssigkeit jedoch hohe Geschwindigkeiten erreichen kann. In der Abbildung oben ist die durch den Freistahl verursachte Störung auf der dem Freistrah gegenüberliegenden Seite der Blase zu sehen. Kavitationsschäden werden einerseits durch den Freistrah, andererseits durch die Ermüdung des Materials zufolge der Wechselbeanspruchung durch die beim Zusammenfallen generierten Stoß- bzw. Druckwellen verursacht (BRENNEN, Abschn. 5.2.4).

### 3.7 Zerfall von Flüssigkeitsstrahlen



Vier Arten des Strahlzerfalls

- (a) Rayleigh-regime, Zertropfen
  - (b) first wind-induced regime, Zerwellen
  - (c) second wind-induced regime, Zerwellen
  - (d) atomization regime, Zerstäuben
- (Abb. 1 aus DUMOUCHEL, Exp. Fluids 45, 2008.)

→ zunehmende Strömungsgeschwindigkeit

Die Bereiche unterscheiden sich aufgrund der Instabilitätsmechanismen, die zum Strahlzerfall führen.

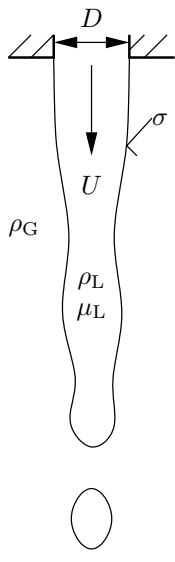
Bildung eines Strahls:  $We_L > 8$ , sonst Bildung einzelner Tropfen. Vergleiche Stabilität eines Tropfens, S. 88.

Rayleigh-regime: Instabilität aufgrund von Oberflächenspannung und inerten Kräften. Die Tropfen sind von ähnlicher Größe, der Tropfendurchmesser ist größer als der Durchmesser des Strahls. Der Strahl bricht viele Düsendurchmesser stromab der Düse auf. Die Länge des Strahls wird durch die Strömung in der Düse nicht beeinflusst.

First wind-induced regime: Zusätzlich zu Oberflächen- und Trägheitstermen spielt das umgebende Gas eine Rolle. Ein zutreffenderer Name wäre vielleicht wind-assisted regime (LIN und REITZ, Ann. Rev. Fluid Mech. 30, 1998, S. 100). Störungen werden durch die Präsenz des Gases, vor allem die Normalspannungsterme an der Oberfläche, stärker angefacht. Die Tropfendurchmesser variieren stärker, sind aber noch immer von ungefähr gleicher Größe wie der Strahldurchmesser. Der Strahl hat eine Länge von vielen Düsendurchmessern, der Strömungszustand in der Düse spielt eine Rolle.

(Fortsetzung nächste Seite)

**Dimensionsanalyse**



6 Einflussgrößen:  $\rho_L$ ,  $D$ ,  $U$ ,  $\sigma$ ,  $\mu$ ,  $\rho_G$   
 3 Grundgrößen: Länge, Masse, Zeit  $\Rightarrow$  drei dimensionslose Größen, z.B.:

$$\text{Re} = \frac{\rho_L U D}{\mu}, \quad \text{We}_L = \frac{\rho_L U^2 D}{\sigma}, \quad \text{We}_G = \frac{\rho_G U^2 D}{\sigma}$$

Auch: Ohnesorge-Zahl,  $\text{Oh} = \frac{\mu}{\sqrt{\rho \sigma D}}$ ,  $\text{Oh} = \sqrt{\text{We}}/\text{Re}$ .

(Fortsetzung von voriger Seite)

Second wind-induced regime: Der Strahl zerfällt durch das Wachstum kurzweiliger Oberflächenwellen. Oberflächenspannung wirkt hemmend auf den Strahlzerfall. Die Länge ist unabhängig vom Düsendurchmesser,  $\text{We}_G$  ist kein kontrollierender Parameter mehr, stattdessen die Gruppe  $(\rho_L/\rho_G)(\sigma/\mu U)^2$ . Der Durchmesser der Tropfen ist wesentlich kleiner als der Strahldurchmesser. Der Strahlzerfall beginnt in einiger Entfernung von der Düse, an der Oberfläche des Strahls. Der Strahl ist im Inneren länger als an der Oberfläche.

Atomization regime: Der Strahlzerfall beginnt an der Düse. Die Form des Strahls ähnelt einem Kegel, dessen Spitze in der Düse liegt. Die Oberfläche ist schon beim Austritt aus der Düse gestört, durch Ereignisse stromauf der Düsenöffnung. Die Störungen werden rapide angefacht. Die Strömung stromauf der Düse hat großen Einfluss auf den Strahlzerfall.

(Beschreibung nach REITZ und BRACCO, in CHEREMISINOFF, Encyclopedia of Fluid Mechanics, 1986.)