

1. Motivation

Strömungsmechanische Instabilitäten finden sich in Natur und Technik fast überall. Ob es ein Tropfen Milch ist, der ins Wasser fällt, ein Schornstein (Zylinder), der umströmt wird, oder die Wirbelschlepe hinter Flugzeugen, die zerfällt. Neben der Bedeutung von Instabilitäten für die Strömungsmechanik besitzen viele Instabilitäten auch ästhetische Qualitäten. Die Abbildungen 1.1 und 1.2 zeigen zwei Beispiele.

Die Frage nach der Strömung, die sich in einem bestimmten Raumgebiet und unter gegebenen Rand- und Anfangsbedingungen einstellt, ist von zentralem Interesse in der Strömungsmechanik. Wenn wir davon ausgehen, daß die Navier-Stokes-Gleichungen die Strömung auf den uns interessierenden Raum- und Zeitskalen hinreichend genau beschreibt, dann entspricht jede im Experiment realisierte Strömung



Figure 1.1.: Instabilität eines Milchtropfens, der ins Wasser fällt (nach [Mollo-Christensen 1968](#)).

1. Motivation



Figure 1.2.: Instabilität der Strömung hinter einem Zylinder (nach Mollo-Christensen 1968).

genau einer Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen. Die Umkehrung gilt nicht: Für die Realisierung einer Strömung im Experiment genügt es nicht, daß eine Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen existiert. Sie muß darüber hinaus auch *stabil* sein, d.h. robust gegenüber gewissen Variationen der Parameter (Ungenauigkeiten) und der Anfangsbedingungen (Störungen). Was dies genau bedeutet, wird später noch zu präzisieren sein.

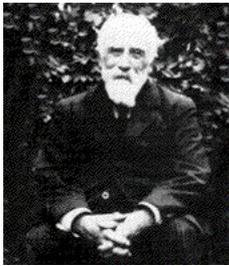
Stabilität bezieht sich immer auf einen Referenz- oder *Grundzustand*. Im Falle der Navier-Stokes-Gleichungen handelt es sich um die *Grundströmung* (*basic flow*). Die Stabilität einer Grundströmung läßt sich am leichtesten untersuchen, wenn sie einfach ist und viele Symmetrien besitzt. Symmetrie bedeutet, daß die zugrundeliegenden Gleichungen und die Randbedingungen invariant sind unter bestimmten Symmetrie-Operationen. Ein Beispiel ist die Invarianz der Gleichungen bei beliebigen Rotationen um ein Achse. Diese Symmetrie findet man bei Zylinderproblemen. Falls das Problem Symmetrien aufweist, dann wird zumindest eine Lösung der Navier-Stokes-Gleichung existieren, welche dieselben Symmetrien besitzt. Darüber hinaus können aber auch Lösungen existieren,¹ welche nicht alle

¹Die Navier-Stokes-Gleichung ist nichtlinear und kann daher mehr als eine Lösung besitzen. Die Anzahl der Lösungen hängt von den Parametern ab. Meistens kann man aber nicht genau

Symmetrien besitzen, die die Gleichungen aufweisen. Diese nicht-symmetrischen Lösungen brechen die Symmetrie des Problems in spontaner Weise. Man spricht dann von *spontaner Symmetriebrechung*.

Die *hydrodynamische Stabilität* beschäftigt sich im weitesten Sinne mit der Frage nach den Strömungsformen, die unter gegebenen Bedingungen realisiert werden. Ein wichtiger Aspekt ist dabei die Änderung der Symmetrieeigenschaft der Strömung, wenn der Antrieb der Strömung erhöht wird. In den meisten Fällen verringert sich die Symmetrie der Strömung, wenn die Stärke des Antriebs erhöht wird. Der Antrieb wird normalerweise durch einen Parameter quantifiziert (z.B. die Reynoldszahl). Den Wert des Parameters, bei dem die Symmetrie gebrochen wird, bezeichnet man als *kritischen Wert* und spricht von einer *symmetriebrechenden Instabilität*.

1.1. Das Taylor-Couette-Problem



Maurice Frédéric
Alfred Couette
1858–1943

Ein Paradebeispiel für hydrodynamische Instabilitäten ist die inkompressible Strömung in einem unendlich langen Spalt zwischen zwei konzentrischen Zylindern,² die mit konstanten aber unterschiedlichen Winkelgeschwindigkeiten Ω_1 und Ω_2 um die gemeinsame Achse rotierenden (Abb. 1.3). Dieses System wurde zuerst von Couette (1890) verwendet, um die Viskosität von Fluiden zu bestimmen. Taylor (1923b) analysierte das Problem als erster in einer umfangreichen theoretischen Arbeit.

Wenn beide Rotationsraten gering sind, werden sich alle Fluidpartikel auf konzentrischen Kreisen um den Innenzylinder bewegen. Dies ist die *konzentrische Couette-Strömung*. Man kann sie leicht analytisch berechnen. Denn für $\partial/\partial z = \partial/\partial\varphi = \partial/\partial t = 0$ vereinfachen sich die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen zu der gewöhn-

sagen, wie groß die Multiplizität der Lösungen ist.

²Im Experiment würde man die Länge des Spalts groß wählen gegenüber der Spaltweite.

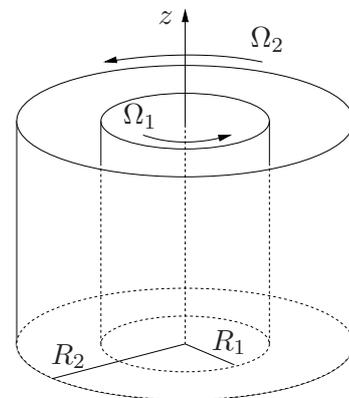


Figure 1.3.: Geometrie des Taylor-Couette-Problems.

1. Motivation

lichen Differentialgleichung

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) V(r) = 0, \quad (1.1)$$

wobei r die radiale Koordinate ist und $V(r)$ die azimuthale Komponente des Geschwindigkeitsvektors $\mathbf{U} = U\mathbf{e}_r + V\mathbf{e}_\varphi + W\mathbf{e}_z$. Ein Geschwindigkeitsfeld der Form $\mathbf{U} = V(r)\mathbf{e}_\varphi$ ist immer inkompressibel. Gleichung (1.1) beschreibt die stationäre Diffusion von azimuthalem Impuls in radialer Richtung.

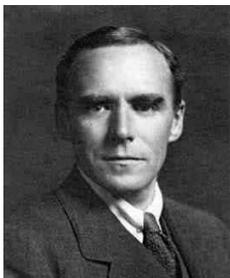
Mit Hilfe des Potenzansatzes $V(r) = r^n$ findet man die Wurzeln $n = \pm 1$. Daher können wir die Lösung von (1.1) ansetzen als

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = V(r)\mathbf{e}_\varphi = \left(Ar + \frac{B}{r} \right) \mathbf{e}_\varphi. \quad (1.2)$$

Die Randbedingungen $V(R_1) = \Omega_1 R_1$ und $V(R_2) = \Omega_2 R_2$ legen die beiden Integrationskonstanten fest. Mit Hilfe dieser beiden Bedingungen findet man

$$A = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}, \quad B = \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}. \quad (1.3)$$

Wenn die Rotationsrate Ω_1 des inneren Zylinders hinreichend klein ist, wird die zu dieser Lösung gehörende zirkuläre Couette-Strömung im Experiment realisiert. Sie ist stabil.



Geoffrey Ingram
Taylor
1886–1975

Als Beispiel betrachten wir die Situation bei ruhendem Außenzylinder ($\Omega_2 = 0$). Bei kleinen Werten von Ω_1 beschreiben die Fluidelemente konzentrische Kreisbahnen um die z -Achse. Diese Strömung entspricht der konzentrischen Couette-Strömung. Wird Ω_1 über eine kritische Rotationsrate Ω_{1c} hinaus erhöht, ist dieser Bewegung noch eine Bewegung überlagert, die in axialer und radialer Richtung erfolgt. Die Fluidelemente bewegen sich dann auf Tori, die konzentrisch um den inneren Zylinder liegen (siehe Abb. 1.4 und 1.5). Die Tori, auf denen die Bewegung stattfindet, sind periodisch in z -Richtung gestapelt, wobei der Drehsinn der Strömung in den gestapelten Tori in z -Richtung alternierend ist. Diese Strömung wird aufgrund der bahnbrechenden theoretischen Analyse von Taylor (1923b) als *Taylor-Wirbelströmung* bezeichnet.

Die Taylor-Wirbelströmung ist stationär und axisymmetrisch. Aber während die konzentrische Couette-Strömung in z -Richtung eine kontinuierliche Translationsinvarianz besitzt, verfügt die Taylor-Wirbelströmung nur noch über eine diskrete Translationsinvarianz. Darüber hinaus sind in der Taylor-Wirbelströmung $u \neq 0$ und $w \neq 0$.³ Diese qualitative Änderung der Strömungsform kann man

³Die kleinen Buchstaben ($\mathbf{u} = (u, v, w)$) deuten die Abweichung vom Grundzustand $\mathbf{U} = (U, V, W)$ an. Damit ist die gesamte Strömung gegeben durch $\mathbf{u}_{\text{ges}} = \mathbf{U} + \mathbf{u}$.

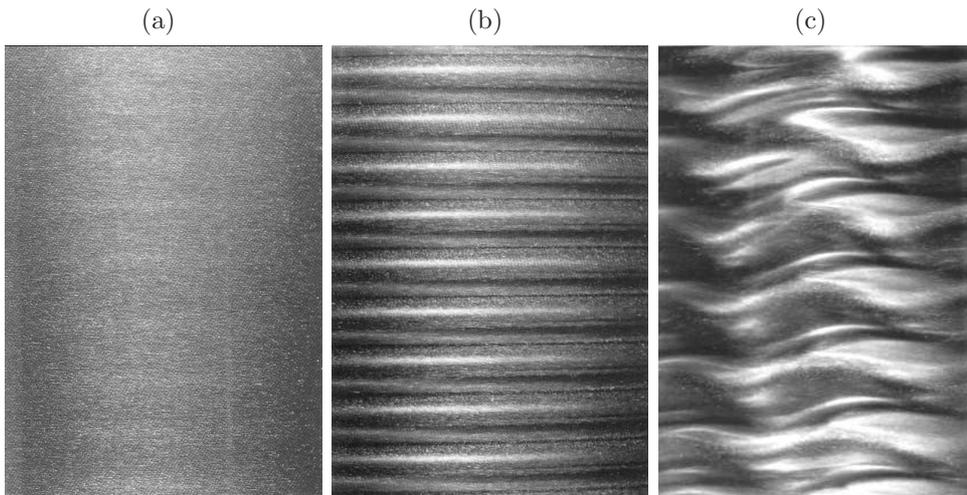


Figure 1.4.: Strömung im konzentrischen Zylinderspalt bei ruhendem äußeren Zylinder ($\Omega_2 = 0$) und von außen gesehen: (a) Couette-Strömung knapp unterhalb der kritischen Rotationsrate $\Omega_1 < \Omega_{1c}$; (b) Taylor-Wirbelströmung für $\Omega_1 > \Omega_{1c}$; (c) bei noch höherer Rotationsrate werden die toroidalen Wirbel in Umfangsrichtung wellig (nach Mullin 1993).

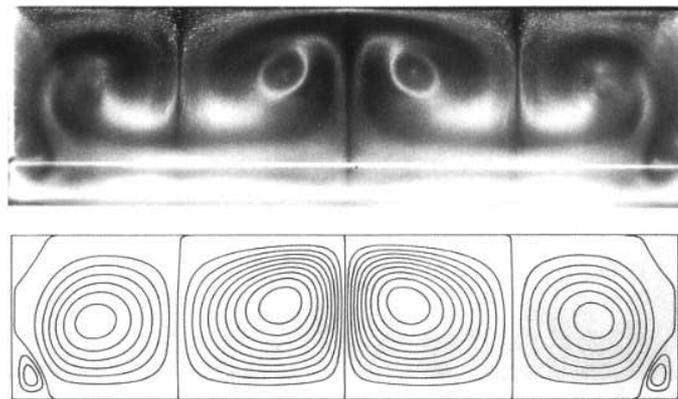


Figure 1.5.: Ein Schnitt bei $\varphi = \text{const.}$ zeigt die Struktur der Taylor-Wirbel in der (r, z) -Ebene: Experimentelle Visualisierung und numerische Berechnung (nach Mullin 1993). Die Rotationsachse ist hier horizontal.

durch ein *Bifurkationsdiagramm* beschreiben. Eine Möglichkeit besteht darin, die Geschwindigkeit an einem festen Raumpunkt als Funktion der Antriebsstärke darzustellen.⁴ Eine solche *Bifurkation* (Verzweigung der Lösung) ist schematisch in Abb. 1.6 gezeigt, wobei die vertikale Geschwindigkeitskomponente w an irgendeinem festen Punkt \mathbf{x}_0 als Funktion der Rotationsrate Ω_1 dargestellt wurde. Der Parameter Ω_1 mißt die Antriebsstärke und wird in diesem Zusammenhang auch

⁴Man könnte aber auch das auf die Zylinder ausgeübte Drehmoment gegen Ω_1 auftragen.

1. Motivation

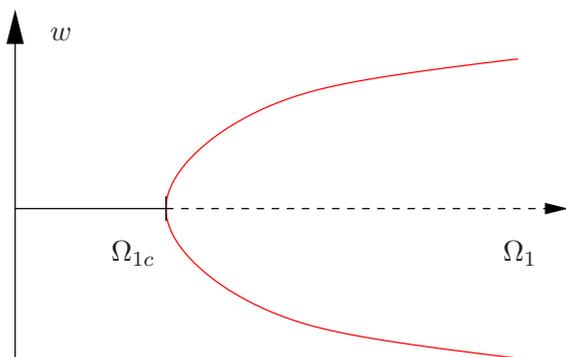


Figure 1.6.: Schematische Darstellung einer Bifurkation: Die axiale Störgeschwindigkeit w an einem festen Punkt x_0 innerhalb des Zylinderspalts als Funktion der Rotationsrate Ω_1 für $\Omega_2 = 0$. Die gestrichelte Linie deutet eine instabile Lösung an.

Kontrollparameter genannt. Unterhalb der kritischen Rotationsrate Ω_{1c} besitzt die Strömung (schwarze Linie) kontinuierliche axiale und azimuthale *Translationsinvarianzen*: Eine beliebige axiale Verschiebung oder azimuthale Rotation des Strömungsfelds führt wieder zu derselben Strömung zurück. Für $\Omega_1 > \Omega_{1c}$ ist die axiale Translationssymmetrie gebrochen. Dann führen nur noch diskrete axiale Verschiebungen um $\Delta z = \pm n\lambda$ zu derselben Strömung zurück, wobei λ die axiale Wellenlänge des Musters ist und ein Taylor-Wirbelpaar umfaßt. Die Rotationssymmetrie bleibt erhalten. Die beiden Zweige der Lösung für $\Omega_1 > \Omega_{1c}$ (rote durchgezogene Kurve) entsprechen der Möglichkeit am vorgegebenen Meßort x_0 entweder einen rechts- oder einen linksdrehenden Taylorwirbel zu finden (beide Möglichkeiten sind gleichberechtigt).⁵ Obwohl die konzentrische Couette-Strömung (1.2) auch für $\Omega_1 > \Omega_{1c}$ eine Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen des Problems ist, wird sie im Experiment nicht realisiert. Sie ist instabil (gestrichelte Linie).



Gotthilf Heinrich
Ludwig Hagen
1797–1884

Wenn die Rotationsrate Ω_1 weiter erhöht wird, tritt eine weitere Instabilität auf, welche nun die Taylor-Wirbel betrifft. Dabei wird die kontinuierliche Rotationssymmetrie zerstört und die Taylor-Wirbel werden wellig in Umfangsrichtung. Diese Sequenz von symmetriebrechenden Instabilitäten kann sich weiter fortsetzen bis die Strömung turbulent wird (Abb. 1.7). Man bezeichnet diesen Weg in die Turbulenz über eine Sequenz von Bifurkationen, den man in ähnlicher Form auch bei anderen Systemen findet,⁶ als ein *Szenario*. Wie wir im folgenden sehen werden, können in anderen Systemen auch andere Szenarien auftreten.

1.2. Rohrströmung

Neben dem Szenario der sukzessiven Symmetriebrechung kann die Strömung auch auf einem anderen Weg turbulent werden. Bei der *bypass transition* werden die verschiedenen Stufen der Symmetriebrechung umgangen (*bypass*) und die Strömung

⁵Eigentlich handelt es sich um ein Paraboloid, wobei der Winkel die Phasenlage der Taylorwirbel angibt.

⁶Für die thermische Konvektion in einer von unten beheizten Fluidschicht, siehe Kap. 4.3 bzw. Busse (2003).

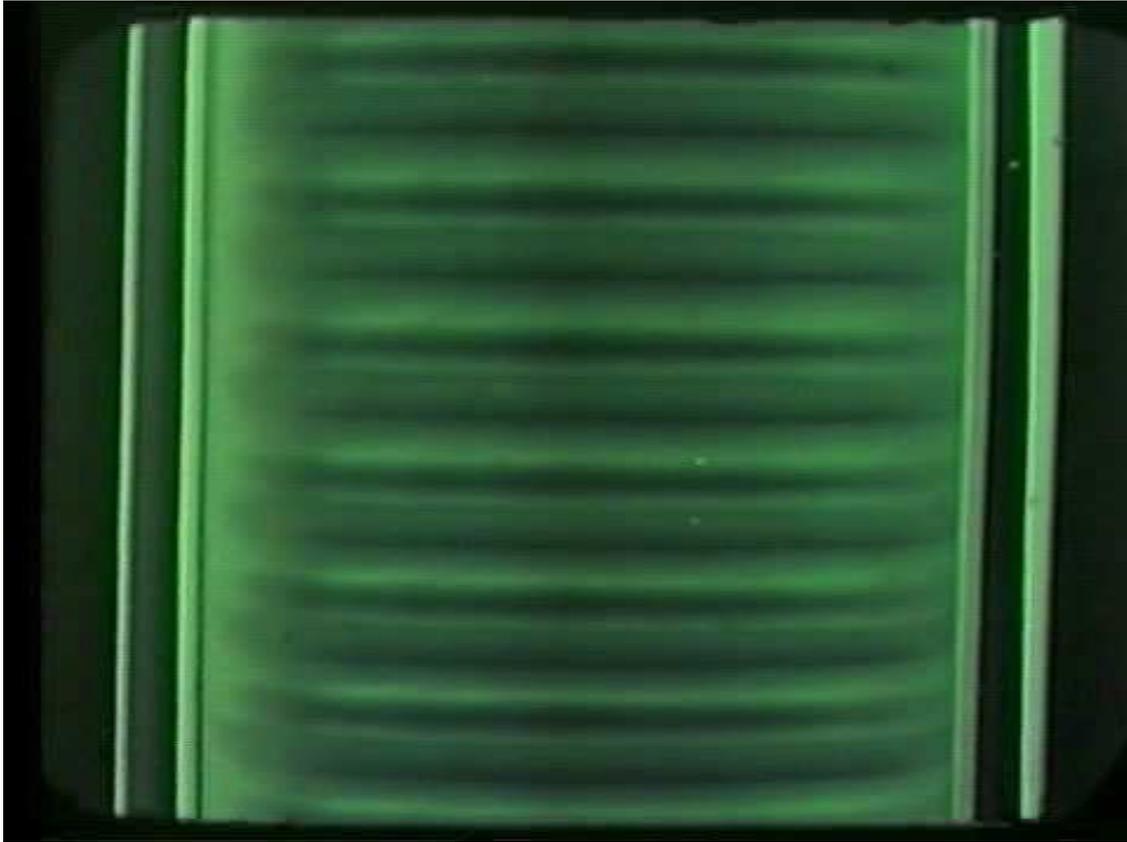


Figure 1.7.: Instabilität der zirkularen Couette-Strömung und stationäre sowie zeitabhängige Taylor-Wirbel (nach Mollo-Christensen 1968).

geht direkt von einem Zustand hoher Symmetrie in einen turbulenten Zustand mit geringer oder gar keiner Symmetrie über (turbulenter Umschlag). Dieses Szenario findet man, im wesentlichen, bei der Rohrströmung. Die Details sind jedoch komplizierter.

Nach den fundamentalen Arbeiten von Hagen und Poiseuille wurde der Übergang zur Turbulenz zunächst von Reynolds (1883) erforscht. Er visualisierte und beobachtete das Szenario und fand die *Reynoldszahl* als entscheidenden Kontrollparameter. Rückblickend hat sich das Problem des Übergangs zur Turbulenz in der Rohrströmung als äußerst hartnäckig erwiesen. Es blieb lange Zeit unverstanden. Erst neuere Arbeiten (siehe z.B. Eckhardt et al. 2007) haben im Rahmen der Theorie dynamischer Systeme zu einem wesentlich verbesserten Verständnis geführt. Vollständig gelöst ist das Problem immer noch nicht – *wir haben es aber umzingelt* (B. Eckhardt, 2008).

Das klassische Experiment von Reynolds (1883) ist in Abb. 1.8 gezeigt. Hierbei fließt Wasser über ein langes gerades zylindrisches Rohr aus einem Reservoir. Nach dem konischen Einlauf und einer gewissen Einlaufflänge bildet sich im Rohr die *Hagen-Poiseuille-Strömung* aus. Die zugehörige stationäre Lösung der inkom-

1. Motivation

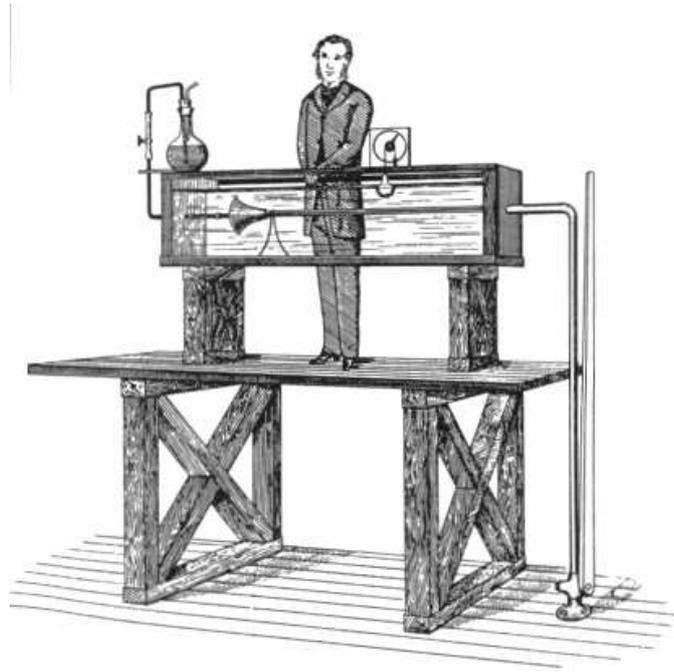


Figure 1.8.: Das Reynoldssche Experiment (nach [Reynolds 1883](#)).

pressiblen Navier-Stokes-Gleichungen lautet

$$\mathbf{U}(r) = -\frac{c}{4\mu} (R^2 - r^2) \mathbf{e}_z. \quad (1.4)$$

Hierbei ist μ die dynamische Viskosität. Der Parameter $c = \partial p / \partial z$ ist der von außen vorgegebene Druckgradient. Das laminare Strömungsprofil (1.4) wird nur für hinreichend kleine Druckgradienten bzw. für geringe Durchflußraten realisiert. Die Strömung wird parametrisiert durch die *Reynoldszahl*

$$\text{Re} = \frac{W_0 R}{\nu} = \frac{R^3}{4\nu\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right), \quad (1.5)$$

wobei R der Radius, ν die kinematische Viskosität und W_0 die Strömungsgeschwindigkeit auf der Symmetrieachse ist.⁷

Bei einer Erhöhung des Druckgradienten bzw. der Reynoldszahl findet man nach der laminaren (glatten) Strömung zunächst einen Bereich, in dem die laminare Strömung mit anscheinend chaotischen Strömungsgebieten abwechselt. Von diesen *turbulenten Flecken* gibt es zwei verschiedenen Arten, die *puffs* (Hauch) und *slugs* (Pfropfen) genannt werden. Bei weiterer Erhöhung der Reynoldszahl wird die gesamte Strömung chaotisch (turbulent). Reynolds fand eine kritische Reynoldszahl für den Übergang zur Turbulenz von $\text{Re}_c \approx 13\,000$. Die Reynoldszahl, bei

⁷Oft verwendet man anstelle der Reynoldszahl Re , die auf dem Druckgradienten basiert, die Reynoldszahl $\text{Re}_m = 2R\bar{W}/\nu$, die auf der *mittleren* Strömungsgeschwindigkeit \bar{W} basiert.

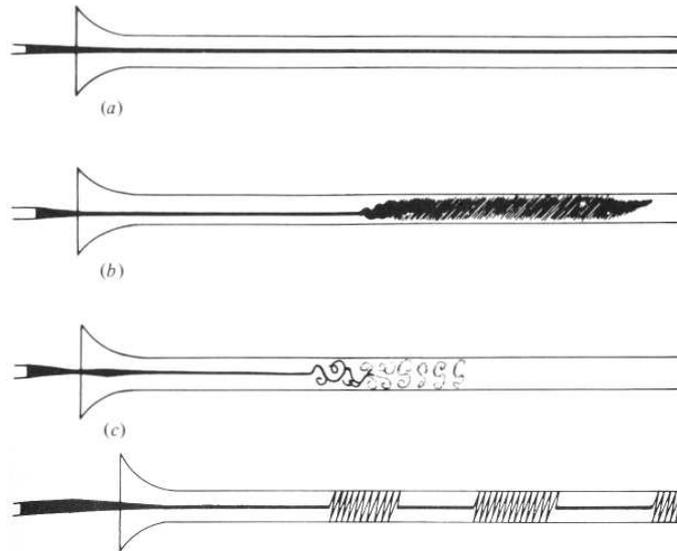


Figure 1.9.: Originalskizzen von Reynolds (1883) zeigen die Gestalt eines Tintenfadens bei laminarer Strömung (a), turbulenter Strömung bei konventioneller Beleuchtung (b), turbulente Strömung mit Blitzlicht beleuchtet (c) und turbulente Flecken (d).

der die Turbulenz einsetzt, hängt aber sehr stark davon ab, wie glatt das Rohr (Rauigkeit) und der Einlauf ausgeführt sind. Auch die Art und Intensität, wie die laminare Strömung an einer bestimmten Stelle gezielt gestört wird, hat einen Einfluß auf den Umschlag. Spätere Experimente lieferten je nach Ausführung des Experiments weit gestreute kritische Reynoldszahlen von $Re_c \approx 2000$ bis hin zu $Re_c \approx 10^5$ oder noch darüber hinaus! In einer neueren Arbeit von Avila et al. (2011) wird die kritische Reynoldszahl so definiert, daß die zufällige Zerfallsrate der Anzahl der Puffs gerade von der Wachstumsrate ihrer Anzahl (durch Aufspaltung eines in zwei Puffs) kompensiert wird.



Jean Louis
Léonard Marie
Poiseuille
1797–1869

Einige Originalskizzen von Reynolds sind in Abb. 1.9 gezeigt. Abbildung 1.10 zeigt die Visualisierung einiger Strömungen, die im originalen Reynoldsschen Experimentaufbau nachvollzogen wurden. Das Video in Abb. 1.11 zeigt die Dynamik der intermittierenden Strömung (*slugs/puffs*). Abbildung 1.12 zeigt eine Sequenz von Aufnahmen, die einen visuellen Eindruck von der Struktur eines *puffs* liefert.

Offenbar existiert die Hagen-Poiseuille-Strömung für *alle* Reynoldszahlen und die entscheidende Frage ist, ob sie stabil ist oder nicht. Der historisch erste Zugang zu dieser Fragestellung bestand in einer Adaption der *Theorie der Stabilität der Bewegung von Körpern*, die im Rahmen der Astronomie entwickelt wurde. Stokes, Kelvin und Rayleigh übertrugen die Methode der *Normalmoden* auf die Stabilität von Strömungen. Hierbei geht man von einer gegebenen stationären Lösung (*Grundzustand*) aus und nimmt an, daß die

1. Motivation

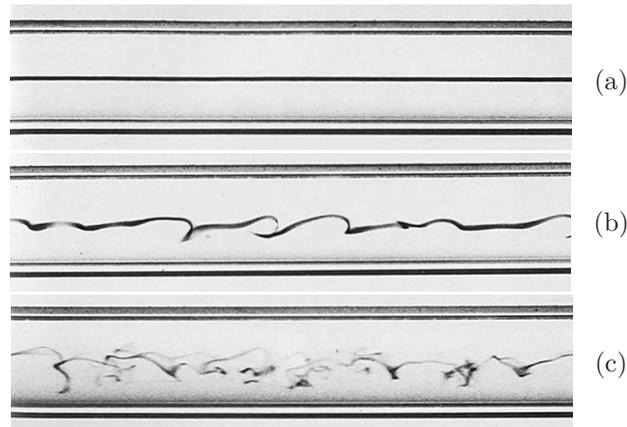


Figure 1.10.: Wiederholung des historischen Experiments von Reynolds durch N. H. Johannesen und C. Lowe unter Verwendung des originalen Versuchsaufbaus von Reynolds (1883). Die Fotos zeigen Momentaufnahmen markierter Fluidfilamente bei Erhöhung der Reynoldszahl von (a) nach (c) (nach Van Dyke 1982).

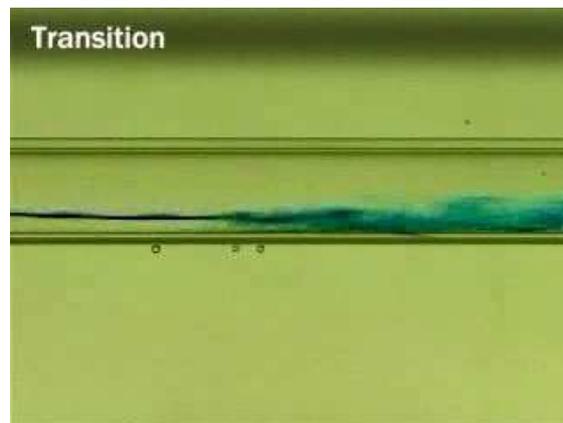


Figure 1.11.: Intermittente Rohrströmung (Homsy et al. 2000).

Abweichungen von diesem Grundzustand (in unserem Fall die Hagen-Poiseuille-Strömung) klein sind. Unter dieser Voraussetzung kann man die Bewegungsgleichungen linearisieren. Die Lösungen der linearen Gleichungen für kleine Störungen sind von der Form $\sim e^{\lambda t}$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$. Die Werte, die λ annehmen kann, werden dann aus den linearisierten Gleichungen berechnet. Falls es eine Lösung gibt mit $\Re(\lambda) > 0$, dann wächst die zugehörige Lösung exponentiell mit der Zeit an, und der Grundzustand ist *instabil*. Falls für alle λ gilt $\Re(\lambda) < 0$, dann ist der Grundzustand *stabil*. Im Falle der Bewegung von Körpern sind bei dieser *Stabilitätsanalyse* gewöhnliche Differentialgleichungen zu lösen. Bei strömungsmechanischen Fragestellungen sind es *partielle* Differentialgleichungen. Dieser Umstand macht die Lösung von strömungsmechanischen Stabilitätsproblemen ungleich schwieriger.

Tatsächlich ist das Reynoldsche Experiment noch nicht vollständig verstanden.

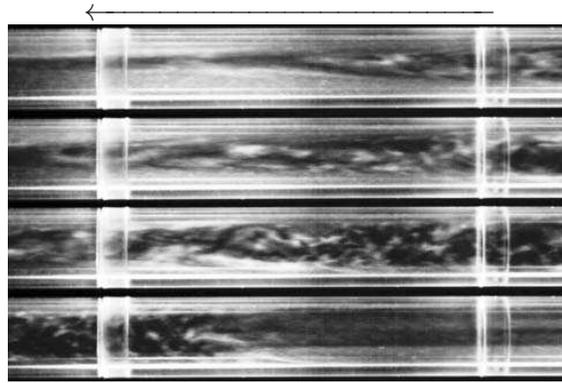


Figure 1.12.: Turbulenter Flecken (*puff*) bei $Re_m = 2300$ nach Mullin & Peixinho (2006). Die Aufnahme zeigt ein und dasselbe Rohrsegment zu verschiedenen äquidistanten Zeiten mit Zeitabstand von $\Delta t = 1$ s (von oben nach unten). Die Strömung ist von rechts nach links.

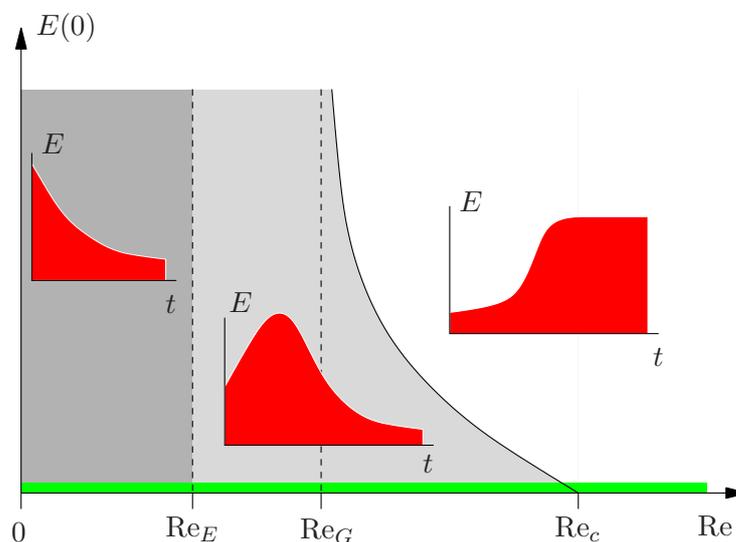


Figure 1.13.: Generelle Klassifikation von Stabilitätsgrenzen. Eine Grundströmung ist global und monoton stabil für $Re < Re_E$, global stabil für $Re < Re_G$, bedingt stabil für $Re < Re_c$. Das grüne Gebiet soll den Bereich infinitesimaler Störungen der Anfangswerte symbolisieren.

Denn die lineare Stabilitätsanalyse führt zu dem Ergebnis, daß der laminare Grundzustand (Hagen-Poiseuille-Strömung) stabil für *alle* Reynoldszahlen ist (für kleine Störungen). Wenn man die kinetische Energie einer anfänglichen Störung verwendet, kann man das Verhalten qualitativ anhand von Abb. 1.13 klassifizieren. Ist die Reynoldszahl hinreichend klein ($Re < Re_E$), dann klingt die Energie alle Störungen monoton ab, unabhängig von ihrer Struktur und Intensität. Die Grundströmung ist dann *global monoton stabil*. Auch für $Re < Re_G$ klingt die Energie alle Störungen ab, aber nicht notwendiger-

1. Motivation

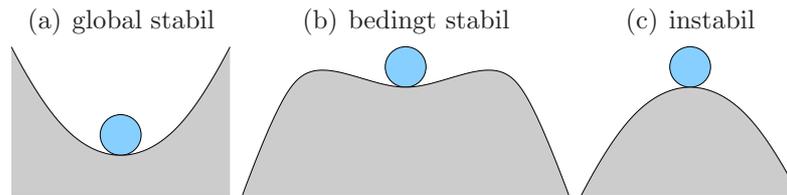


Figure 1.14.: Gleichgewichtslagen eines Massenpunktes in verschiedenen Potentialen.

Strömung	Re_E	Re_G	Re_T	Re_c
Hagen-Poiseuille-Strömung	81.5	$\leq 1250^a$	≈ 2000	∞
Ebene Poiseuille-Strömung	49.6	—	≈ 1000	5772
Ebene Couette-Strömung	20.7	125	$\geq 440^b$	∞

Table 1.1.: Einige kritische Reynoldszahlen für parallele wandbegrenzte Scherströmungen nach Schmid & Henningson (2001). Die Längenskala in der Definition der Reynoldszahl ist die halbe Kanalweite bzw. der Radius (siehe auch Joseph (1976a) und Drazin & Reid (1981)). Re_T bezeichnet die niedrigste Reynoldszahl, bei der Turbulenz beobachtet wurde. ^a: Eckhardt et al. (2007), ^b: Schneider et al. (2010).

weise monoton. Die Grundströmung ist hier nur noch *global stabil*. Es kann über einen gewissen Zeitraum zu einem *transienten Wachstum* der Energie kommen.⁸ Für $Re < Re_c$ ist die Grundströmung *bedingt stabil*. Hier hängt es von der Energie und Struktur der anfänglichen Störung ab, ob sie für $t \rightarrow \infty$ abklingt oder nicht. Für $Re > Re_c$ ist die Grundströmung instabil. Die zeitliche Entwicklung führt dann zu einem neuen Zustand, der durch nichtlineare Effekte bestimmt ist. Dieser *superkritische Zustand* kann stationär oder zeitabhängig sein.

Die lineare Stabilitätsgrenze ergibt sich aus dem Langzeitverhalten kleiner Störungen für $t \rightarrow \infty$. Für die Hagen-Poiseuille-Strömung ist $Re_c = \infty$. Eine triviale Veranschaulichung des Konzepts der Stabilität ist in Abb. 1.14 dargestellt, die einen Massenpunkt im Gleichgewicht in verschiedenen Potentialen zeigt.

Einige der so definierten Reynoldszahlen sind in Tabelle 1.1 für verschiedene elementare Strömungen angeführt. Man sieht, daß die Reynoldszahl Re_E , unterhalb der alle Störungen monoton abklingen, sehr niedrig ist. Für die ebene Couette-Strömung ist $Re_G \neq Re_E$, d.h. es existiert ein Gebiet, in dem die Strömung global stabil ist, nicht aber monoton stabil. Re_T bezeichnet hier die niedrigste Reynoldszahl für welche *turbulentes* Verhalten möglich ist.⁹

⁸Das transiente Wachstum kann sehr stark sein und wurde in letzter Zeit intensiv untersucht (siehe zum Beispiel Schmid & Henningson 2001).

⁹Oft wird schon ein chaotisches Verhalten der Strömung als turbulent bezeichnet. Eigentlich ist eine Strömung dann turbulent, wenn sehr viele Raum- und Zeitskalen auftreten (breitbandiges Spektrum) und alle Korrelationsfunktionen exponentiell mit der Zeit zerfallen. Eine chaotische Dynamik ist aber auch schon für Systeme möglich, die nur 3 Freiheitsgrade der Bewegung besitzen.

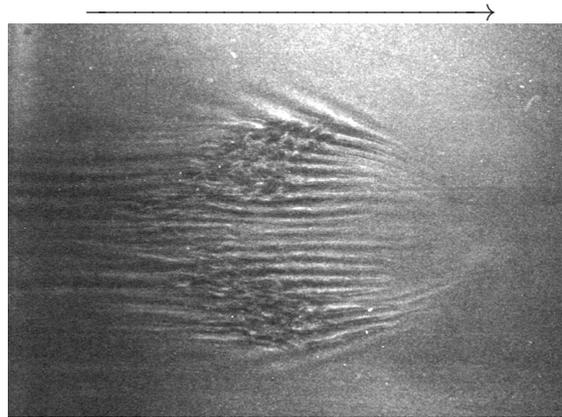


Figure 1.15.: Turbulenter Flecken in der ebenen Poiseuille-Strömung nach [Carlson et al. \(1982\)](#). Der Fleck wurde erzeugt, indem Fluid durch kleine Wandbohrungen injiziert wurde. Die Reynoldszahl von $Re = 1000$ basiert auf der Maximalgeschwindigkeit der laminaren Strömung und der halben Kanalweite. Die Strömungsrichtung ist von links nach rechts.



Figure 1.16.: Dynamik eines turbulenten Fleckens in einer Plattengrenzschicht nach [Homsy et al. 2000](#).

Im Gegensatz zur Rohrströmung wird die ebene Poiseuille-Strömung bei der endlichen Reynoldszahl $Re_c = 5772$ instabil. Trotz dieses Unterschieds ist das Szenario beim Übergang in die Turbulenz ähnlich wie bei der Rohrströmung, denn der Umschlag findet schon bei $Re_T \approx 1000$ statt. Auch existieren in den betrachteten Rohr- und Kanalströmungen turbulente Flecken, wie in [Abb. 1.15](#) gezeigt. Das Video in [Abb. 1.16](#) zeigt einen turbulenten Flecken in einer Plattengrenzschicht.

Für die in der [Tabelle 1.1](#) aufgeführten elementaren Strömungstypen existieren neben der laminaren Strömung noch weitere laminare Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen, die aber eine geringere Symmetrie und feinere Strukturen aufweisen. Diese nichttrivialen laminaren Lösungen sind jedoch instabil und entziehen sich

daher der direkten Beobachtung. Sie sind jedoch für die Dynamik (zeitliche Entwicklung) der turbulenten Strömung bei Reynoldszahlen im Übergangsbereich sehr wichtig.

1.3. Methodische Ansätze

Die Methoden zur Behandlung der Probleme der hydrodynamischen Stabilität lassen sich auch auf viele andere Gebiete übertragen. Ihnen gemeinsam ist die Tatsache, daß die Probleme durch nichtlineare partielle Differentialgleichungen beschrieben werden. In unserem Falle sind es die Navier-Stokes-Gleichungen. Generell haben sich die folgenden Ansätze herausgebildet.

- **Naturerscheinungen und Labor-Experimente** Die Natur ist und bleibt der Maßstab der wissenschaftlichen und technischen Auseinandersetzung mit der hydrodynamischen Stabilität. Gezielte Experimente versuchen bestimmte Phänomene zu isolieren, um sie zu messen und einer theoretischen Analyse zugänglich zu machen (Analyse (*ανάλυση*) = Auflösung in Einzelbestandteile).
- **Numerische Simulation** Mit der numerischen Simulation soll die Natur nachgebildet werden. Der Vorteil der Simulation liegt in einem uneingeschränkten Zugang zu allen relevanten physikalischen Daten. Hierdurch wird die Interpretation und die Bildung einer Theorie wesentlich unterstützt. Im Experiment sind normalerweise nur ein paar wenige Daten meßbar.
- **Lineare und schwach nichtlineare Theorie** Im Rahmen der linearen Theorie der hydrodynamischen Stabilität werden nur kleine Abweichungen vom Grundzustand betrachtet. Diese Theorie ist die Grundlage für weitführende Analysen. Unter der Voraussetzung kleiner Abweichungen kann man eine systematische Störungsrechnung betreiben, in der die dominanten nichtlinearen Effekte in höherer Ordnung berücksichtigt werden. Wesentliche Elemente dieser Methoden wurden schon im 19ten Jahrhundert entwickelt.
- **Qualitative Theorie nichtlinearer dynamischer Systeme** Ein fluides System können wir als ein nichtlineares dynamisches System mit unendlich vielen Freiheitsgraden auffassen. Oft lassen sich diese unendlichen großen Systeme durch Systeme mit nur wenigen Freiheitsgraden approximieren. Für diese niedrigdimensionalen nichtlinearen Systeme existiert eine qualitative Theorie mit deren Hilfe man das Verhalten klassifizieren kann. Sie bietet damit eine vereinfachte Sichtweise, die bei dem modellhaften Verständnis der komplexen Naturvorgänge sehr hilfreich ist. Dasselbe trifft auch auf die schwach nichtlineare Theorie zu.
- **Stark nichtlineare Theorie** Es gibt einige Methoden (Serrin's Theorem, Ljapunov-Methoden), für welche man nicht die Annahme kleiner Abweichun-

gen vom Grundzustand machen muß. Sie gelten für beliebig große Störungen. Meist führt die stark nichtlineare Theorie auf Extremalaufgaben, deren Lösungen hinreichende Bedingungen für die Stabilität eines Grundzustands oder Schranken für verschiedene Größen liefert.

1.4. Ein Zoo hydrodynamischer Instabilitäten

Es gibt sehr viele hydrodynamische Instabilitäten. In diesem Kapitel (das auch für unsere Zwecke noch unvollständig ist) sollen die wichtigsten Instabilitäten knapp aufgelistet und beschrieben werden. (to do ...).

- Rayleigh-Bénard-Instabilität
- Taylor-Couette-Instabilität
- Görtler-Instabilität
- Kelvin-Helmholtz-Instabilität
- Rayleigh/Plateau-Instabilität
- Rayleigh-Taylor-Instabilität
- Elliptische Instabilität, und ähnliche
- Crow-Instabilität
- Tollmien-Schlichting-Instabilität
- Flammfrontinstabilität - Kuramoto-Sivashinski
- Detonations-Instabilität
- Marangoni-Instabilität
- Hydrothermal-Wellen
- Ringwirbel-Instabilität
- Dean-Instabilität
- Instability of the Pinch / Plasma
- Instabilität von Phasengrenzen, Dentritische Instabilität
- Gravitationsinstabilität?
- Rohrströmungsinstabilität
- Instabilität von Grenzschichten
- Kármánsche Wirbelstraße