319.009 Rechenübung Grundlagen der Thermodynamik WS06/07

Termine
Montag, 13.00-14.00
FH HS 6 (ungerade Matrikelnummern) bzw. FH HS 8 Nöbauer HS (gerade Matrikelnummern)
16.10., 23.10., 30.10., 6.11., 13.11., 20.11., 27.11., 4.12., 11.12., 8.1., 15.1.
Tests: Freitag 11:00-11:45 im FH HS1, 10.11., 1.12., 19.1.

Anmeldung
Anmeldung bis zum 8.11. am Anmeldeterminal des Instituts 322 (beim Seminarraum 322).

Übungsmodus
Es werden Beispiele an der Tafel vorgerechnet. Zur Überprüfung der Mitarbeit finden 3 Tests statt. Pro Test ist ein Beispiel zu lösen, welches mit maximal 100 Punkten bewertet wird. Die zwei besten Tests werden zur Bewertung herangezogen. Für eine positive Beurteilung sind mindestens 100 Punkte erforderlich.

Beurteilung
Sehr gut(1): 176-200 Punkte, Gut(2): 151-175 Punkte, Befriedigend(3): 126-150, Genügend(4): 100-125, Nicht genügend(5): weniger als 100 Punkte

Übungsleiter
Thomas Loimer, e-mail: thomas.loimer@tuwien.ac.at, Tel. 58801/32233, Sprechstunde Do., 14-15:00
Richard Jurisits, e-mail: richard.jurisits@tuwien.ac.at, Tel. 58801/32237, Sprechstunde Mi. 10-11:30

Beispiel 1: In einem Behälter befindet sich ein Gemisch aus flüssigem und dampfförmigem Wasser (geg. Anfangszustand 1 des Wassers: $m_{\text{fl}} = 13$ kg, $m_{\text{D}} = 4{,}5$ kg, $p_1 = 10$ bar).

a.) Bestimmen Sie den Dampfgehalt x_1, das spezifische Volumen v_1 des Gemisches im Zustand 1 und das Behältervolumen V.

b.) Bei welcher Temperatur bzw. bei welchem Druck befände sich (bei gleichbleibendem Behältervolumen V) nur noch gesättigter Dampf in diesem Behälter?

Lösung Beispiel 1:
a)

$$x_{D,1} = \frac{m_{\text{D},1}}{m_{\text{D},1} + m_{\text{fl},1}} = \frac{4{,}5}{17{,}5} = 0{,}257$$

Aus Dampftafel (ohne Interpolation)

$$v_1' = 1{,}1275\,\text{dm}^3/\text{kg}, \quad V_{\text{fl},1} = m_{\text{fl},1} v_1' = 14{,}658\,\text{dm}^3$$

$$v_1'' = 193{,}8\,\text{dm}^3/\text{kg}, \quad V_{D,1} = m_{\text{D},1} v_1'' = 872{,}1\,\text{dm}^3$$

$$V_1 = V_{\text{fl},1} + V_{D,1} = 886{,}8\,\text{dm}^3$$

$$v_1 = V_1/m = 50{,}672\,\text{dm}^3/\text{kg}$$

b)

$$v_2 = v_1 = v_2''$$

Aus Dampftafel (linear interpoliert):

$$\vartheta_2 = 249{,}34\,^\circ\text{C}$$

$$p_2 = 39{,}362\,\text{bar}$$

Beispiel 2: In einem Behälter mit dem Innenvolumen $V = 12{,}5$ dm^3 befindet sich ein Zweiphasensystem aus siedendem Wasser und gesättigtem Dampf (vgl. Skizze). Der Druck im Behälter sei $p = 25$ bar, die Masse des Wasser - Dampf Gemisches sei $m = 3{,}25$ kg.
Man berechne die Massen m' und m'' sowie die Volumina V' und V'' der beiden koexistenten Phasen.

Lösung Beispiel 2:
Aus linearer Interpolation in Dampftafel für Wasser:

$$p = 25\text{bar} \quad v' = 1{,}197\text{dm}^3/\text{kg} \quad v'' = 80{,}54\text{dm}^3/\text{kg}$$

$$v = \frac{V}{m} = \frac{12{,}5}{3{,}25}\,\text{dm}^3/\text{kg} = 3{,}846\,\text{dm}^3/\text{kg}$$

$$v = v'(1-x) + v''x$$

$$x = \frac{v - v'}{v'' - v'} = \frac{3{,}846 - 1{,}197}{80{,}54 - 1{,}197} = 0{,}03339$$

$$m'' = x \cdot m = 0{,}1085\,\text{kg}, \quad V'' = m'' \cdot v'' = 8{,}74\,\text{dm}^3$$

$$m' = (1-x) \cdot m = 3{,}141\,\text{kg}, \quad V' = m' \cdot v' = 3{,}76\,\text{dm}^3$$

Beispiel 3: In einem starren Behälter (Volumen V=const.) befindet sich ein Gemisch aus flüssigem und dampfförmigem Wasser (geg. Anfangszustand 1 des Wassers: $m_1 = 166$ kg, $m_{\text{D}1} = 83$ kg, $\vartheta_1 = 210\ ^\circ$ C). Durch Wärmeabfuhr wird nun die Temperatur im Behälter abgesenkt.
Berechnen Sie

a.) den Druck p_2 und die Temperatur ϑ_2, nachdem 46% des dampfförmigen Wassers kondensiert sind;

b.) Zeichnen Sie den Prozeß $1 \rightarrow 2$ in ein p, v- Diagramm ein.

Lösung Beispiel 3:

$$x_1 = 0{,}5$$

$$v_1 = (1 - x_1)v' + x_1 v'' = (0{,}5 \cdot 1{,}173 + 0{,}5 \cdot 104{,}2)\,\mathrm{dm}^3/\mathrm{kg} = 52{,}687\ \mathrm{dm}^3/\mathrm{kg}$$

$$m_2'' = (1 - 0{,}46) \cdot m_1'' = 44{,}82\,\mathrm{kg}, \quad m_2' = m_1' + 0{,}46 \cdot m_1''$$

$$x_2 = 0{,}27$$

Es gilt $v_1 = v_2$. Bestimmung der Temperatur im Zustand 2 aus:

$$v_2 = (1 - x_2) \cdot v'(\vartheta) + x_2 \cdot v''(\vartheta)$$

Erste Näherung: Vernachlässigung des Volumens des flüssigen Wassers:

$$v_2 = x_2 \cdot v''(\vartheta_2^{(0)})$$

$$v''(\vartheta_2^{(0)}) = v_2/x = 195{,}14\,\mathrm{dm}^3/\mathrm{kg} \quad \to \quad \vartheta_2^{(0)} \approx 180\,^\circ\mathrm{C}$$

genauere Lösung durch lineare Interpolation für v' bzw. v'' als Funktion der Temperatur zwischen 180 °C und 190 °C :

$$\Delta v' = v'_{190} - v'_{180}, \quad \Delta v'' = v''_{190} - v''_{180}, \quad \Delta\vartheta = 10\,^\circ\mathrm{C}$$

$$v_2 = (1 - x_2) \cdot \left(v'_{180} + \Delta v' \frac{\vartheta - 180\,^\circ\mathrm{C}}{\Delta\vartheta}\right) + x_2 \cdot \left(v''_{180} + \Delta v'' \frac{\vartheta - 180\,^\circ\mathrm{C}}{\Delta\vartheta}\right)$$

Wir erhalten:

$$\vartheta_2 = 180\,^\circ\mathrm{C} + \frac{v_2 - (1 - x_2)v'_{180} - x_2 v''_{180}}{(1 - x_2)\Delta v' + x_2 \Delta v''} \Delta\vartheta = 180{,}5\,^\circ\mathrm{C}$$

Analog ergibt sich (mit $\Delta p = 2{,}524\,bar$):

$$p_2 = 10{,}027 + \frac{v_2 - (1 - x_2)v'_{180} - x_2 v''_{180}}{(1 - x_2)\Delta v' + x_2 \Delta v''} \Delta p = 10{,}142\,bar$$

Beispiel 4: Eine Metallkugel ($r = 20$ cm, $\beta = 5 \cdot 10^{-5}$ K^{-1}, $\chi = 1{,}2 \cdot 10^{-6}$ bar^{-1}, $p_1 = 10^5$ Pa, $\vartheta_0 = 20°$ C) wird auf $\vartheta_1 = 25$°C erwärmt.

a.) Um welchen Wert ΔV ändert sich das Volumen, wenn die Temperaturerhöhung des Metalls ohne Behinderung bei Umgebungsdruck stattfindet.

b) Auf welchen Wert p_2 steigt der Druck, wenn sich die Metallkugel in einer starren Hülle befindet.

c) Auf welchen Wert p_2' steigt der Druck, wenn sich die Metallkugel in einer elastischen Hülle befindet, welche sich um $\Delta V = 2$ cm^3 ausdehnt.

Lösung Beispiel 4:
a)

$$V = \frac{4r^3\pi}{3} = 33{,}51\,\mathrm{dm}^3$$

$$\Delta V = \beta V \Delta T = 8{,}38\,\mathrm{cm}^3$$

b)

$$0 = \beta\Delta T - \chi\Delta p$$

$$\Delta p = \frac{\beta}{\chi}\Delta T = 208{,}3\,\mathrm{bar}$$

c)

$$\Delta V = \beta\Delta T - \chi\Delta p$$

$$\Delta p = \frac{\beta}{\chi}\Delta T - \frac{1}{\chi}\frac{\Delta V}{V} = 158{,}4\,\mathrm{bar}$$

Beispiel 5: Bei höheren Drücken ist die Zustandsgleichung idealer Gase zu ungenau. Um das endliche Eigenvolumen der Moleküle zu berücksichtigen, kann man die Abelsche Zustandsgleichung

$$p(v-b) = RT,$$

verwenden. Berechnen Sie β und χ für ein Gas, das mittels der Abelschen Zustandsgleichung beschrieben werden kann. Stellen Sie β bzw. χ nur als Funktion der Temperatur und des Druckes dar.

Lösung Beispiel 5:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = \frac{R}{p}$$

$$\beta = \frac{1}{T}\frac{1}{1+\frac{bp}{RT}}$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T = -\frac{RT}{p^2}$$

$$\chi = \frac{1}{p}\frac{1}{1+\frac{bp}{RT}}$$

Beispiel 6: Gegeben ist ein Behälter A ($V_\mathrm{A} = 2\cdot 10^{-4}$ m^3), der mit einem zweiten Behälter B ($V_\mathrm{B} = 1\cdot 10^{-4}$ m^3) durch eine kleine Öffnung verbunden ist. Beide Behälter sind mit idealem Gas gefüllt. Zu Beginn (Zustand 1) beträgt die Temperatur in beiden Behältern $\vartheta_1 = 10$ °C, und der Druck $p_1 = 1$ bar. Es wird nun die Temperatur im Behälter A erhöht, während die Temperatur im Behälter B konstant auf $\vartheta_\mathrm{B} = 10$ °C belassen wird. Nachdem sich ein stationärer Zustand (Zustand 2) eingestellt hat, beträgt der Druck im Behälter $p_2 = 1{,}4$ bar.

$$\mathcal{R} = 8{,}314\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{molK}}$$

Berechnen Sie:

a) Die Temperatur im Behälter A im stationären Zustand ($\vartheta_{\mathrm{A},2}$)

b) Den Molanteil Δn_A (in Prozent), der aufgrund der Temperaturerhöhung vom Behälter A in den Behälter B geströmt ist.

Lösung Beispiel 6:
a) Zustand 1

$$\text{Beh. A:}\quad p_1V_A = n_{A,1}\mathcal{R}T_1, \qquad \text{Beh. B:}\quad p_1V_B = n_{B,1}\mathcal{R}T_1$$

Zustand 2

$$\text{Beh. A:}\quad p_2V_A = n_{A,2}\mathcal{R}T_2, \qquad \text{Beh. B:}\quad p_2V_B = n_{B,2}\mathcal{R}T_1$$

$$T_2 = T_1\frac{p_2}{p_1}\frac{n_{A,1}}{n_{A,2}} = T_1\frac{p_2}{p_1}\frac{n_{A,1}}{n_{A,1}+n_{B,1}-n_{B,2}} =$$

$$= T_1\frac{p_2}{p_1}\frac{1}{1+V_B/V_A - V_Bp_2/V_Ap_1} = 1{,}75T_1 = 495{,}51\,\mathrm{K}$$

b)

$$n_{A,1}-n_{A,2} = n_{A,1}\left(1-\frac{p_2}{p_1}\frac{T_1}{T_2}\right) = 0{,}2\,n_{A,1}$$

Beispiel 7: Ein zylindrischer Behälter mit Volumen $V = 5$ dm^3 ist durch einen reibungsfrei beweglichen, diathermen Kolben in zwei Kammern geteilt. Das Volumen des Kolbens ist gegen über dem Behältervolumen vernachlässigbar. In beiden Kammern befindet sich ein ideales Gas (H_2). Im Ausgangszustand (1) sind die Volumina beider Kammern gleich. Die Temperatur in der linken Kammer ist $T_{\mathrm{L}_1} = 400$ K, die Temperatur in der rechten Kammer sei $T_{\mathrm{R}_1} = 250$ K. Der Druck in beiden Kammern beträgt $p_1 = 3$ bar.

Berechnen Sie

a) das Massenverhältnis $m_\mathrm{L}/m_\mathrm{R}$,

b) die Temperatur in beiden Kammern, nachdem thermodynamisches Gleichgewicht im Behälter erreicht wurde, wobei der Druck (in beiden Kammern) gleich dem Druck im Ausgangszustand (1) ist,

c) das Verhältnis der Volumina im Endzustand.

$$\mathcal{R} = 8314\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kmol\,K}}, \quad \mathcal{M}_{\mathrm{H_2}} = 2\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{kmol}}.$$

Lösung Beispiel 7:
a) Zustand 1

$$p_1\frac{V}{2} = m_L\,RT_{L_1}, \qquad p_1\frac{V}{2} = m_R\,RT_{R_1}, \qquad \frac{m_L}{m_R} = \frac{T_{R_1}}{T_{L_1}} = 0{,}625$$

c) Zustand 2

$$p_1V_{L_2} = m_L\,RT_2, \qquad p_1V_{R_2} = m_R\,RT_2,$$

$$\frac{V_{L_2}}{V_{R_2}} = \frac{m_L}{m_R} = \frac{T_{R_1}}{T_{L_1}} = 0{,}625$$

b)

$$V_{L_2} + V_{R_2} = V$$

$$V_{L_2} = \frac{m_L}{m_L + m_R}V = \frac{T_{R_1}}{T_{R_1} + T_{L_1}}V$$

$$T_2 = \frac{p_1V_{L_2}}{m_LR} = \frac{p_1V}{Rm_L}\frac{T_{R_1}}{T_{R_1} + T_{L_1}} = \frac{2T_{R_1}T_{L_1}}{T_{L_1} + T_{R_1}} = 307{,}69\,\mathrm{K}$$

Beispiel 8: Ein mit Wasserstoff gefüllter Ballon soll in einer Höhe von $z = 6000\,\mathrm{m}$ noch eine Tragfähigkeit von $G = 35\,\mathrm{kN}$ besitzen. Der Luftdruck in dieser Höhe beträgt $p_h = 0{,}5\,\mathrm{bar}$ und die Temperatur $\vartheta_h = 0\,°\mathrm{C}$.

- Wie groß ist für diese Verhältnisse bei Vernachlässigung des Eigengewichts der Ballonhülle das erforderliche Volumen des Ballons?
- Auf welchen Wert ändert sich die Tragfähigkeit des Ballons, wenn der Ballon mit Helium anstelle von Wasserstoff gefüllt wird?
- Welches Volumen hat der Ballon am Erdboden, wenn dort ein Druck von $p_0 = 1\,\mathrm{bar}$ und eine Temperatur von $\vartheta_0 = 20\,°\mathrm{C}$ herrschen?

$$\mathcal{R} = 8{,}314\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kmol\,K}},$$

$$\mathcal{M}_{\mathrm{H_2}} = 2\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{kmol}}, \quad \mathcal{M}_{\mathrm{He}} = 4\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{kmol}}, \quad \mathcal{M}_{\mathrm{Luft}} = 29\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{kmol}}$$

Lösung Beispiel 8: Archimedes: Auftrieb = Gewicht des verdrängten Fluids

$$G = g(m_L - m_{H_2}) = g\frac{p_hV_h}{\mathcal{R}T_h}(\mathcal{M}_L - \mathcal{M}_{H_2})$$

$$V_h = \frac{G\mathcal{R}T_h}{gp_h(\mathcal{M}_L - \mathcal{M}_{H_2})} = 6001{,}7\,\mathrm{m}^3$$

$$G_{He} = g(m_L - m_{He}) = g\frac{p_hV_h}{\mathcal{R}T_h}(\mathcal{M}_L - \mathcal{M}_{He}) = G_{H_2}\frac{\mathcal{M}_L - \mathcal{M}_{He}}{\mathcal{M}_L - \mathcal{M}_{H_2}} = 32{,}407\,\mathrm{kN}$$

$$V_0 = V_h\frac{p_h}{p_0}\frac{T_0}{T_h} = 3220{,}6\,\mathrm{m}^3$$

Beispiel 9: Die Tabelle enthält in der oberen Zeile den Druck eines Gases im Kolben eines Gasthermometers (konstantes Volumen), wenn der Kolben in Wasser beim Tripelpunkt eingetaucht ist. In der unteren Zeile sind die Drücke angegeben, die gemessen wurden, während der Gaskolben mit einem Material konstanter Temperatur umgeben war. Wie groß ist die Idealgastemperatur dieses Materials?

p_F	[mm Hg]	1000,0	750,0	500,0	250,0
p	[mm Hg]	1535,3	1151,6	767,82	383,95

Lösung Beispiel 9:

p_F [mmHg]	1000	750	500	250	0 (extraploiert)
p [mmHg]	1535,3	1151,6	767,82	382,95	
T	419,38	419,43	419,48	419,52	**419,56**

Beispiel 10: Ein adiabater Behälter wird durch eine reibungslos verschiebliche adiabate Wand in 2 Bereiche unterteilt. In beiden Teilen des Behälters befindet sich das gleiche ideale Gas. Für die beiden Teilbereiche sind folgende Daten bekannt:

$$\vartheta_A = 20°\text{C}, \quad \vartheta_\text{B} = 30°\text{C}$$
$$V_A = 3 \text{ m}^3, \quad V_B = 2{,}6 \text{ m}^3, \quad p_A = p_B = 3 \text{ bar}$$
$$m_A + m_B = 20 \text{ kg}$$

Berechnen Sie jeweils für beide Teilbehälter:

a) das Molvolumen (Volumen pro Mol) des idealen Gases.

b) die Anzahl der Mole des idealen Gases.

c) die Anzahl der eingeschlossenen Moleküle.

d) die Molmasse des eingeschlossenen Gases.

$N_A = 6{,}022.10^{23}$ mol^{-1}, $\mathcal{R} = 8{,}314$ kJ/kmol K

Lösung Beispiel 10:

a)

$$\tilde{v} = \mathcal{M}v = \frac{\mathcal{R}T}{p}, \qquad \tilde{v}_A = 8{,}124\,\text{dm}^3/\text{mol}, \qquad \tilde{v}_B = 8{,}401\,\text{dm}^3/\text{mol}$$

b)

$$n = \frac{V}{\tilde{v}}, \quad n_A = 369{,}3\,\text{mol} \qquad n_B = 309{,}5\,\text{mol}$$

c)

$$N = n \cdot N_A, \qquad N_\text{BereichA} = 2{,}224 \times 10^{26}, \quad N_\text{BereichB} = 1{,}864 \times 10^{26}$$

d)

$$(n_A + n_B)\mathcal{M} = m, \qquad \mathcal{M} = 29{,}46\frac{\text{kg}}{\text{kmol}}$$

Beispiel 11: Ein langer, an einer Seite geöffneter Metallzylinder (Kreiszylinder) ist von Gas bei einem Druck von $p_0 = 1$ bar und einer Temperatur von $T = 200$ K umgeben.
Der Metallzylinder wird nun so erwärmt, daß sich eine lineare Temperaturverteilung vom offenen Ende ($T = 200$ K) bis zum geschlossenen Ende ($T = 400$ K) einstellt. Nach dem Erreichen eines stationären Zustandes (das Gas innerhalb des Zylinders weist dieselbe Temperaturverteilung auf wie die Zylinderwand) wird das offene Ende des Zylinders verschlossen und der Metallzylinder solange sich selbst überlassen, bis er sich mit der Umgebung ($p = 1$ bar, $T = 200$ K) im thermischen und das Gas in seinem Inneren sich im thermodynamischen Gleichgewicht befindet. Berechnen Sie den Gleichgewichtsdruck p_1 im Zylinder.

Hinweis: Berechnen Sie zuerst die Gasmasse im Zylinder!
geg.: Gaskonstante R

Lösung Beispiel 11:

- Wir bezeichnen mit x die Ortskoordinate entlang der Zylinderachse, sodaß $x = 0$ beim offenen Ende und $x = L$ beim geschlossenen Ende gilt. Die Temperaturverteilung im Zylinder ist daher

$$T(x) = T_0 + (T_L - T_0)x/L.$$

- Lokale Betrachtung:
  Das System (Gas im Zylinder) ist nicht im thermodynamischen Gleichgewicht, da keine einheitliche Temperatur im gesamten System herrscht. Daher kann die ideale Gasgleichung nicht für das Gesamtsystem angewandt werden. Wir betrachten daher ein kleinen Abschnitt des Zylinders (Länge dx Querschnittsfläche A, Volumen daher dV). In einem hinreichend kleinen Abschnitt dx ist die Temperatur nahezu konstant. Es gilt:

$$\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}V = \rho\,A\,\mathrm{d}x, \quad \text{mit} \quad \frac{p_0}{\rho(x)} = R\,T(x)$$

  wobei $T(x)$ die lokale Temperatur an der Stelle x ist.

- Gesamtmasse:

$$\begin{aligned} m &= \int_0^L A\rho(x)\mathrm{d}x = \\ &= \frac{p_0\,A}{R}\int_0^L \frac{\mathrm{d}x}{T(x)} = \\ &= \frac{p_0\,A}{R}\int_0^L \frac{\mathrm{d}x}{T_0 + (T_L - T_0)x/L} = \\ &= \frac{p_0\,A\,L}{R(T_L - T_0)}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\eta}{\frac{T_0}{T_L - T_0} + \eta} = \\ &= \frac{p_0\,V}{R(T_L - T_0)}\ln\frac{T_L}{T_0} \end{aligned}$$

- Zustand 1

$$p_1 = m\frac{R\,T_0}{V} = p_0\frac{T_0}{T_L - T_0}\ln\left(1 + \frac{T_L - T_0}{T_0}\right)$$

  Hier $p_0 = 1\,\text{bar}$, $T_0 = 200\,\text{K}$, $T_L = 400\,\text{K}$

$$p_1 = 0{,}693\text{bar}$$

Beispiel 12: Luft ($c_p = 1073$ J/kgK, $c_v = 787$ J/kgK) wird quasistatisch aus einem Ausgangszustand "1" ($p_1 = 1$ bar, $\vartheta_1 = 20$ °C) mittels zweier verschiedener Prozesse in einen Zustand "2" ($p_2 = 5$ bar, $\vartheta_2 = 20$ °C) übergeführt.

Prozeß A: isotherme Kompression $1 \rightarrow 2$.
Prozeß B: isochore Wärmezufuhr $1 \rightarrow 1a$, isobare Wärmeabfuhr $1a \rightarrow 2$

Berechnen Sie die pro Masseneinheit zu- oder abgeführten Wärmemengen und Volumenänderungsarbeiten sowie die Änderung der inneren Energie der Luft für jeden Prozeß (und Teilprozess).

Lösung Beispiel 12:

$$w_{12} = -\int p\,\mathrm{d}v = -RT\int_{v_1}^{v_2}\frac{1}{v}\,\mathrm{d}v = -RT\ln v_2/v_1 = (c_p - c_v)T\ln p_2/p_1$$

$$w_{12} = 135{,}4\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}}$$

Da für ein ideales Gas $u = u(T)$ gilt und wegen $T_1 = T_2$ gilt

$$u_2 - u_1 = 0$$

1.Hauptsatz:

$$q_{12} = -w_{12}$$

Prozeß B)
Es gilt $p_2 = p_{1a}$ bzw. $v_{1a} = v_1$ somit $T_{1a} = T_1\frac{p_2}{p_1}$

$$w_{11a} = 0, \quad q_{11a} = c_v(T_{1a} - T_1) = c_vT_1\left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right) = 922{,}83\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}}$$

$$w_{1a2} = -p_2(v_2 - v_1) = -p_2v_2\left(1 - \frac{v_1}{v_2}\right) =$$

$$= (c_p - c_v)T_2\left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right) = 335{,}46\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}}$$

$$q_{1a2} = (T_2 - T_{1a})c_p = -1258{,}2\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}}$$

$$u_{1a} - u_1 = q_{11a} = 922{,}8\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}}$$

$$u_2 - u_{1a} = w_{1a2} + q_{1a2} = 335{,}4\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}} - 1258{,}2\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}} = -922{,}8\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}}$$

Beispiel 13: Stickstoff wird ausgehend vom Zustand 1 ($p_1 = 10\mathrm{bar}$, $T_1 = 270\mathrm{K}$) adiabat auf den Druck $p_2 = 3\mathrm{bar}$ gedrosselt. Danach wird der Stickstoff isobar wieder auf T_1 erwärmt.

Berechnen Sie unter der Annahme konstanter Stoffwerte:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_h = 0{,}23\mathrm{K/bar}, \quad c_p = 1{,}05\mathrm{kJ/kg\,K},$$

a) die Temperatur T_2 nach der Drosselung.

b) die Wärmemenge q_{23}, die notwendig ist, um den Stickstoff isobar auf die Temperatur T_1 zu erwärmen.

c) Wie groß ist T_2, wenn anstatt Stickstoff ein ideales Gas adiabat gedrosselt wird? (Begründung).

Lösung Beispiel 13: a)

$$T_2 = T_1 + \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_h \Delta p = 268{,}39\,\mathrm{K}$$

b)

$$q_{23} = c_p(T_1 - T_2) = 1{,}69\,\mathrm{kJ/kg}$$

c) $T_2 = T_1$, $q_{23} = 0$, da $h = h(T)$. Es gilt:

$$\mathrm{d}h = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p \mathrm{d}T + \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T \mathrm{d}p$$

und somit:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_h = -\frac{\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T}{\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p} = 0$$

Beispiel 14: Ein Kältemittel (CCl_2F_2) wird vom Siedezustand bei $p_1 = 6{,}5$ bar durch Drosselung auf den Druck $p_2 = 1$ bar (Zustand 2) gebracht. Anschließend wird das Mittel isobar in den Zustand gesättigten Dampfes (Zustand 3) übergeführt.

a) Wie groß sind die spezifischen Enthalpien h_2 und h_3?

b) Welcher Dampfgehalt x_2 liegt im Zustand 2 vor?

c) Welche spezifische Wärmemenge nimmt der Naßdampf beim Übergang von 2 nach 3 auf?

d) Zeichnen Sie die Zustände 1, 2 und 3 sowie die Zustandsänderungen $1 \to 2$ und $2 \to 3$ in ein p,v-Diagramm ein.

Dampftafel

ϑ °C	p bar	v' dm³/kg	v'' dm³/kg	h' kJ/kg	h'' kJ/kg	s' kJ/kgK	s'' kJ/kgK
-50	0,391	0,6468	386,15	54,27	229,26	0,8160	1,6002
-40	0,641	0,6588	243,95	63,19	234,13	0,8551	1,5882
-30	1,003	0,6717	160,79	72,20	238,13	0,8928	1,5786
-20	1,508	0,6854	109,82	81,34	243,13	0,9295	1,5708
-10	2,190	0,7002	77,30	90,61	284,30	0,9652	1,5645
-5	2,609	0,7081	65,49	95,29	250,55	0,9827	1,5617
0	3,053	0,7163	55,81	100,00	252,75	1,0000	1,5592
5	3,625	0,7249	47,82	104,74	254,89	1,0171	1,5569
10	4,233	0,7339	41,18	109,52	256,99	1,0339	1,5547
15	4,914	0,7433	35,61	114,33	259,02	1,0506	1,5527
20	5,674	0,7532	30,93	119,18	260,99	1,0671	1,5508
25	6,519	0,7673	26,96	124,07	262,89	1,0834	1,5490
30	7,453	0,7747	23,58	129,01	264,72	1,0996	1,5472
35	8,483	0,7864	20,68	133,99	266,45	1,1156	1,5455
40	9,615	0,7989	18,19	139,03	268,10	1,1316	1,5437
50	12,209	0,8265	14,16	149,32	271,06	1,1632	1,5401

Lösung Beispiel 14:

a) Lineare Interpolation:

$$h_1 = h'(p_1) \sim$$
$$h'(5{,}674\,\text{bar}) + (h'(6{,}519\,\text{bar}) - h'(5{,}674\,\text{bar}))\,\tfrac{6{,}5-5{,}674}{6{,}519-5{,}674} =$$
$$= 123{,}96\,\text{kJ/kg}$$
$$h_2 = h_1 = h'(p_1) = 123{,}96\,\text{kJ/kg},$$
$$h_3 = h''(p_2) \sim$$
$$h''(1{,}003\,\text{bar}) + (h''(0{,}641\,\text{bar}) - h''(1{,}003\,\text{bar}))\,\tfrac{1{,}00-1{,}003}{0{,}641-1{,}003} =$$
$$238{,}10\,\text{kJ/kg}$$

b)

$$h_1 = h'(p_2) \sim$$
$$h'(1{,}003\,\text{bar}) + (h'(0{,}641\,\text{bar}) - h'(1{,}003\,\text{bar}))\,\tfrac{1{,}000-1{,}003}{0{,}641-1{,}003} =$$
$$72{,}13\,\text{kJ/kg}$$
$$x_2 = \frac{h_2 - h'(p_2)}{h''(p_2) - h'(p_2)} = 0{,}313$$

c)

$$q_{23} = h_3 - h_2 = 114{,}14\,\text{kJ/kg}$$

Beispiel 15: Eine Metallkugel ($\beta_p = 5.10^{-5}\ K^{-1}$=konst., $\chi_T = 1{,}2.10^{-6}$ bar^{-1}=konst., $c_v = 1$ kJ/kgK) mit einem Rauminhalt von 1,5 l und einer Masse von 10 kg ist in ein **starres** Fundament eingebettet. Berechnen Sie die Änderungen der inneren Energie und der Enthalpie der Metallkugel, wenn ihr 5 kJ Wärme zugeführt wird!

Lösung Beispiel 15:

$$U_2 - U_1 = Q_{12} = 5\,\mathrm{kJ}$$

$$H_2 - H_1 = U_2 + p_2V_2 - (U_1 + p_1V_1) = U_2 - U_1 + (p_2 - p_1)V$$

$$0 = \beta\,\mathrm{d}T - \chi\,\mathrm{d}p$$

$$\Delta p = \frac{\beta}{\chi}\Delta T = \frac{\beta}{\chi}\frac{Q_{12}}{c_v m}$$

$$H_2 - H_1 = Q_{12} + \frac{\beta}{\chi}\frac{V}{c_v m}Q_{12} = \left(1 + \frac{\beta V}{\chi\, c_v m}\right)Q_{12} = 8{,}125\,\mathrm{kJ}$$

Beispiel 16: Gegeben ist ein mit flüssigem Wasser gefüllter Kessel ($V_k = 100$ l) in folgendem Zustand: $p_1 = 1$ bar; $\vartheta_1 = 20^o$ C; $c_w = 4{,}19$ kJ/kgK; $m_w = 100$ kg.
isobarer Volumensausdehnungskoeffizient: $\beta_w = 0{,}3{\cdot}10^{-3}$ K^{-1}=konst.;
isotherme Kompressibilität: $\chi_w = 45{\cdot}10^{-6}$ bar^{-1}=konst..

a) Auf welche Temperatur ϑ_2 darf das Wasser höchstens erwärmt werden, damit der zulässige Kesseldruck $p_{zul} = 40$ bar nicht überschritten wird?

b) Wie groß ist die Erhöhung der Enthalpie $H_2 - H_1$ des Wassers?

c) Wie groß ist die zur Temperatureröhung benötigte Wärmemenge Q_{12} ?

(Der Behälter kann wie ein starrer Kessel gerechnet werden.)

Lösung Beispiel 16:

a)

$$\Delta T = \frac{\chi}{\beta}\Delta p = 5{,}85\,\mathrm{K}$$

b)

$$U_2 - U_1 = mc_W\Delta T = 2451{,}15\,\mathrm{kJ}$$

$$H_2 - H_1 = U_2 - U_1 + p_2V_2 - p_1V_1 \sim U_2 - U_1 + (p_2 - p_1)V = 2841{,}15\,\mathrm{kJ}$$

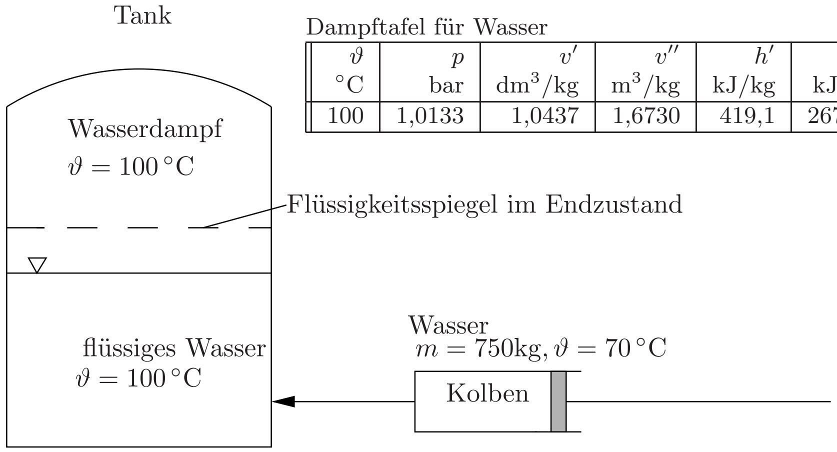
c)

$$Q_{12} \sim U_2 - U_1 = 2451{,}15\,\mathrm{kJ}$$

Beispiel 17: Ein starrer Tank mit einem Volumen $V_\mathrm{T} = 2{,}5\mathrm{m}^3$ beinhaltet ein Zweiphasengemisch aus flüssigem und dampfförmigem Wasser (Masse des flüssigen Wassers $m_{l,\mathrm{A}} = 500\mathrm{kg}$, $\vartheta_\mathrm{A} = 100°\mathrm{C}$, $p_\mathrm{A} = 1{,}0133\mathrm{bar}$).
Über einen Kolben werden dem Tank m_B=750 kg Wasser ($\vartheta_\mathrm{B} = 70°\mathrm{C}$, $p_\mathrm{B} = p_\mathrm{A}$, $h_\mathrm{B} = 293\mathrm{kJ/kg}$) zugeführt. Berechnen Sie die erforderliche Wärmemenge, die zu- oder abgeführt werden muß, damit im Tank Druck und Temperatur konstant bleiben.

Dampftafel für Wasser

ϑ °C	p bar	v' dm^3/kg	v'' m^3/kg	h' kJ/kg	h'' kJ/kg
100	1,0133	1,0437	1,6730	419,1	2676,0



Lösung Beispiel 17:

- 1. Hauptsatz für das System *Tank*

$$U_2 - U_1 = Q_{12} + m_B h_B$$

$$U_2 - U_1 = (H_2 - pV_T) - (H_2 - pV_T) = H_2 - H_1$$

- Zustand 1:

$$U_1 = H_1 - pV_T$$

$$V_1' = m_{A,l} v' = 0{,}5219\,\mathrm{m}^3$$

$$m_1'' = (V_T - V_1')/v'' = 1{,}1824\,\mathrm{kg}$$

$$H_1 = m_1 h' + m_1'' h'' = 212{,}7\,\mathrm{MJ}$$

- Zustand 2:

$$m_2 = m_1 + m_B = 1251{,}18\,\mathrm{kg}$$

$$v_2 = V_T/m_2 = 0{,}001998\,\mathrm{m}^3/\mathrm{kg}$$

$$x_2 = \frac{v_2 - v'}{v'' - v'} = 5{,}7 \times 10^{-4}$$

$$H_2 = m_2(h'(1 - x_2) + h'' x_2) = 525{,}9\,\mathrm{MJ}$$

-

$$Q_{12} = H_2 - (H_1 + m_B h_B) = 93{,}5\,\mathrm{MJ}$$

Hinweis: Man kann das geschlossenes System (Wasser im Tank und Kolben) betrachten: Isobare Kompression des Gesamtsystems: daher:

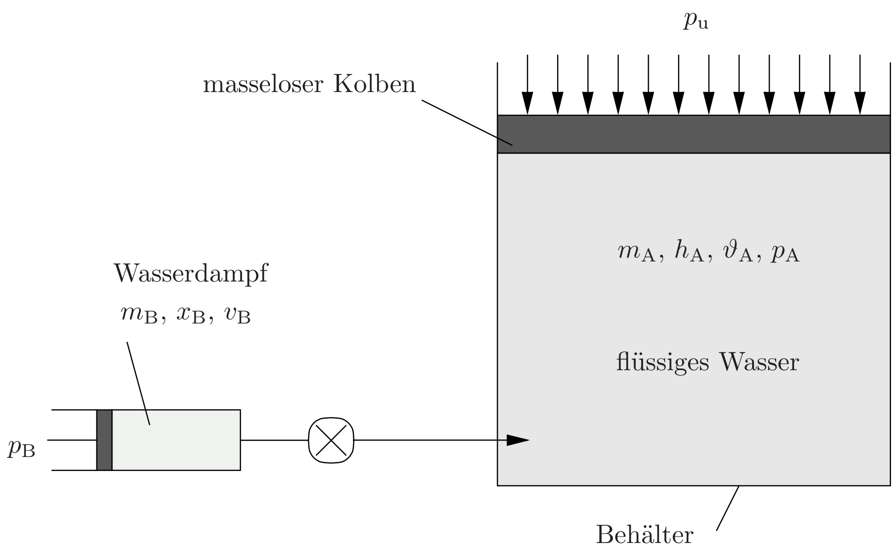
$$Q_{12} = H_{2,\mathrm{ges}} - H_{1,\mathrm{ges}}, \quad H_{1,\mathrm{ges}} = H_1 + m_B h_B, \quad H_{2,\mathrm{ges}} = H_2$$

Beispiel 18: Zur Bestimmung des Dampfgehaltes eines Gemisches aus flüssigem und dampfförmigem Wasser ($m_{\mathrm{B}} = 9$ kg) wird dieses Gemisch mit einem Druck $p_{\mathrm{B}} = p = 1.0133$ bar einem Tank zugeführt. In diesem Tank befindet sich in einem Ausgangszustand 1 flüssiges Wasser ($m_{\mathrm{A},1} = 136$ kg, $\vartheta_{\mathrm{A},1} = 10$ °C, $p_{\mathrm{A},1} = 1{,}0133$ bar). Der Tank ist mittels eines reibungsfrei beweglichen, masselosen Kolbens gegen die Umgebung abgeschlossen. Am Ende des Versuches (Zustand 2) findet man im Tank flüssiges Wasser mit einer Temperatur $\vartheta_{A,2} = 40$ °C vor.
Bestimmen Sie den Dampfgehalt x_B und das spezifische Volumen v_B des zugeführten Wasser-Dampf Gemisches.

Hinweis: Etwaiger Wärmeaustausch mit der Umgebung ist zu vernachlässigen.
Flüssiges Wasser hat eine spezifische Wärmekapazität $c_{p,\mathrm{W}} = 4{,}2$ kJ/kgK.

Dampftafel für Wasser

ϑ	p	v'	v''	h'	h''	r
°C	bar	dm^3/kg	m^3/kg	kJ/kg	kJ/kg	kJ/kg
100	1,0133	1,0437	1,6730	461,1	2676,0	2256,9



Lösung Beispiel 18: 1. Hauptsatz

$$U_2 - U_1 = m_{\mathrm{B}} h_{\mathrm{B}} - p\Delta V$$

$$H_2 - H_1 = m_{\mathrm{B}} h_{\mathrm{B}}$$

$$H_1 = m_{\mathrm{A},1} c_{p,\mathrm{W}} \vartheta_{\mathrm{A},1} = 5{,}712\,\mathrm{MJ}$$

$$H_2 = (m_{\mathrm{A},1} + m_{\mathrm{B}}) c_{p,\mathrm{W}} \vartheta_{\mathrm{A},2} = 24{,}36\,\mathrm{MJ}$$

$$h_{\mathrm{B}} = \frac{H_2 - H_1}{m_{\mathrm{B}}} = 2{,}072\,\mathrm{MJ/kg}$$

$$x_{\mathrm{B}} = \frac{h_{\mathrm{B}} - h'}{h'' - h'} = 0{,}73$$

$$v_{\mathrm{B}} = 1{,}222\,\mathrm{m}^3/\mathrm{kg}$$

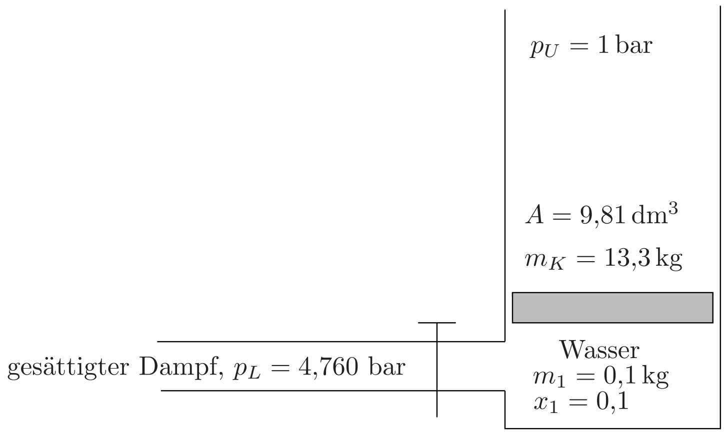
Beispiel 19: In einem zylindrischen Gefäß, das durch einen reibungsfrei beweglichen Kolben (Querschnittsfläche $A = 9{,}81\ \text{dm}^2$, Masse $m_K = 13{,}3$ kg) verschlossen ist, befindet sich Wasser als Zweiphasengemisch (m_1=0,1 kg, $x_1 = 0{,}3$). Der Umgebungsdruck p_u beträgt 1 bar. Über ein Ventil wird eine Dampfleitung (gesättigter Dampf mit dem Druck $p_L = 4{,}760$ bar) angeschlossen. Das Ventil wird geöffnet und wieder geschlossen. Nach dem Erreichen des thermodynamischen Gleichgewichts beträgt der Dampfgehalt im Behälter $x_2 = 0{,}5$.

a) Geben Sie Druck, Temperatur und Volumen des Wassers im Behälter vor dem Öffnen des Ventils an.

b) Wie groß ist die Wassermasse im Behälter nach dem Schließen des Ventils?

c) Um welche Höhe wird der Kolben angehoben?

Hinweis: Der Behälter und die Dampfleitung sind als adiabat zu betrachten.



Dampftafel für Wasser

ϑ °C	p bar	v' dm³kg	v'' m³/kg	h' kJ/kg	h'' kJ/kg	r kJ/kg	s' kJ/kgK	s'' kJ/kgK
100	1,0133	1,0437	1,6730	419,1	2676,0	2256,9	1,3069	7,3554
110	1,4327	1,0519	1,2010	461,3	2691,3	2230,0	1,4185	7,2388
120	1,9854	1,0606	0,8915	503,7	2706,0	2202,3	1,5276	7,1293
130	2,701	1,0700	0,6681	546,3	2719,9	2173,6	1,6344	7,0261
140	3,614	1,0800	0,5085	589,1	2733,1	2144,0	1,7390	6,9284
150	4,760	1,0908	0,3924	632,2	2745,4	2112,2	1,8416	6,8358
160	6,181	1,1022	0,3068	675,5	2756,7	2081,2	1,9425	6,7475
170	7,920	1,1145	0,2426	719,1	2767,1	2048,0	2,0416	6,6630
180	10,027	1,1275	0,1938	763,1	2776,3	2013,2	2,1393	6,5819
190	12,551	1,1415	0,1563	807,5	2784,3	1976,8	2,2356	6,5036
200	15,549	1,1565	0,1272	852,4	2790,9	1938,5	2,3307	6,4278

Lösung Beispiel 19:

a)

$$p = p_u + \frac{m_K g}{A_K} = 1{,}0133\,\text{bar}$$

b)

$$U_2 - U_1 = m_L h_L - p\Delta V$$

$$H_2 - H_1 = m_L h_L$$

$$h_1 = h'(1 - x_1) + h'' x_1 = 1096{,}2\,\text{kJ/kg}$$

$$h_2 = h'(1 - x_2) + h''x_2 = 1547{,}6\,\mathrm{kJ/kg}$$
$$h_L = 2745{,}4\,\mathrm{kJ/kg}$$
$$(m_1 + m_L)h_2 - m_1 h_1 = m_L h_L$$
$$m_L = m_1 \frac{h_2 - h_1}{h_L - h_2} = 0{,}038\,\mathrm{kg}$$

c)

$$V_2 = (v'(1 - x_2) + v''x_2)m_2 = 0{,}116\,\mathrm{m}^3$$
$$V_1 = (v'(1 - x_1) + v''x_1)m_1 = 0{,}0503\,\mathrm{m}^3$$
$$\Delta h = \frac{V_2 - V_1}{A} = 0{,}67\,\mathrm{m}$$

Beispiel 20: In einem Kreisprozeß durchläuft Wasser ausgehend vom Zustand siedender Flüssigkeit folgende Teilprozesse:

$1 \rightarrow 2$ Adiabate Drosselung von $p_1 = 23{,}198$bar auf $p_2 = 6{,}181$bar;

$2 \rightarrow 3$ Teilweise, isobare Verdampfung; item[$3 \rightarrow 4$] Irreversible, adiabate Kompression bis p_1;

$4 \rightarrow 1$ Vollständige, isobare Kondensation.

1. Skizzieren diesen Kreisprozeß in einem T,s-Diagramm. Zeichnen Sie die zu- bzw. abgeführten Wärmemengen ein.
2. Berechnen Sie die Änderung der spezifischen inneren Energie bei der Zustandsänderung von Zustand 1 nach Zustand 2: $u_2 - u_1$.
3. Wie groß sind h_3 und h_4, wenn der Kreisprozeß (Kältemaschine) eine Leistungszahl von $\varepsilon_\mathrm{K} = 3.11$ aufweist und pro kg Wasser eine Arbeit von $w_0 = 500$kJ/kg aufgewendet wird?
4. Berechnen Sie die pro kg Wasser zu- bzw. abgeführten Wärmemengen q_zu bzw. q_ab.

Dampftafel für Wasser

ϑ °C	p bar	v' dm^3/kg	v'' m^3/kg	h' kJ/kg	h'' kJ/kg	r kJ/kg
160	6,181	1,1022	0,3068	675,5	2756,7	2081,2
220	23,198	1,190	0,08604	943,7	2799,9	1856,2

Lösung Beispiel 20:

$$h_1 = h_2$$
$$u_2 - u_1 = (h_2 - p_2 v_2) - (h_1 - p_1 v_1) = p_1 v_1 - p_2 v_2$$
$$h_1 = 943{,}7\,\mathrm{kJ/kg}, \quad v_1 = 1{,}190 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^3, p_1 = 2{,}3198 \times 10^6\,\mathrm{Pa}$$
$$h_2 = 943{,}7\,\mathrm{kJ/kg}, x_2 = 0{,}1289, \quad v_2 = 40{,}44 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^3$$
$$p_2 = 6{,}181 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$$
$$u_2 - u_1 = -22{,}24\,\mathrm{kJ/kg}$$
$$q_{zu} = h_3 - h_2 = \varepsilon_K w_0 = 1555\,\mathrm{kJ/kg},$$
$$q_{ab} = h_4 - h_1 = q_{zu} + w_0 = 2055\,\mathrm{kJ/kg}$$
$$h_3 = 2499\,\mathrm{kJ/kg}, \quad h_4 = h_1 + q_{ab} = 2999\,\mathrm{kJ/kg}$$

Beispiel 21: Eine zwischen der Umgebung und dem Kühlraum einer Gefriertruhe (Oberfläche $A = 2$ m^2) arbeitende Carnot-Kältemaschine sorgt dafür, daß die Kühlraumtemperatur trotz der durch die Wände strömenden Wärme konstant bleibt. Der Wärmestrom kann durch die Gleichung

$$\dot{Q} = \frac{A\lambda}{d}\Delta T$$

beschrieben werden (Wärmeleitfähigkeit $\lambda = 0{,}25$ W/mK, Dicke $d = 2$ cm, Temperaturdifferenz ΔT).

Welche Kühlraumtemperatur ϑ_K (= Temperatur der Wandinnenseite) stellt sich ein, wenn bei einer Umgebungstemperatur von $\vartheta_\mathrm{U} = 20°\mathrm{C}$ (= Temperatur der Wandaußenseite) der Carnot-Maschine pro Sekunde 200 J an elektrischer Arbeit zugeführt werden?

Lösung Beispiel 21: 1. Hauptsatz Kühlraum:

$$|\dot{Q}| = \dot{Q}_{zu} = \frac{A\lambda}{d}(T_U - T_K)$$

1. Haupsatz Carnotmaschine:

$$\dot{W}_0 + \dot{Q}_{zu} - |\dot{Q}_{ab}| = 0,$$

$$\frac{|\dot{Q}_{ab}|}{\dot{Q}_{zu}} = \frac{T_{ab}}{T_{zu}},$$

Einsetzen in 1.HS für Carnotmaschine:

$$\dot{Q}_{zu}\left(\frac{T_U}{T_K} - 1\right) = \dot{W}_0$$

$$\frac{A\lambda}{d}(T_U - T_K)^2 = T_K\dot{W}_0$$

$$(T_U - T_K)^2 = 2T_K T_0, \quad \text{mit} \quad T_0 = \frac{\dot{W}_0 d}{2A\lambda} = 4\,\mathrm{K}$$

$$T_K = (T_U + T_0) \pm \sqrt{T_0^2 + 2T_0 T_U}$$

- wegen Kältemaschine, bei '+' arbeitet C als Wärmepumpe!

$$\vartheta_K = -24{,}59\,°\mathrm{C}$$

Beispiel 22: Zwei feste Körper "A" und "B" mit den konstanten Wärmekapazitäten C_A und C_B ($[C] =$ J/K) sind im thermodynamischen Gleichgewicht bei Temperaturen $T_{\mathrm{A},1}$ und $T_{\mathrm{B},1}$.

Berechnen Sie (jeweils als Funktion von C_A, C_B, $T_{\mathrm{A},1}$ und $T_{\mathrm{B},1}$) die Endtemperatur T_2, sowie die Änderung der Entropie der Körper wenn sie

a) über eine reversibel arbeitende Maschine,

b) über eine diatherme Wand

verbunden werden, und sich ein gemeinsamer Endzustand eingestellt hat.

Lösung Beispiel 22: a) Das Gesamtsystem (Körper A, Körper B, masselose Carnotmaschine C) ist abgeschlossen adiabat. Da nur reversible Prozesse ablaufen gilt $\mathrm{d}S = 0$ bzw. $S = const.$ S_A bzw. S_B seien die Entropien der Teilsysteme A bzw. B. Es gilt daher

$$\mathrm{d}S = \mathrm{d}S_A + \mathrm{d}S_B = 0$$

$$\mathrm{d}S_A = \frac{\mathrm{d}Q}{T_A} = C_A\frac{\mathrm{d}T_A}{T_A}, \qquad S_{A,2} - S_{A,1} = C_A \ln\frac{T_2}{T_{A,1}}$$

$$\mathrm{d}S_B = \frac{\mathrm{d}Q}{T_B} = C_B\frac{\mathrm{d}T_B}{T_B}, \qquad S_{B,2} - S_{B,1} = C_B \ln\frac{T_2}{T_{B,1}}$$

$$S_2 - S_1 = S_{A,2} - S_{A,1} + S_{B,2} - S_{B,1} = C_A \int_{T_{A,1}}^{T_2} \frac{\mathrm{d}T_A}{T_A} + C_B \int_{T_{B,1}}^{T_2} \frac{\mathrm{d}T_B}{T_B} =$$

$$= C \ln \left(\frac{T_2}{T_{A,1}}\right)^{C_A/C} \left(\frac{T_2}{T_{B,1}}\right)^{C_B/C} = 0, \quad \text{mit} \quad C = C_A + C_B,$$

$$T_2 = T_{A,1}^{C_A/C} T_{B,1}^{C_B/C}$$

$$W_0 = U_2 - U_1 = C_A(T_2 - T_{A,1}) + C_B(T_2 - T_{B,1} < 0$$

Spezialfall:

$$C_A = C_B: \quad T_2 = \sqrt{T_{A,1}T_{B,1}}, \quad W_0 = -C_A\left(\sqrt{T_{A_1}} - \sqrt{T_{B_1}}\right)^2$$

b) Aus 1.HS $U_2 = U_1$

$$C_A(T_{A,1} - T_*) + C_B(T_{B,1} - T_*) = 0$$

$$T_* = \frac{C_A T_{A_1} + C_B T_{B,1}}{C_A + C_B}$$

$$\Delta S = S_* - S_1 = C_A \ln \frac{T_*}{T_{A,1}} + C_B \ln \frac{T_*}{T_{B,1}} = C \ln \frac{\frac{C_A}{C} T_{A_1} + \frac{C_B}{C} T_{B_1}}{T_{A,1}^{C_A/C} T_{B,1}^{C_B/C}}$$

Spezialfall: $C_A = C_B$, $T_* = (T_{A,1} + T_{B,1})/2$, $\Delta S = 2C_A \ln \frac{T_{A,1}+T_{B,1}}{2\sqrt{T_{A,1}T_{B,1}}} \geq 0$

Beispiel 23: Ein Stück Eis der Masse $m_\mathrm{E} = 2$kg und der Temperatur $\vartheta_{1\mathrm{E}} = -10$ °C wird bei konstantem Druck $p_1 = 1$bar in Wasser mit der Masse $m_\mathrm{W} = 6$kg und der Temperatur $\vartheta_{1\mathrm{W}} = 17$°C gegeben.

$$c_{p,\mathrm{E}} = 2{,}2\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg\,K}}; \quad c_{p,\mathrm{W}} = 4{,}2\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg\,K}}; \quad l_0 = 334\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}}$$

a) Berechnen Sie die Massen von Wasser und Eis im Endzustand und geben Sie die Endtemperatur an.

b) Berechnen Sie die Entropieänderung des Systems Wasser - Eis.

Etwaiger Wärmeaustausch mit der Umgebung kann vernachlässigt werden.

Lösung Beispiel 23:

$$H_{E,1} = m_{E,1}(c_{p,E}\vartheta_{E,1} - l_0) = -712\,\mathrm{kJ}$$

$$H_{W,1} = m_{w,1}c_{p,W}\vartheta_{W,1} = 428{,}4\,\mathrm{kJ}$$

$$H_2 = H_1 = H_{E,1} + H_{W,1} = -283{,}6\,\mathrm{kJ}$$

$$h_2 = H_2/m_2 = -35{,}45\mathrm{kJ/kg} > -l_0 \to \vartheta_2 = 0\,°\mathrm{C}$$

$$H_2 = -m_{E,2}l_0 \to m_{E,2} = 0{,}849\,\mathrm{kg} < m_{Ges} = m_{E,1} + m_{W,1}$$

Entropieänderung: Teilprozeße

1. Aufwärmen des Eises von $T_{E,1}$ auf T_2:
   $\Delta S^{(1)} = m_{E,1}c_{P,E} \ln \frac{T_2}{T_{E,1}} = 0{,}1641\,\mathrm{kJ/K}$

2. Abkühlen des Wassers $T_{W,1}$ auf T_2: $\Delta S^{(1)}$
   $\Delta S^{(2)} = m_{W,1}c_{P,W} \ln \frac{T_2}{T_{W,1}} = -1{,}5215\,\mathrm{kJ/K}$

3. Teilweises Schmelzen des Eises $m_{E_1} - m_{E_2}$: $\Delta S^{(1)}$
   $\Delta S^{(3)} = -(m_{E,2} - m_{E,1})\frac{l_0}{T_2} = 1{,}407\,\mathrm{kJ/K}$

$\Delta S = \Delta S^{(1)} + \Delta S^{(2)} + \Delta S^{(3)} = 0{,}050\,\mathrm{kJ/K} > 0.$

Beispiel 24: Drei feste Körper mit gleicher, konstanter Wärmekapazität C[J/K] können mittels beliebig gekoppelter Wärmekraftmaschinen und Wärmepumpen Energie austauschen. Die Körper einschließlich der Maschinen sind von der Umgebung vollkommen isoliert.

Folgende Zustände sind durch die Körpertemperaturen gegeben:

Zustand 0:	$T_1 = 100$K	$T_2 = 300$K	$T_3 = 300$K
Zustand 1:	$T_1 = 200$K	$T_2 = 200$K	$T_3 = 300$K
Zustand 2:	$T_1 = 150$K	$T_2 = 150$K	$T_3 = 400$K
Zustand 3:	$T_1 = 200$K	$T_2 = 270$K	$T_3 = 260$K
Zustand 4:	$T_1 = 100$K	$T_2 = 170$K	$T_3 = 430$K

a) Welche der Zustände 1 bis 4 sind ausgehend vom Zustand 0 erreichbar?

b) In welcher Reihenfolge können die Zustände 0,1,4 angenommen werden? (Begründung !)

Lösung Beispiel 24:

Zustand	$T_1 + T_2 + T_3$ [K]	$T_1T_2T_3$ [K^3]
0	700	9×10^6
1	700	12×10^6
2	700	9×10^6
3	730	$14{,}04 \times 10^6$
4	700	$7{,}31 \times 10^6$

Zustandsänderung $a \to b$:

Änderung der inneren Energie:

$$U^{(b)} - U^{(a)} = C(T_1^{(b)} - T_1^{(a)}) + C(T_2^{(b)} - T_2^{(a)}) + C(T_3^{(b)} - T_3^{(a)})$$

Änderung der Entropie:

$$S^{(b)} - S^{(a)} = C \ln \frac{T_1^{(b)}T_2^{(b)}T_3^{(b)}}{T_1^{(a)}T_2^{(a)}T_3^{(a)}}$$

Für eine erlaubte Zustandsänderung muß daher nach dem 1.HS $T_1 + T_2 + T_3$ constant bleiben, nach dem zweiten Haupsatz muß $T_1T_2T_3$ entweder gleich bleiben (reversibler Prozeß) oder zunehmen (irreversibler Prozeß.

Folgende Zusatandsänderungen sind daher möglich:

$$4 \to 0 \to 2 \to 1$$

$$4 \to 2 \to 0 \to 1$$

a) 1 (irreversible ZÄ), 2, reversible ZÄ,
b) $4 \to 0 \to 1$

Beispiel 25: Berechnen Sie die Entropieänderungen von 1 kg Wasser, wenn

a) das Wasser ausgehend von $\vartheta_1 = 20°$C bei Atmosphärendruck in Dampf mit einer Temperatur $\vartheta_4 = 250°$C umgewandelt wird;

b) das Wasser ausgehend von $\vartheta_1 = 20°$C bei Atmosphärendruck in Eis mit einer Temperatur $\vartheta_4 = -10°$C umgewandelt wird.

Gegeben: $c_{\mathrm{H_2O}} \approx 4{,}2$ kJ/kgK; $c_{\mathrm{Eis}} \approx 2{,}1$ kJ/kgK; $c_{p,\mathrm{Dampf}} \approx a{+}bT$; $a = 1{,}68$ kJ/kgK; $b = 0{,}552.10^{-3}$ kJ/kgK^2; $l_0 \approx 335$ kJ/kg; $r_{100} \approx 2257$ kJ/kg.

Lösung Beispiel 25:
a)

$$\Delta S = m\int_{T_1}^{T^*}\frac{c_{p,W}}{T}\mathrm{d}T + m\frac{r_{100}}{T^*} + m\int_{T^*}^{T^4}\frac{c_{p,D}}{T}\mathrm{d}T =$$

$$m\left(c_{P,W}\ln\frac{T^*}{T_1} + \frac{r_{100}}{T^*} + a\ln\frac{T_4}{T^*} + b(T_4 - T^*)\right) = 7{,}316\,\mathrm{kJ/K}$$

b)

$$\Delta S = m\left(c_{p,W}T\ln\frac{T_0}{T_1} - m\frac{l_0}{T_0} + c_{p,E}\ln\frac{T_4}{T_0}\right) = -1{,}602\,\mathrm{kJ/K}$$

Beispiel 26: Eine Carnot-Wärmekraftmaschine arbeitet zwischen einem Energiespeicher "1" mit der Temperatur $T_1 = 670$ K und einem endlichen Körper der Temperatur $T' = 220$ K. Die Temperatur dieses Körpers wird mittels einer Carnot-Wärmepumpe konstant gehalten. Die Wärmepumpe führt ihre Abwärme einem Energiespeicher "2" mit der Temperatur $T_2 = 270$ K zu, und wird mit einem Teil der von der Wärmekraftmaschine verrichteten Arbeit W_{WK} betrieben.
Wie groß ist die Prozeßnettoarbeit W, die der Wärmepumpe zugeführte Arbeit W_{WP}, und die von der Wärmekraftmaschine verrichtete Arbeit W_{WK}, wenn der Wärmekraftmaschine $Q_1 = 100$ kJ Wärme zugeführt werden?

Lösung Beispiel 26: a) Q' Abwärme von WK:

$$Q' = Q_1 T'/T_1 = 32{,}84\,\mathrm{kJ}$$

$$W_{\mathrm{WK}} = 67{,}16\,\mathrm{kJ}$$

$$Q_2 = Q'T_2/T' = Q_1\frac{T'T_2}{T_1T'} = Q_1\frac{T_2}{T_1} = 40{,}30\,\mathrm{kJ}$$

$$W_{\mathrm{WP}} = |Q_2 - Q'| = 7{,}46\,\mathrm{kJ}$$

$$W = 59{,}70\,\mathrm{kJ}$$

b) Wärmekraftmaschine zwischen 1 und 2:

$$Q_{ab} = Q_1\frac{T_2}{T_1} = 40{,}30\,\mathrm{kJ}$$

$$W = Q_1 - Q_{ab} = 59{,}70\,\mathrm{kJ}$$

Beispiel 27: In einem stationären Kompressionsprozeß wird ein Gemisch zweier idealer Gase A ($\mathcal{M}_\mathrm{A} = 29\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{kmol}}$, Massenanteil $x_\mathrm{A} = 0{,}3$) und B ($\mathcal{M}_\mathrm{B} = 35\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{kmol}}$) konstanter spezifischer Wärmekapazitäten reversibel adiabat vom Zustand 1 ($v_1 = 0{,}74\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}},\ T_1 = 280\,\mathrm{K}$) auf den Zustand 2 ($p_2 = 2\,\mathrm{bar},\ T_2 = 345\,\mathrm{K}$) verdichtet.

a) Berechnen Sie den Isentropenexponenten κ des Gasgemisches (universelle Gaskonstante $\mathcal{R} = 8314\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kmol\ K}}$).

b) Welche technische Arbeit pro Zeit $\dot{W}_t$ wird benötigt, um den Kompressor stationär mit dem Massenstrom $\dot{m} = 0{,}75\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$ zu betreiben, wenn kinetische und potentielle Energien vernachlässigt werden können?

Lösung Beispiel 27:

- Berechnung der Molmasse Daltonsches Gesetz:

$$p_A V = m_A \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}_A} T, \qquad p_B V = m_B \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}_B} T$$

$$pV = (p_A + p_B)V = \left(\frac{m_A}{\mathcal{M}_A} + \frac{m_B}{\mathcal{M}_B} \right) \mathcal{R} T = m \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}} T$$

$$\frac{1}{\mathcal{M}} = \frac{x_A}{\mathcal{M}_A} + \frac{1 - x_A}{\mathcal{M}_B}$$

$$\mathcal{M} = 32{,}95 \, \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}, \quad R = 252{,}32 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$$

-

$$v_2 = \frac{R T_2}{p_2} = 0{,}435 \, \frac{m^3}{\text{kg}}$$

- Isentropenexponent

$$T_1 v_1^{\kappa - 1} = T_2 v_2^{\kappa - 1}$$

$$\kappa = 1 + \frac{\ln(T_2/T_1)}{\ln(v_1/v_2)} = 1{,}393$$

- Wärmekapazitäten

$$R = c_p - c_v = c_p(1 - 1/\kappa), \quad c_p = \frac{\kappa R}{\kappa - 1} = 894{,}35 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$$

- Energiesatz

$$0 = \dot{W}_t + \dot{m}(h_1 - h_2)$$

$$\dot{W}_t = \dot{m}(h_2 - h_1) = \dot{m} c_p (T_2 - T_1) = 43{,}6 \frac{\text{kJ}}{\text{s}}$$

Beispiel 28: Wieviel Wärme Q_{12} kann feuchter Luft der Trockenluftmasse $m = 50$ kg und der Temperatur $\vartheta_1 = 20°$C mit einem Wassergehalt $x = 0{,}008$ bis zum Eintritt der Sättigung ($p = 1$ bar) entzogen werden?

$$c_{pL} = 1 \text{ kJ/kgK}, \quad \mathrm{c_{pD}} = 1{,}86 \text{ kJ/kgK}$$

$$x_D = 0{,}622 \frac{p_D}{p - p_D}$$

Lösung Beispiel 28: Dampfdruck

$$p_{D,1} = \frac{x_D p}{0{,}622 + x_D} = 12{,}698 \, \text{mbar}$$

Zustand 2 charakterisiert durch $p_{D,2} = p_{S,2}$. Bei isobarer Abkühlung bleibt Partialdruck des Wasserdampfes gleich. Aus Dampftafel folgt $\vartheta_2 = 10{,}45\,°\text{C}$

$$Q_{12} = H_2 - H_1 = m_L(c_{p,L} + x_D c_{p,D})(\vartheta_2 - \vartheta_1) = -484{,}6 \, \text{kJ}$$

Beispiel 29: Zwei Wohnräume mit den Grundflächen $A_1 = 25\text{m}^2$ bzw. $A_2 = 12\text{m}^2$ und der gemeinsamen Raumhöhe $h = 2{,}5\text{m}$ werden durch Öffnen einer Türe miteinander in Kontakt gebracht. Vor dem Öffnen der Türe beträgt im ersten Raum die relative Luftfeuchtigkeit $\varphi_1 = 70\%$ bei einer Temperatur von $\vartheta_1 = 25°\text{C}$ und im zweiten Raum beträgt die relative Luftfeuchtigkeit $\varphi_2 = 45\%$ bei einer Temperatur von $\vartheta_2 = 18°\text{C}$. Der Druck ist in beiden Räumen gleich $p = 1\text{bar}$.

a) Berechnen Sie den Partialdruck p_L der trockenen Luft und den Partialdruck p_D des Dampfes in beiden Räumen.

b) Berechnen Sie die Masse der trockenen Luft, den Dampfgehalt und die spezifische Enthalpie vor dem Öffnen der Türe in beiden Räumen.

c) Berechnen Sie den Dampfgehalt, die spezifische Enthalpie und die Gleichgewichtstemperatur nach dem Öffnen der Türe, wenn nach vollständiger Durchmischung thermodynamisches Gleichgewicht vorhanden ist.

Gegeben: $c_{p,\text{Luft}} = 1\text{kJ/kgK}$, $c_{p,\text{Dampf}} = 1{,}86\text{kJ/kgK}$, $r_0 = 2501{,}6\text{kJ/kg}$, $\mathcal{M}_\text{Luft} = 29\text{kg/kmol}$, $\mathcal{R} = 8314\text{J/kmolK}$.

Lösung Beispiel 29: a) $p_\text{D} = \varphi p_s$; Gesetz von Dalton: $p_\text{L} = p - p_\text{D}$.

$$\underline{p_{\text{D},1}} = 0.7 \cdot 31.66 = \underline{22.162\text{mbar}}; \quad \underline{p_{\text{L},1} = 977.84\text{mbar}}$$

$$\underline{p_{\text{D},2}} = 0.45 \cdot 20.84 = \underline{9.377\text{mbar}}; \quad \underline{p_{\text{L},2} = 990.62\text{mbar}}$$

b) $p_\text{L} V = m_\text{L} \dfrac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}} T$; $h_{1+x} = (c_{p,\text{L}} + x_\text{D} c_{p,\text{D}})\vartheta + x_\text{D} r_0$.

$$\underline{m_{\text{L},1}} = \frac{97784 \cdot 25 \cdot 2.5}{(273.15 + 25)8314/29} = \underline{71.50\text{kg}}, \quad \underline{x_{\text{D},1}} = 0.622 \cdot \frac{22.16}{977.8} = \underline{0.0141},$$

$$\underline{m_{\text{L},2}} = \frac{99062 \cdot 12 \cdot 2.5}{(273.15 + 18)8314/29} = \underline{35.60\text{kg}}, \quad \underline{x_{\text{D},2}} = 0.622 \cdot \frac{9.38}{990.6} = \underline{0.00589}.$$

$$\underline{h_{1+x,1}} = (1 + 0.0141 \cdot 1.86) \cdot 25 + 2501.6 \cdot 0.0141 = \underline{60.93\text{kJ/kg}},$$

$$\underline{h_{1+x,2}} = (1 + 0.00589 \cdot 1.86) \cdot 18 + 2501.6 \cdot 0.00589 = \underline{32.93\text{kJ/kg}}.$$

c) Im isobaren Mischungsvorgang bleibt die Enthalpie konstant. Der Dampfgehalt folgt aus der Massenbilanz.

$$\underline{x_{\text{D},3}} = \frac{m_{\text{D},3}}{m_{\text{L},3}} = \frac{x_{\text{D},1} m_{\text{L},1} + x_{\text{D},2} m_{\text{L},2}}{m_{\text{L},1} + m_{\text{L},2}} = \frac{1.218}{107.1} = \underline{0.0114}$$

$$H_3 = H_1 + H_2 \;\Rightarrow\; h_{1+x,3} m_{\text{L},3} = h_{1+x,1} m_{\text{L},1} + h_{1+x,2} m_{\text{L},2}; \quad \underline{h_{1+x,3} = 51.62\text{kJ/kg}}$$

Aus $h_{1+x,3}$ kann nun, bei bekanntem Dampfgehalt, die Temperatur berechnet werden,

$$\underline{\vartheta_3} = \frac{h_{1+x,3} - x_{\text{D},3} r_0}{c_{p,\text{L}} + x_{\text{D},3} c_{p,\text{D}}} = \underline{22.62°\text{C}}.$$

c) Im isobaren Mischungsvorgang bleibt die Enthalpie konstant. Der Dampfgehalt folgt aus der Massenbilanz.

$$\underline{x_{\text{D},3}} = \frac{m_{\text{D},3}}{m_{\text{L},3}} = \frac{x_{\text{D},1} m_{\text{L},1} + x_{\text{D},2} m_{\text{L},2}}{m_{\text{L},1} + m_{\text{L},2}} = \frac{1.216}{107.1} = \underline{0.0114}$$

$$H_3 = H_1 + H_2 \;\Rightarrow\; h_{1+x,3} m_{\text{L},3} = h_{1+x,1} m_{\text{L},1} + h_{1+x,2} m_{\text{L},2}; \quad \underline{h_{1+x,3} = 51.57\text{kJ/kg}}$$

Aus $h_{1+x,3}$ kann nun, bei bekanntem Dampfgehalt, die Temperatur berechnet werden,

$$\underline{\vartheta_3} = \frac{h_{1+x,3} + x_{\text{D},3} r_0}{c_{p,\text{L}} + x_{\text{D},3} c_{p,\text{D}}} = \underline{22.57°\text{C}}.$$

Beispiel 30: Ein Strom feuchter Luft (Gesamtvolumenstrom $\dot{V} = 2\ \mathrm{m^3/s}$) wird aus einem Zustand 1 ($\varphi_1 = 0{,}8$, $\vartheta_1 = 25°\mathrm{C}$, $p_1 = 1\mathrm{bar}$) in einem Luftvorwärmer auf einen Zustand 2 ($\vartheta_2 = 50°\mathrm{C}$, $p_2 = 1\mathrm{bar}$) erwärmt.
Bestimmen Sie sowohl rechnerisch als auch graphisch mit Hilfe des Mollierschen h_{1+x}-Diagramms:

a) die Taupunktstemperatur der feuchten Luft im Zustand 1,

b) den Wärmebedarf zum Aufheizen,

c) die relative Feuchtigkeit φ_2.

$$\mathcal{M}_\mathrm{L} = 29\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}},\ \mathcal{M}_\mathrm{W} = 18\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}},\ \mathcal{R} = 8314\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kmolK}},$$
$$c_{p,\mathrm{L}} = 1\ \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kgK}},\ c_{p,\mathrm{D}} = 1{,}9\ \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kgK}},\ r_0 = 2501\ \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}}$$

Lösung Beispiel 30: a)

$$p_\mathrm{D} = \varphi\, p_s = 31{,}66 \times 0{,}8\,\mathrm{mbar} = 25{,}32\,\mathrm{mbar} \quad p_\mathrm{L} = 0{,}97468\,\mathrm{bar}$$

Aus Dampftafel $\vartheta_\mathrm{Tau} = 21{,}3\,°\mathrm{C}$

b) Zunächst Berechnung des Stromes $\dot{m}_L$ trockener Luft

$$\mathit{Dalton}: \quad p\dot{V}_\mathrm{L} = p_\mathrm{L}\dot{V} = \tfrac{\dot{m}_\mathrm{L}}{\mathcal{M}_\mathrm{L}}\mathcal{R}T$$

$$\rho_{\mathrm{L},1} = \frac{\mathcal{M}_\mathrm{L}}{\mathcal{R}T}p_\mathrm{L} = 1{,}14028\,\mathrm{kg/m^3}, \quad \Rightarrow \quad \dot{m}_\mathrm{L} = \rho_{\mathrm{L},1}\dot{V} = 2{,}28056\,\mathrm{kg/s}$$

$$x_\mathrm{D} = 0{,}622\frac{p_\mathrm{D}}{p - p_\mathrm{D}} = 0{,}016158$$

$$\dot{Q}_{12} = \dot{m}_\mathrm{L}(c_{p,\mathrm{L}} + c_{p,\mathrm{D}}x_\mathrm{D})(\vartheta_2 - \vartheta_1) = 58{,}76\mathrm{kJ/s}$$

c)

$$p_{s,2}(50°\mathrm{C}) = 123{,}35\,\mathrm{mbar} \quad \Rightarrow \quad \varphi_2 = p_D/p_{s,2} = 0{,}205$$

Beispiel 31: Beim Tanken eines Autos wird ein gasförmiges Luft/Kohlenwasserstoff-Gemisch aus dem Tank in die Umgebung verdrängt.

a) Berechnen Sie die pro Liter getankten Benzins freigesetzte Masse an gasförmigem Kohlenwasserstoff, wenn die Temperatur im Tank immer 20 °C und der Druck 1 bar beträgt.

b) Berechnen Sie das Volumen flüssigen Benzins, dem diese Dampfmasse entspricht.

c) Berechnen Sie das spezifische Volumen des gasförmigen Luft/Kohlenwasserstoff-Gemischs im Tank.

Hinweise:

- Benzin sei reines Oktan.
- Das Luft/Kohlenwasserstoff-Gemisch wird als gesättigtes ideales Gas/Dampf-Gemisch modelliert.

Molmasse trockener Luft: $\mathcal{M}_\mathrm{L} = 29$ g/mol
Molmasse Oktan: $\mathcal{M}_\mathrm{Oktan} = 114$ g/mol
Universelle Gaskonstante: $\mathcal{R} = 8.314$ J/molK
Dichte flüssigen Oktans: $\varrho_l = 0.7$ kg/l
Dampfdruck von Oktan bei 20 °C: $p_s = 0.0137$ bar

$$x = \frac{m_\mathrm{Oktan}}{m_\mathrm{L}} = \frac{\mathcal{M}_\mathrm{Oktan}}{\mathcal{M}_\mathrm{L}}\frac{p_\mathrm{D}}{p - p_\mathrm{D}}$$

Lösung Beispiel 31: a) Gesetz von Dalton:

$$p_{\mathrm{Ok}} V = m_{\mathrm{Ok}} \frac{\mathcal{R}T}{\mathcal{M}_{\mathrm{Ok}}}, \qquad p_{\mathrm{L}} V = m_{\mathrm{Ok}} \frac{\mathcal{R}T}{\mathcal{M}_{\mathrm{L}}}, \quad p = p_{\mathrm{Ok}} + p_{\mathrm{L}}$$

Da das Oktandampf/Luftgemisch im thermodynamischen Gleichgewicht mit flüssigem Oktan steht, ist der Partialdruck des Oktandampfes gleich dem Sättigungsdruck $p_{\mathrm{Ok}} = p_s$. Mit $V = 1\,\mathrm{dm}^3$ erhalten wir

$$m_{\mathrm{Ok}} = \frac{p_{\mathrm{Ok}} V}{\mathcal{R}T} \mathcal{M}_{\mathrm{Ok}} = 64{,}08\,\mathrm{mg}$$

b)

$$V = \frac{m_{\mathrm{Ok}}}{\rho_{\mathrm{Ok,fl}}} = 0{,}0915\,\mathrm{ml}$$

c)

$$m_{\mathrm{L}} = \frac{p_{\mathrm{L}} V}{\mathcal{R}T} \mathcal{M}_{\mathrm{L}} = 1173{,}56\,\mathrm{mg}$$
$$m = m_{\mathrm{L}} + m_{\mathrm{Ok}} = 1237{,}64{,}\mathrm{mg}$$
$$v = \frac{V}{m} = 0{,}810\,\mathrm{m}^3/\mathrm{kg}$$

Beispiel 32: Feuchte Luft ($m_{\mathrm{L}} = 500\,\mathrm{kg}, \vartheta_1 = -10\ ^\circ\mathrm{C}$, $\varphi_1 = 0{,}9$, $p = 1\,\mathrm{bar}$) wird zunächst auf eine Temperatur ϑ_2 isobar erwärmt. Anschließend soll durch isobares Einspritzen von flüssigem Wasser ($\vartheta_{\mathrm{W}} = 10\ ^\circ\mathrm{C}, m_{\mathrm{W}}$) in einer adiabaten Kammer der Zustand 3 mit $\vartheta_3 = 22\ ^\circ\mathrm{C}$ und $\varphi_3 = 0{,}6$ erreicht werden.

a) Berechnen Sie den Wassergehalt im Zustand 2 und 3.

b) Welche Wassermasse m_{W} ist aufzubringen?

c) Berechnen Sie die Temperatur ϑ_2.

d) Welche Wärmemenge Q_{12} ist notwendig?

$$c_{p,\mathrm{L}} = 1\ \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kgK}}, \quad c_{p,\mathrm{D}} = 1{,}9\ \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kgK}}, \quad c_{p,\mathrm{W}} = 4{,}2\ \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kgK}}, \quad r_0 = 2500\ \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}},$$
$$\varphi = \frac{p_{\mathrm{D}}}{p_{\mathrm{s}}}, \quad x_{\mathrm{D}} = 0{,}622 \frac{p_{\mathrm{D}}}{p - p_{\mathrm{D}}}$$

ϑ [°C]	p_{S} [mbar]
-10	2,60
22	26,43

Lösung Beispiel 32: a)

$$p_{D,1} = \varphi_1 p_{s,1} = 2{,}34\,\mathrm{mbar}$$
$$x_{D,2} = x_{D,1} = 0{,}622 \frac{p_{D,1}}{p + p_{D,1}} = 1{,}46 \times 10^{-3}$$
$$p_{D,3} = \varphi_3 p_{s,3} = 15{,}858\,\mathrm{mbar}$$
$$x_{D,3} = 0{,}622 \frac{p_{D,3}}{p + p_{D,3}} = 10{,}02 \times 10^{-3}$$

b)

$$m_w = m_L (x_{D,3} - x_{D,2}) = 4{,}28\,\mathrm{kg}$$

c) 1. Hauptsatz

$$H_2 + H_{\mathrm{fl,W}} = H_3$$
$$H_3 = m_L (c_{p,L} \vartheta_3 + x_{D,3} c_{p,D} \vartheta_3 + x_3 r_0) = 23{,}737\,\mathrm{MJ}$$
$$H_{\mathrm{fl,W}} = m_w c_{p,w} \vartheta_W = 179{,}8\,\mathrm{kJ}$$
$$H_2 = H_3 - H_{\mathrm{fl,W}} = 23{,}557\,\mathrm{MJ}$$
$$\vartheta_2 = \frac{H_2/m_L - r_0 x_2}{c_{P,L} + c_{P,D} x_2} = 43{,}34\,^\circ\mathrm{C}$$

d)

$$Q_{21} = H_2 - H_1 = m_L (c_L + c_{p,D} x_{D,1})(\vartheta_2 - \vartheta_1) = 26{,}72\,\mathrm{MJ}$$

Beispiel 33: Ein Gemisch von flüssigem und dampfförmigem Wasser (Anfangszustand $m_1 = 2500\,\mathrm{kg}$,$T_1 = 393{,}15$ K,$V_1 = 15$ m^3) wird mit 1000 kg gesättigtem Wasserdampf gleichen Drucks isobar gemischt (Zustand 2). Wärmeaustausch mit der Umgebung kann bei diesem Mischprozeß vernachlässigt werden.
Das gesamte Gemisch wird anschließend auf den Druck $p_3 = 1$ bar adiabat gedrosselt (Zustand 3).

a) Ermitteln Sie die Dichte ρ_1 und den Druck p_1 sowie den Dampfgehalt x_1 und die Dampfmasse $m_{\mathrm{D},1}$.

b) Welcher Dampfgehalt x_2 stellt sich im gemischten Zustand 2 ein, und welche spezifische Enthalpie h_2 hat nun das Gemisch?

c) Berechnen Sie unter Vernachlässigung der kinetischen und potentiellen Energie beim adiabaten Mischvorgang den Dampfgehalt x_3 im Endzustand 3 und das spezifisches Volumen v_3 des Gemisches.

d) Wie groß ist die Entropieänderung des Gemisches beim adiabaten Drosselprozeß? Handelt es sich dabei um einen reversiblen oder irreversiblen Prozeß (Begründung!)?

Lösung Beispiel 33: a)

$$v_1 = \frac{V}{m_1} = 6\,\mathrm{dm}^3, \quad rho_1 = 166{,}7\,\mathrm{kg/m}^3, \qquad p_1 = 1{,}0133\,\mathrm{bar}$$

$$x_1 = \frac{v_1 - v'_{120}}{v''_{120} - v'_{120}} = 2{,}96 \times 10^{-3}, \quad x_{D,1} = x_1 * m_1 = 13{,}9\mathrm{kg}$$

b)

$$H_1 = m_1(h'_{120}(1 - x_1) + h''_{120}x_1) = 1275{,}5\,\mathrm{MJ}$$
$$H_D = m_D h''_{120} = 2706.0\,\mathrm{MJ}$$
$$H_2 = H_1 + H_2 = 3981{,}5\,\mathrm{MJ}, \quad m_2 = 3500\,\mathrm{kg}$$
$$h_2 = 1137{,}6\,\mathrm{kJ/kg}, \quad x_2 = 0{,}2878$$

c)

$$h_3 = h_2 \rightarrow x_3 = \frac{h_3 - h'_{100}}{h''_{100} - h'_{100}} = 0{,}3184$$
$$v_3 = 0{,}5337\,\mathrm{m}^3/\mathrm{kg}$$

d) Drosselprozeß:

$$S_1 = m_1 s_1 = 3860{,}453\,\mathrm{kJ/K}, \quad S_D = 7129{,}3\,\mathrm{kJ/K}$$
$$S_2 = S_1 + S_D = 10989{,}8\mathrm{kJ/K}$$

$$S_3 = 11315\,\mathrm{kJ/K}$$

$$S_3 - S_1 = 326 > 0 \quad \text{irreversibel!}$$

c)

$$h_3 = h_2 \rightarrow x_3 = \frac{h_3 - h'_{100}}{h''_{100} - h'_{100}} = 0{,}3202$$
$$v_3 = 0{,}5337\,\mathrm{m}^3/\mathrm{kg}$$

d) Drosselprozeß:

$$S_2 = m_2 s_2 = 11024{,}5\mathrm{kJ/K}$$

$$S_3 = 11352{,}0\,\mathrm{kJ/K}$$

$$S_3 - S_1 = 327{,}5 > 0 \quad \text{irreversibel!}$$

Beispiel 34: Zwei Kilogramm überhitzter Wasserdampf mit den Zustandsgrößen $\theta_1 = 500°\mathrm{C}$, $\rho_1 = 40{,}9\mathrm{kg/m^3}$ sollen reversibel adiabat auf Sättigungszustand (Zustand 2) gebracht werden. Anschließend soll der Sattdampf (Zustand 2) isotherm in einen Zustand 3 gebracht werden, bei dem sich ein Dampfgehalt von 0,5% einstellt. Ausgehend vom Zustand 3 wird das Zweiphasengemisch isochor verflüssigt (Zustand 4).
a) Geben Sie die Drücke (p_1, p_2, p_3, p_4), die Temperaturen (ϑ_2, ϑ_3, ϑ_4), die Dichten (ρ_2, ρ_3, ρ_4) und die ausgetauschten Wärmemengen (Q_{12}, Q_{23}, Q_{34}) an.
b) Stellen Sie die Zustandsänderungen und die ausgetauschten Wärmemengen in einem T,s - Diagramm dar.

Dampftafel für überhitzten Wasserdampf:

p	ϑ	v	h	s
bar	°C	m^3/kg	kJ/kg	kJ/kgK
1,4	170	1,4470	2813,4	7,5456
1,4	180	1,4810	2833,5	7,5903
2,0	130	0,9100	2726,9	7,1786
3,4	200	0,6307	2863,5	7,2508
3,4	210	0,6450	2884,2	7,2943
130	500	0,0244	3336,8	6,4409
150	440	0,01794	3126,9	6,1010

Lösung Beispiel 34: a) Zustand 1: Aus Dampftafel für überhitzten Wasserdampf, $\underline{p_1 = 130 \text{ bar}}$.
$1 \rightarrow 2$ isentrop, $s_2 = s_1$, Sättigungszustand: $s_2 = s_2''$, aus Dampftafel: $\underline{\vartheta_2 = 200\ °\mathrm{C}}$, $\underline{p_2 = 15.549 \text{ bar}}$, $\underline{\rho_2 = 7.86 \text{ kg/m}^3}$.
$2 \rightarrow 3$ isobar und isotherm, $\underline{p_3 = p_2}$, $\underline{\vartheta_3 = \vartheta_2}$, $v_3 = 0.995 v_3' + 0.005 v_3'' = 1.787 \text{ dm}^3/\text{kg}$, $\underline{\rho_3 = 559.6 \text{ kg/m}^3}$.
$3 \rightarrow 4$ isochor, $v_4 = v_4' = v_3$. $\underline{\vartheta_4 = 350\ °\mathrm{C}}$, $\underline{p_4 = 165 \text{ bar}}$.
Wärmemengen:

$$\underline{Q_{12} = 0}, \qquad \underline{Q_{23}} = H_3 - H_2 \underline{= -3858 \text{ kJ}},$$

$$\underline{Q_{34}} = m[h_4 - h_3 - v_3(p_4 - p_3)] \underline{= 1566 \text{ kJ}}.$$

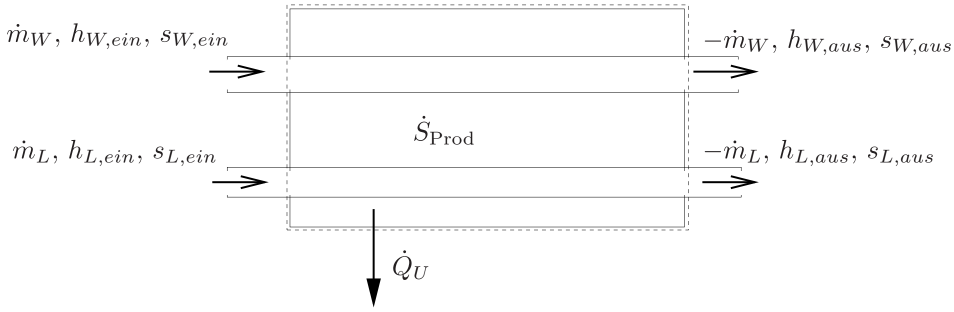
Beispiel 35: Gesättigter Wasserdampf (p=10,027 bar, $\dot{m}$= 1 kg/s) strömt in einen Wärmetauscher, den er als Flüssigkeit (p=10,027 bar, $\vartheta_2 = 20$ °C, $s_2 = 0.296$ kJ/kgK) wieder verläßt. Ein Teil der dabei frei werdenden Wärme wird dazu verwendet einen Massenstrom von 20 kg/s Luft von 275 K auf 290 K isobar zu erwärmen. Der Rest geht an die Umgebung ($T_\mathrm{U} = 275$ K) verloren. Berechnen Sie die Gesamtentropieproduktion dieses Prozesses pro Zeiteinheit.

$$c_{p,\mathrm{Luft}} = 1 \text{ kJ/kgK}, \; c_{p,\mathrm{Wasser,fl}} = 4{,}19 \text{ kJ/kg}$$

Dampftafel für Wasser:

ϑ	p	v'	v''	h'	h''	r	s'	s''
°C	bar	dm^3/kg	m^3/kg	kJ/kg	kJ/kg	kJ/kg	kJ/kgK	kJ/kgK
170	7,920	1,1145	0,2426	719,1	2767,1	2048,0	2,0416	6,6630
180	10,027	1,1275	0,1938	763,1	2776,3	2013,2	2,1393	6,5819
190	12,551	1,1415	0,1563	807,5	2784,3	1976,8	2,2356	6,5036

Lösung Beispiel 35:



1. Hauptsatz

$$0 = \dot{Q}_U + \dot{H}_{\text{W,ein}} + \dot{H}_{\text{W,aus}} + \dot{H}_{\text{L,ein}} + \dot{H}_{\text{L,aus}}$$

$$\dot{H}_{\text{W,ein}} = \dot{m}_{\text{W,ein}} h_{\text{W,ein}} = \dot{m}_{\text{W}} h'' = 2776{,}3\,\text{kJ/s}$$

$$\dot{H}_{\text{W,aus}} = \dot{m}_{\text{w,aus}} h_{\text{W,aus}} = -\dot{m}_W\, c_{\text{p,W,fl}}\, \vartheta_2 = -83{,}8\,\text{kJ/s}$$

$$\dot{H}_{\text{L,ein}} = \dot{m}_{\text{L,ein}} h_{\text{L,ein}} = \dot{m}_{\text{L}} c_{\text{p,L}} T_{\text{L,ein}} = 5500\,\text{kJ/s}$$

$$\dot{H}_{\text{L,aus}} = \dot{m}_{\text{L,aus}} h_{\text{L,aus}} = -\dot{m}_{\text{L}} c_{\text{p,L}} T_{\text{L,aus}} = -5800\,\text{kJ/s}$$

$$\dot{Q}_U = -\dot{H}_{\text{W,ein}} - \dot{H}_{\text{W,aus}} - \dot{H}_{\text{L,ein}} - \dot{H}_{\text{L,aus}} = -2392{,}5\,\text{kJ/s}$$

Entropiebilanz

$$0 = \dot{S}_{\text{Prod}} + \dot{S}_{\text{W,ein}} + \dot{S}_{\text{W,aus}} + \dot{S}_{\text{L,ein}} + \dot{S}_{\text{L,aus}} + \frac{\dot{Q}_U}{T_U}$$

$$\dot{S}_{\text{W,ein}} = \dot{m}_{\text{W,ein}} s_{\text{W,ein}} = \dot{m}_{\text{W}} s'' = 6{,}5819\,\text{kJ/Ks}$$

$$\dot{S}_{\text{W,aus}} = \dot{m}_{\text{W,aus}} s_{\text{W,aus}} = -\dot{m}_{\text{W}} s_2 = -0{,}296\,\text{kJ/Ks}$$

$$\dot{S}_{\text{L,ein}} - \dot{S}_{\text{L,aus}} = \dot{m}_{\text{L}}(s_{\text{L,ein}} - s_{\text{L,aus}}) = \dot{m}_{\text{L}} c_p \ln T_{\text{L,ein}}/T_{\text{L,aus}} = -1{,}0622\,\text{kJ/Ks}$$

$$\frac{\dot{Q}_U}{T_U} = -8{,}7098\,\text{kJ/Ks}$$

$$\dot{S}_{\text{Prod}} = -\dot{S}_{\text{W,ein}} - \dot{S}_{\text{W,aus}} - \dot{S}_{\text{L,ein}} - \dot{S}_{\text{L,aus}} - \frac{\dot{Q}_U}{T_U} = 3{,}4861\,\text{kJ/Ks}$$

Dampftafel für Wasser

ϑ	p	v'	v''	h'	h''	r	s'	s''
°C	bar	dm^3/kg	m^3/kg	kJ/kg	kJ/kg	kJ/kg	kJ/kgK	kJ/kgK
0,01	0,006112	1,0002	206,2	0,000	2501,6	2501,6	0,0000	9,1575
5	0,008718	1,0000	147,2	21,01	2510,7	2489,7	0,0762	9,0269
10	0,01227	1,0003	106,4	41,99	2519,9	2477,9	0,1510	8,9020
15	0,01704	1,0008	77,98	62,94	2529,1	2466,1	0,2243	8,7826
20	0,02337	1,0017	57,84	83,86	2538,2	2454,3	0,2963	8,6684
25	0,03166	1,0029	43,40	104,77	2547,3	2442,5	0,3670	8,5592
30	0,04241	1,0043	32,93	125,66	2556,4	2430,7	0,4365	8,4546
40	0,07375	1,0078	19,55	167,45	2574,4	2406,9	0,5721	8,2583
50	0,12335	1,0121	12,05	209,26	2592,2	2382,9	0,7035	8,0776
60	0,19920	1,0171	7,679	251,09	2609,7	2358,6	0,8310	7,9108
70	0,31160	1,0228	5,046	292,97	2626,9	2334,0	0,9548	7,7565
80	0,47367	1,0292	3,409	334,92	2643,8	2308,8	1,0753	7,6132
90	0,7011	1,0361	2,361	376,94	2660,1	2283,2	1,1925	7,4799
100	1,0133	1,0437	1,6730	419,1	2676,0	2256,9	1,3069	7,3554
110	1,4327	1,0519	1,2010	461,3	2691,3	2230,0	1,4185	7,2388
120	1,9854	1,0606	0,8915	503,7	2706,0	2202,3	1,5276	7,1293
130	2,701	1,0700	0,6681	546,3	2719,9	2173,6	1,6344	7,0261
140	3,614	1,0800	0,5085	589,1	2733,1	2144,0	1,7390	6,9284
150	4,760	1,0908	0,3924	632,2	2745,4	2112,2	1,8416	6,8358
160	6,181	1,1022	0,3068	675,5	2756,7	2081,2	1,9425	6,7475
170	7,920	1,1145	0,2426	719,1	2767,1	2048,0	2,0416	6,6630
180	10,027	1,1275	0,1938	763,1	2776,3	2013,2	2,1393	6,5819
190	12,551	1,1415	0,1563	807,5	2784,3	1976,8	2,2356	6,5036
200	15,549	1,1565	0,1272	852,4	2790,9	1938,5	2,3307	6,4278
210	19,077	1,173	0,1042	897,5	2796,2	1898,7	2,4247	6,3539
220	23,198	1,190	0,08604	943,7	2799,9	1856,2	2,5178	6,2817
230	27,976	1,209	0,07145	990,3	2802,0	1811,7	2,6102	6,2107
240	33,478	1,229	0,05965	1037.6	2802,2	1764,6	2,7020	6,1406
250	39,776	1,251	0,05004	1085,8	2800,4	1714,6	2,7935	6,0708
260	46,934	1,276	0,04213	1134,9	2796,4	1661,5	2,8848	6,0010
270	55,058	1,303	0,03559	1185,2	2789,9	1604,6	2,9763	5,9304
280	64,202	1,332	0,03013	1236,8	2780,4	1543,6	3,0683	5,8586
290	74,641	1,366	0,02554	1290,0	2767,6	1477,6	3,1611	5,7848
300	85,927	1,404	0,02165	1345,0	2751,0	1406,0	3,2552	5,7081
310	98,700	1,448	0,01833	1402,4	2730,0	1327,6	3,3512	5,6278
320	112,89	1,500	0,01548	1462,6	2703,0	1241,1	3,4500	5,5423
330	128,63	1,562	0,01299	1526,5	2670,2	1143,6	3,5528	5,4990
340	146,05	1,639	0,01078	1595,5	2626,2	1030,7	3,6616	5,3427
350	165,35	1,741	0,00880	1671,9	2567,7	895,7	3,7800	5,2177
360	186,75	1,896	0,00694	1764,2	2485,4	721,3	3,9210	5,0600
370	210,54	2,214	0,00497	1890,2	2342,8	452,6	4,1108	4,8144
374,15	221,2	3,170	0,00317	2107,4	2107,4	0	4,4429	4,4429

(nach SCHMIDT, E.: Properties of Water and Steam in SI-units, 4th Ed., Springer, 1989)