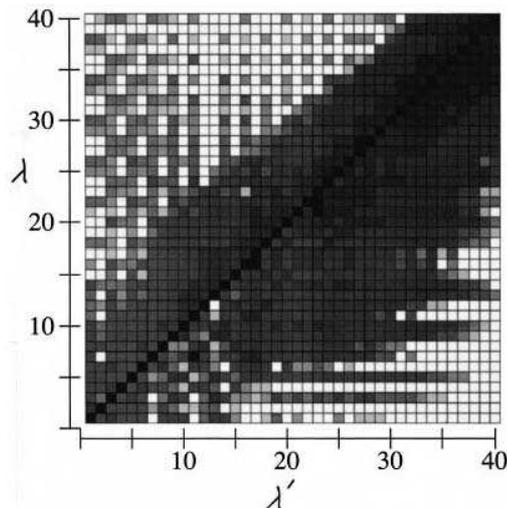


Abbildung 8.6.: Betrag der Überlapp-Matrix $\langle \mathbf{v}_\lambda | \mathbf{v}_{\lambda'} \rangle$ für die normierten Eigenvektoren $|\mathbf{v}_\lambda\rangle$ des linearen Stabilitätsproblems der zylindrischen Couette-Strömung bei Rotation des Außenzylinders ($\Omega_1 = 0, \Omega_2 \neq 0$) nach Gebhardt and Grossmann (1993), dargestellt in Graustufen. Der Parameter λ numeriert die Eigenvektoren. Die obere Dreiecksmatrix ist das Ergebnis für $\text{Re}_2 = 10^4$, während die untere Matrix für $\text{Re}_2 = 5000$ erstellt wurde. Die azimutalen und normierten axialen Wellenzahlen sind $m = 2$ und $k = \pi/2$.



zeitliche Verhalten der Lösung seien an einem einfachen Beispiel erläutert, welches eine ähnliche Struktur besitzt wie die exakten linearen Störungsgleichungen für parallele Scherströmungen. Es sei

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{\text{Re}} & 0 \\ 1 & -\frac{2}{\text{Re}} \end{pmatrix}}_{\mathcal{L}} \cdot \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix}, \quad (8.6)$$

wobei v und ω der Geschwindigkeit und Vortizität in y -Richtung entsprechen (vgl. (8.31)). Mit dem Ansatz $\mathbf{v} = (v, \omega)^T = (\hat{v}, \hat{\omega})^T e^{\lambda_n t}$ erhält man die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = -1/\text{Re}$ und $\lambda_2 = -2/\text{Re}$. Wegen $\text{Re} > 0$ ist damit die Null-Lösung (Grundzustand) linear stabil. Die zugehörigen Eigenvektoren sind

$$\hat{\mathbf{v}}_1 = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1 + \text{Re}^2}}}_{\text{Normierung}} \begin{pmatrix} 1 \\ \text{Re} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (8.7)$$

Für $\text{Re} \rightarrow 0$ werden die beiden Eigenvektoren orthogonal. Für $\text{Re} \rightarrow \infty$ zeigen beide Eigenvektoren hauptsächlich in die y -Richtung. Die Eigenvektoren erfahren dann eine gewisse Bündelung. Es hängt von der jeweiligen Basis ab, ob ein Operator normal ist oder nicht. So kann man zum Beispiel den obigen Operator \mathcal{L} durch die Transformation $\mathcal{T}^{-1} \cdot \mathcal{L} \cdot \mathcal{T}$ mit $\mathcal{T} = [\hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\mathbf{v}}_2]^T$ diagonalisieren. Die transformierten Eigenvektoren $\mathcal{T}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{v}}_i \cdot \mathcal{T}$ sind dann orthogonal.⁴

Die Nicht-Normalität der linearen Operatoren für die Abweichungen von der ebenen Couette-Strömung oder der ebenen Poiseuille-Strömung hat wichtige Konsequenzen für die Dynamik des Zerfalls spezieller Anfangszustände. Sei $\mathbf{v}(t = 0) =$

⁴Die Eigenmoden werden häufig Normalmoden genannt, obwohl sie in Wirklichkeit nicht immer normal, d.h. orthogonal, sind.

8. Übergang zur Turbulenz

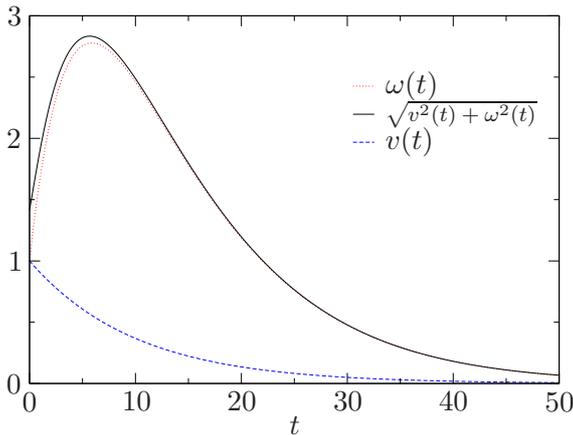


Abbildung 8.7.: Transientes Wachstum der Vortizität ω und der Amplitude $(v^2 + \omega^2)^{1/2}$ nach (8.8) für $(v_0, \omega_0)^T = (1, 1)^T$ und $\text{Re} = 10$.

$(v_0, \omega_0)^T$. Die allgemeine Lösung des Modellsystems (8.6) lautet

$$\begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix} = v_0 \begin{pmatrix} 1 \\ \text{Re} \end{pmatrix} e^{-t/\text{Re}} + (\omega_0 - v_0 \text{Re}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t/\text{Re}}. \quad (8.8)$$

Wegen der Exponentialfaktoren ist man geneigt zu sagen, daß sowohl $v(t)$ als auch $\omega(t)$ exponentiell zerfallen. Dies ist richtig für die v -Komponente. Für die ω -Komponente gilt aber

$$\omega(t) = v_0 \text{Re} e^{-t/\text{Re}} + (\omega_0 - v_0 \text{Re}) e^{-2t/\text{Re}} = \omega_0 e^{-2t/\text{Re}} + v_0 \text{Re} (e^{-t/\text{Re}} - e^{-2t/\text{Re}}). \quad (8.9)$$

Der erste Term beschreibt das exponentielle Abklingen der Anfangsstörung ω_0 . Der zweite Term beschreibt die Reaktion von ω auf die Anfangsstörung v_0 . Dieser Beitrag wird umso bedeutender, je größer Re ist. Die Taylorentwicklung des zweiten Terms liefert

$$e^{-t/\text{Re}} - e^{-2t/\text{Re}} = \frac{t}{\text{Re}} - \frac{1}{2} \frac{3t^2}{\text{Re}^2} + \dots \quad (8.10)$$

Diese Entwicklung zeigt, daß die ω -Komponente für kleine Zeiten $t < O(\text{Re})$ *algebraisch anwachsen* kann!

Das Zeitverhalten ist in Abb. 8.7 für $(v_0, \omega_0)^T = (1, 1)^T$ und $\text{Re} = 10$ gezeigt. Für höhere Reynoldszahlen wird das transiente Wachstum noch stärker. Dieses Verhalten ist eine Konsequenz der Nicht-Normalität des Operators \mathcal{L} und der dadurch verursachten Nicht-Orthogonalität der Eigenvektoren. Man beachte den transienten Anstieg der Amplitude von anfänglich $O(1)$ auf $O(\text{Re})$. Die geometrische Erklärung für dieses Verhalten ist in Abb. 8.8 gezeigt. Wenn eine Anfangsstörung in dieselbe Richtung zeigt wie das Bündel der Eigenvektoren, dann klingt sie im wesentlichen ab. Wenn die anfängliche Störung jedoch senkrecht zu der Bündelungsrichtung der Eigenvektoren ausgerichtet ist, kann es zu einem signifikanten transienten Wachstum kommen bevor die Störung zerfällt.

Das transiente Wachstum in Scherströmungen geschieht in analoger Weise: Bei hohen Reynoldszahlen (hoher Geschwindigkeitsgradienten der Grundströmung) können kleine Vertikalströmungen v senkrecht zur Grundströmung $\mathbf{U} = U(y)\mathbf{e}_x$

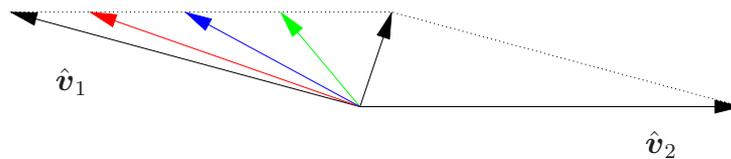


Abbildung 8.8.: Geometrische Erklärung des transienten Wachstums durch den Zerfall zweier fast paralleler Vektoren \hat{v}_1 und \hat{v}_2 , die völlig unterschiedliche Zerfallsraten haben. Die zeitliche Entwicklung der Superposition ist durch Farbe kodiert: Schwarz \rightarrow grün \rightarrow blau \rightarrow rot. Der Zerfall der Komponente v_1 ist auf der kurzen Zeitskala nicht sichtbar.

starke Änderungen in der senkrechten Vortizität ω hervorrufen. Die Vertikalgeschwindigkeit entspricht dabei den *streamwise vortices* und die vertikale Vortizität den *streamwise streaks*.

8.2.3. Transiente Störungen

Wir wollen im folgenden die lineare Dynamik von Störungen der ebene Couette- und der ebenen Poiseuille-Strömung näher betrachten und folgen dabei [Trefethen et al. \(1992\)](#).

Die klassische lineare Stabilitätsanalyse liefert für die ebene Poiseuille-Strömung einen kritischen Wert der Reynoldszahl $Re_c = 5779$. Obwohl für $Re < Re_c$ alle Eigenfunktionen des linearen Stabilitätsproblems, d.h. der Orr-Sommerfeld-Gleichung (6.73), exponentiell abklingen, wird experimentell ein Übergang zur Turbulenz schon bei $Re \approx 1000$ festgestellt. Die ebene Couette-Strömung ist sogar linear stabil für alle Reynoldszahlen. Trotzdem kann man einen Umschlag zur Turbulenz schon bei $Re \approx 350$ feststellen.

Obwohl die Möglichkeit eines *nicht-modalen transienten Wachstums* schon seit [Orr \(1907\)](#) bekannt ist, wurde diesem Prozeß nicht viel Beachtung geschenkt (siehe jedoch [Benney and Gustavsson, 1981](#); [Gustavsson, 1991](#)). Erst [Reddy et al. \(1993\)](#) haben festgestellt, daß sich die linearen Operatoren für die besagten ebenen Scherströmungen exponentiell stark von normalen Operatoren unterscheiden. Damit sind extrem große transiente Wachstumsraten möglich, bei denen die Amplitude um einen Faktor $O(10^3)$ verstärkt wird.

Im Gegensatz zu den gefährlichsten Eigenmoden der Orr-Sommerfeld-Gleichung, die zweidimensional sind (Squire-Theorem, Kapitel 6.2.2), sind die typischen Strömungsstrukturen, die zu starkem transientem Wachstum führen, dreidimensional in dem Sinne, daß sie alle Geschwindigkeitskomponenten involvieren. Es handelt sich dabei um Wirbel, deren Vortizität im wesentlichen in Stromrichtung zeigt (siehe [Abb. 8.9](#) und [Abb. 5.6](#)). Man kann sich leicht vorstellen, daß die mit derartigen Störungen verbundenen vertikalen Störgeschwindigkeiten bei der ebenen Couette-Strömung negativen Impuls der Grundströmung in ein Gebiet mit positivem Grundströmungsimpuls transportieren können. Wenn die Scherung der Grundströmung groß ist, stellt dies einen dramatischen Effekt dar und führt zu den beobachtbaren *streamwise streaks* ([Abb. 5.6](#)). Es stellt sich heraus, daß die Störungen mit Vortizi-

8. Übergang zur Turbulenz

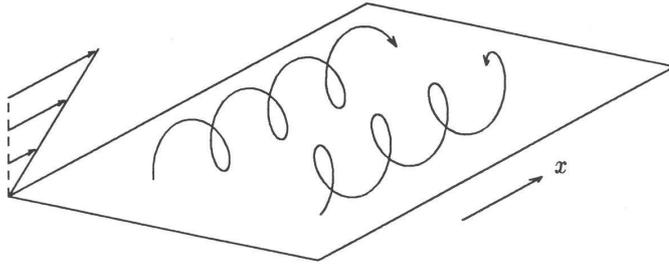


Abbildung 8.9.: Schematische Darstellung der Wirbelstrukturen mit Vortizität in Hauptstromrichtung, welche die sogenannten *streaks* (nicht dargestellt) erzeugen (hier in einer Grenzschicht).

tät in Stromrichtung von \mathbf{U} (*streamwise vortices*) keine Eigenmoden des linearen Problems sind, sondern sogenannte *Pseudo-Moden*. Dieser Begriff soll nun erklärt werden.

8.2.4. Spektren und Pseudospektren: Sensitivität

Wir betrachten die Entwicklungsgleichung infinitesimaler Störungen (6.62a)–(6.62d), die wir in der Form

$$\frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} = -i\mathcal{L} \cdot \mathbf{u}(t) \quad (8.11)$$

schreiben, wobei die \mathbf{x} -Abhängigkeit nicht explizit aufgeschrieben wird.⁵ Der lineare Operator \mathcal{L} sei unabhängig von t .

Der Faktor i wurde aus Bequemlichkeit eingeführt (Definition von \mathcal{L}). Als Maß für die Lösungen definieren wir die *Energienorm*

$$\|\mathbf{u}(t)\| := \left(\int |\mathbf{u}|^2 dV \right)^{1/2}. \quad (8.12)$$

Wir stellen uns nun vor, daß das lineare System (8.11) von einem externen Signal mit komplexer Frequenz $\omega \in \mathbb{C}$ und räumlicher Verteilung $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ angetrieben wird

$$\frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} = -i\mathcal{L} \cdot \mathbf{u}(t) + e^{-i\omega t} \mathbf{v}. \quad (8.13)$$

Die Lösung \mathbf{u} wird dann auch $\sim e^{-i\omega t}$ sein: $\mathbf{u}(t) = i\mathbf{u}e^{-i\omega t}$, also

$$\omega \mathbf{u} = \mathcal{L} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v}. \quad (8.14)$$

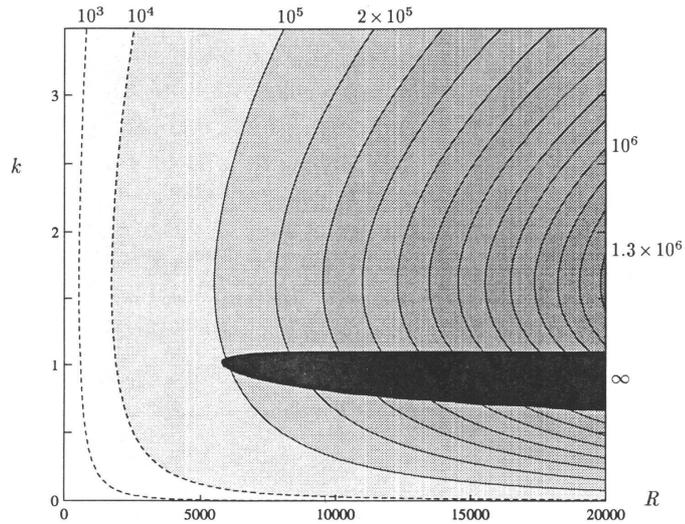
Diese Gleichung kann man formal nach \mathbf{u} auflösen

$$\mathbf{u} = (\omega \mathcal{I} - \mathcal{L})^{-1} \cdot \mathbf{v}, \quad (8.15)$$

mit der Einheitsmatrix \mathcal{I} . Der Operator $(\omega \mathcal{I} - \mathcal{L})^{-1}$ wird als *Resolvente* bezeichnet. Sie transformiert den *input* \mathbf{v} mit Frequenz ω in den *output* \mathbf{u} .

⁵Dabei ist $\mathbf{u}(x, y, z, t)$ das Geschwindigkeitsfeld der infinitesimalen Störung. Um zu Gleichungen zu kommen, die nur die Geschwindigkeit enthalten, muß man den Druck eliminieren. Siehe dazu Kapitel 8.2.9.

Abbildung 8.10.: Maximal mögliche resonante Verstärkung $\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \|(\omega \mathcal{I} - \mathcal{L})^{-1}\|$ nach (8.16) (im Rahmen der linearisierten Gleichungen) von Störungen in der ebenen Poiseuille-Strömung als Funktion von Re und $k = \sqrt{k_x^2 + k_z^2}$. Im schwarzen Gebiet ist die Poiseuille-Strömung linear instabil. Die Verstärkungsfaktoren sind durch Isolinien gekennzeichnet: $10^3, 10^4$: (- - -), sowie $10^5, 2 \times 10^5, \dots$ (nicht äquidistant) (nach Trefethen et al., 1992).



Das Verhältnis von $\|\mathbf{u}\|$ zu $\|\mathbf{v}\|$ ist ein Maß für Verstärkung des Antriebs. Die maximal mögliche Verstärkung wird als *Operatornorm* definiert

$$\|(\omega \mathcal{I} - \mathcal{L})^{-1}\| := \sup_{\mathbf{v} \neq 0} \frac{\|\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{v}\|}, \tag{8.16}$$

und hängt von ω ab. Da man jeden beliebigen zeitabhängigen Antrieb in Fouriermoden zerlegen kann, ist man besonders am Verhalten für reelle Frequenzen ω interessiert. Die Bedeutung der Verstärkung wird klar, wenn $\omega \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von \mathcal{L} ist.⁶ Dann ist $(\omega \mathcal{I} - \mathcal{L}) = 0$ und die Verstärkung wird unendlich groß. Das lineare System wird resonant angetrieben.

Für nahezu resonanten Antrieb ist ω kein Eigenwert mehr, aber ein sogenannter Pseudo-Eigenwert: Für $\epsilon \geq 0$ ist ω ein *ϵ -Pseudo-Eigenwert* von \mathcal{L} , wenn die Verstärkung $\|(\omega \mathcal{I} - \mathcal{L})^{-1}\| \geq \epsilon^{-1}$ ist. Entsprechend ist \mathbf{u} eine *ϵ -Pseudo-Eigenfunktion*, wenn $\|(\mathcal{L} - \omega \mathcal{I}) \cdot \mathbf{u}\| \leq \epsilon \|\mathbf{u}\|$ ist.

In der Nähe von Resonanzen (ϵ klein) können sehr große Verstärkungsraten erzielt werden, so daß eventuell das Rauschen oder apparative Störungen (*imperfections*) signifikant verstärkt werden können. Bei der ebenen Poiseuille-Strömung für $\text{Re} = 5000$ ist zum Beispiel ein *streamwise streak* eine ϵ -Pseudo-Mode zu $\epsilon = 1.2 \times 10^{-5}$ und kann daher durch einen Wirbel in Stromrichtung angetrieben werden, der fünf Größenordnungen schwächer ist (siehe Abb. 8.10).

Die Menge aller ϵ -Pseudo-Eigenwerte eines Operators \mathcal{L} wird als *Pseudo-Spektrum*⁷ Λ_ϵ definiert

$$\Lambda_\epsilon(\mathcal{L}) := \{\omega \in \mathbb{C} : \|(\omega \mathcal{I} - \mathcal{L})^{-1}\| \geq \epsilon^{-1}\}. \tag{8.17}$$

Die Mengen der Pseudo-Spektren sind in der komplexen ω -Ebene ineinander geschachtelt. Dabei ist $\Lambda_0(\mathcal{L}) = \Lambda(\mathcal{L})$ identisch mit dem Spektrum $\Lambda(\mathcal{L})$ von \mathcal{L} .

⁶Bis auf den Faktor $-i$ sind dies auch die Eigenwerte des linearen Problems.

⁷Es besteht eine enge Beziehung zwischen den Pseudospektren und dem transienten Wachstum; siehe Kapitel 8.2.6.

8. Übergang zur Turbulenz

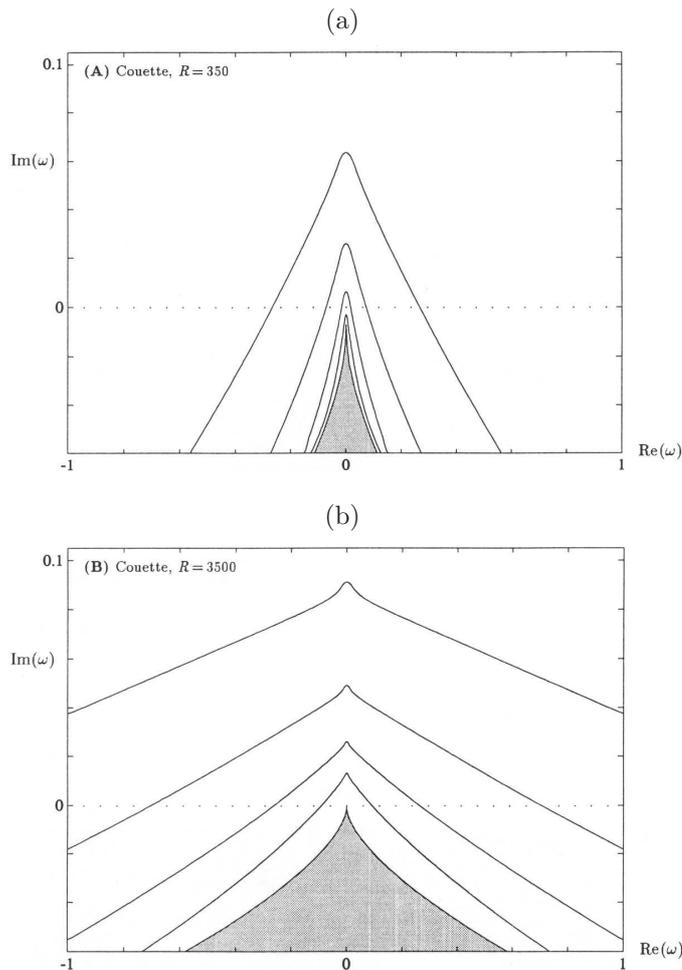
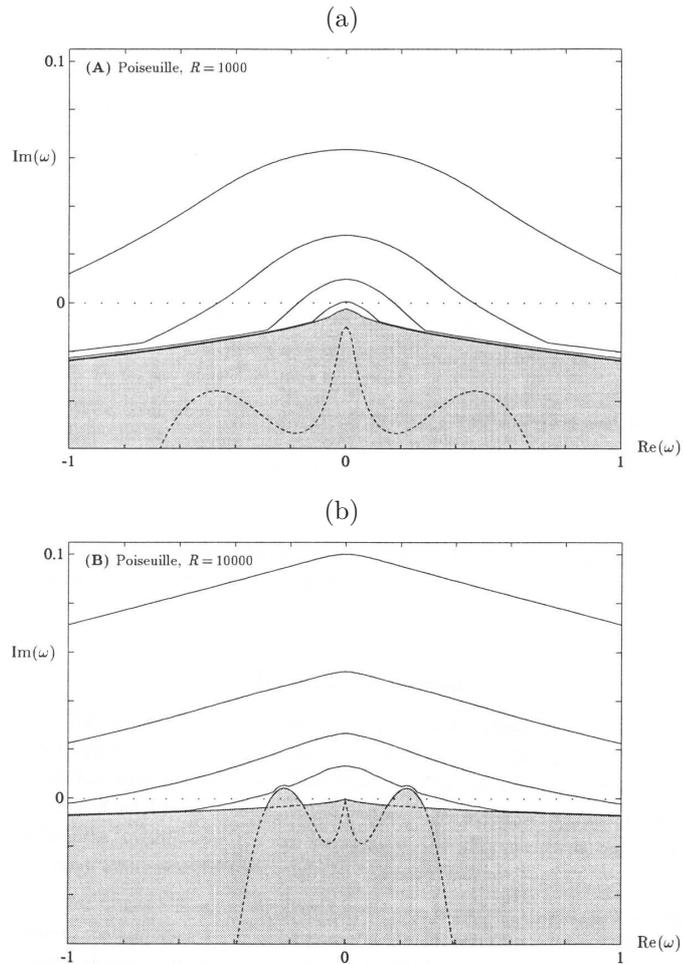


Abbildung 8.11.: Spektrum (schattiert) und Pseudospektrum (Isolinien) der ebenen Couette-Strömung für $Re = 350$ (a) und $Re = 3500$ (b). Die Linien entsprechen den Werten $\epsilon = 10^{-2}$, $10^{-2.5}$, 10^{-3} und $10^{-3.5}$ (von außen nach innen). Obwohl das Spektrum immer unterhalb der reellen Achse bleibt, reicht das Pseudospektrum in die obere Halbebene hinein. Beachte die unterschiedlichen Skalen der beiden Achsen. Auf der Einhüllenden des Spektrums ist $k_z = 0$ (Squire-Theorem) (nach Trefethen et al., 1992).

Wenn \mathcal{L} ein normaler Operator ist, dann besteht $\Lambda_\epsilon(\mathcal{L})$ aus der Menge aller Punkte in der komplexen ω -Ebene, die weniger als ϵ vom Spektrum entfernt liegen. Wenn \mathcal{L} jedoch nicht-normal ist, kann das Pseudo-Spektrum sehr viel größer sein. Für Systeme mit nahezu normalem Operator (Musikinstrumente, schwingungsfähige Strukturen, Molekülschwingungen) sind die Schwingungen sehr stark durch die Resonanzen bestimmt. Für Systeme mit nicht-normalen Operatoren muß man die Pseudo-Spektren untersuchen.

Pseudo-Spektren der ebenen Couette-Strömung sind in Abb. 8.11 gezeigt. Praktisch wurde dabei in Strom- und Spanrichtung eine Fouriertransformation durchgeführt. Für jedes ω muß dann $\|(\omega\mathcal{I} - \mathcal{L}) \cdot \mathbf{u}\|$ über die Wellenzahlen k_x und k_z minimiert werden (Maximierung des Verstärkungsfaktors). Das Spektrum ist für feste Wellenzahlen k_x und k_z diskret, aber die Vereinigung über alle k_x und k_z ist kontinuierlich. Für die Couette-Strömung liegt es immer in der unteren Halbebene, kommt aber für $\Re(\omega) = 0$ dicht an die reelle Achse heran. Der Abstand des Maximums von $\Im(\omega)$ (maximale Wachstumsrate der Eigenmoden) von Null skaliert mit Re^{-1} für $Re \rightarrow \infty$. Im Gegensatz zum Spektrum reichen die Pseudo-Spektren um so weiter in die obere Halbebene hinein, desto größer Re ist. Für die Wellenzahlen

Abbildung 8.12.: Spektrum (schattiert) und Pseudospektrum (Isolinien) der ebenen Poiseuille-Strömung für $Re = 1000$ (a) und $Re = 10^5$ (b). Die Linien entsprechen den Werten $\epsilon = 10^{-2}$, $10^{-2.5}$, 10^{-3} und $10^{-3.5}$ (von außen nach innen). Das Spektrum besteht hier aus zwei Anteilen die durch eine durchgezogene (symmetrische Störungen bzgl. der Mittelebene $y = 0$ des Kanals) und eine gestrichelte Linie (anti-symmetrische Störungen) begrenzt sind (nach [Trefethen et al., 1992](#)).



auf der oberen Berandung des Spektrums ist $k_z = 0$, d. h., die gefährlichsten Moden sind zweidimensional. Im Gegensatz dazu sind die Pseudo-Moden jedoch echt dreidimensional mit $k_z = O(k_x)$!

Für die Poiseuille-Strömung (Abb. 8.12) ist die Situation etwas komplizierter. Das liegt an den beiden Peaks, die für $Re > Re_c = 5772$ symmetrisch mit $k_x \neq 0$ in die obere Halbebene hineinwachsen. Diese Peaks entsprechen den instabilen zweidimensionalen Tollmien-Schlichting-Wellen. Entlang des oberen Randes des Spektrums sowie entlang der gestrichelten Linie ist $k_z = 0$. Die Pseudo-Spektren werden aber praktisch nicht durch die TS-Peaks beeinflusst. Obwohl die Spektren der beiden betrachteten Systeme sehr unterschiedlich sind,⁸ legt die Ähnlichkeit der Pseudo-Spektren ein ähnliches physikalisches Verhalten nahe, was auch experimentell bestätigt wird.

⁸Die Poiseuille-Strömung kann linear instabil sein, während die Couette-Strömung immer linear stabil ist.

8. Übergang zur Turbulenz

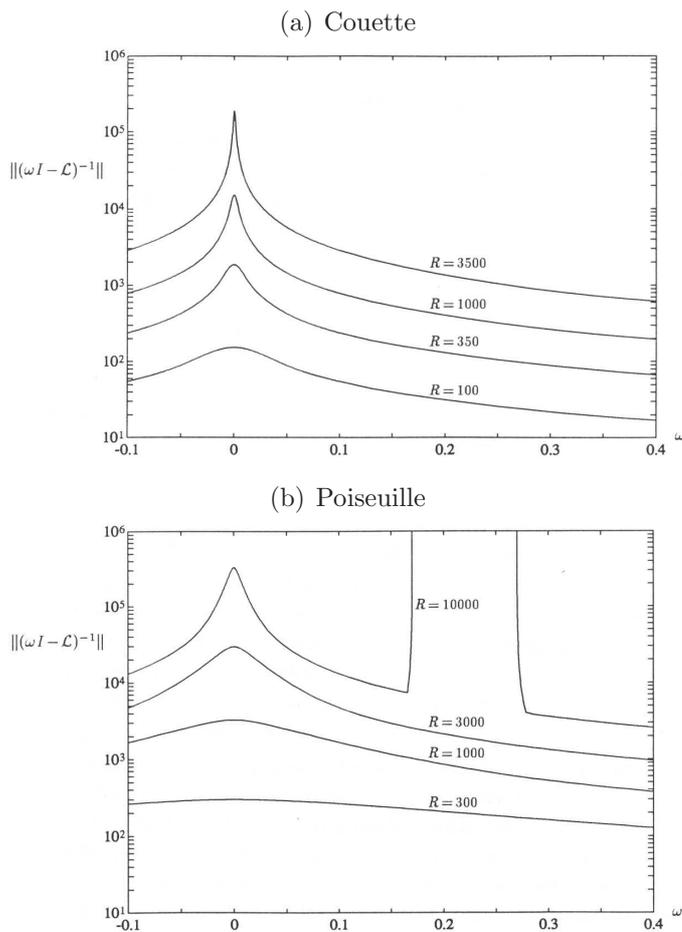


Abbildung 8.13.: Pseudoresonanzen $\|(\omega\mathcal{I} - \mathcal{L})^{-1}\|$ für die Couette- (a) und die Poiseuille-Strömung (b) für verschiedene Reynoldszahlen und für $\omega \in \mathbb{R}$ (entsprechend Schnitten mit $\Im(\omega) = 0$ in Abb. 8.11 und 8.12). Der breite Riesen-Peak in (b) für $\text{Re} = 10^5$ bei $\omega \approx 0.24$ stammt von den Tollmien-Schlichting-Wellen (nach Trefethen et al., 1992).

8.2.5. Pseudo-Resonanzen

Abbildung 8.13 zeigt Schnitte maximaler Verstärkung $\|(\omega\mathcal{I} - \mathcal{L})^{-1}\|$ entlang der reellen Achse, d.h. als Funktion der reellen Anregungsfrequenz ω . Die Peaks bei $\omega = 0$ wachsen mit $O(\text{Re}^2)$ an und werden als *Pseudo-Resonanzen* bezeichnet. Für $\text{Re} > 5772$ treten in der ebenen Poiseuille-Strömung auch die TS-Resonanzen auf. Bei diesen Reynoldszahlen sind aber schon nicht-modale Verstärkungsfaktoren von $\mathcal{O}(10^5)$ möglich, die eventuell schneller anwachsen als die TS-Wellen und daher wichtiger für die Dynamik und den Umschlag in die Turbulenz sein können.

8.2.6. Transientes Wachstum: Das Anfangswertproblem

Der starke Respons der linearisierten Navier-Stokes-Gleichungen gegenüber externen Störungen, ausgedrückt durch die Pseudospektren, zeigt die Sensitivität der Grundströmung gegenüber bestimmten Störungen an. Die Sensitivität hatten wir im Fourier-Raum analysiert. Sie zeigt sich aber auch bei der zeitlichen Entwicklung von Anfangsstörungen.

Mathematisch wird dazu das Anfangswertproblem (8.4) betrachtet

$$\frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} = -i\mathcal{L} \cdot \mathbf{u}(t) \quad \text{für} \quad t \geq 0. \quad (8.18)$$

Die Lösung zur Anfangsbedingung $\mathbf{u}(0) = \mathbf{v}$ kann man schreiben als

$$\mathbf{u}(t) = e^{-it\mathcal{L}} \cdot \mathbf{v}, \quad (8.19)$$

wobei die *Operatorexponentialfunktion* als Reihenentwicklung aufgefaßt werden kann.⁹ Der zeitabhängige maximale Wachstumsfaktor wird definiert als

$$\|e^{-it\mathcal{L}}\| := \sup_{\mathbf{v} \neq 0} \frac{\|\mathbf{u}(t)\|}{\|\mathbf{v}\|}. \quad (8.20)$$

Das *Energiewachstum* ist das Quadrat dieser Größe. Für Eigenmoden mit Spektrum in der unteren Halbebene ist immer $\|e^{-it\mathcal{L}}\| \leq 1$ für $t \geq 0$. Gustavsson (1991) und Butler and Farrell (1992) haben gezeigt, daß das Wachstum für Pseudo-Moden jedoch von der Größe $\|e^{-it\mathcal{L}}\| = O(\text{Re})$ nach einer Zeit $t = O(\text{Re})$ sein kann,¹⁰ womit das Energiewachstum $O(\text{Re}^2)$ ist. Dieses Verhalten ist in Abb. 8.14 gezeigt. Wie man sieht, hat die Einschränkung auf Pseudo-Moden mit Vortizität in Stromrichtung ($k_x = 0$) kaum einen Einfluß auf den Wachstumsfaktor. Die Beschränkung auf zweidimensionale Pseudo-Moden ($k_z = 0$) wirkt sich aber stark aus: In diesem Fall ist das transiente Wachstum viel geringer. Dieser Sachverhalt unterstreicht die Bedeutung der *dreidimensionalen* Pseudo-Moden.

Die Höhe der Pseudo-Resonanzen bei $\omega = 0$ in Abb. 8.13 ist ungefähr gleich dem Integral über die entsprechende Amplitudenkurve in Abb. 8.14. Dies erkennt man folgendermaßen. Offensichtlich gilt die Identität $i \int_0^\infty e^{-it\mathcal{L}} dt = \mathcal{L}^{-1}$. Daraus folgt die Abschätzung $\|\mathcal{L}^{-1}\| \leq \int_0^\infty \|e^{-it\mathcal{L}}\| dt$. In der Praxis unterscheiden sich die rechte und die linke Seite der Ungleichung nur um einen Faktor von ca. 2.

Die Kurven transienten Wachstums sehen für die Poiseuille-Strömung ähnlich aus. Das Wachstum der Eigenmoden für $\text{Re} > 5772$ findet aber auf wesentlich größeren Zeitskalen statt als dasjenige der Pseudo-Moden und wäre daher nicht auf der gezeigten Skala sichtbar! Abb. 8.15 zeigt die Konturlinien maximaler transienter Wachstumsfaktoren in der $\text{Re}-k$ -Ebene. Diese sind analog zu den Konturlinien maximaler Verstärkungsfaktoren des linearen Systems, wenn es durch Inhomogenitäten angetrieben wird (Abb. 8.10).

8.2.7. Einige physikalisch interessante Pseudo-Moden

Die Operatornorm $\|e^{-it\mathcal{L}}\|$ definiert die Einhüllende der zeitabhängigen Amplitudenkurven für alle möglichen Anfangszustände. Von besonderem Interesse sind aber

⁹Es ist

$$e^{-it\mathcal{L}} \cdot \mathbf{v} = \mathcal{I} \cdot \mathbf{v} - it\mathcal{L} \cdot \mathbf{v} - \frac{1}{2!}t^2\mathcal{L} \cdot \mathcal{L} \cdot \mathbf{v} + \dots$$

¹⁰Die typische Zeit für die Wechselwirkung zwischen Wirbel und *streak* ist $O(\text{Re})$.

8. Übergang zur Turbulenz

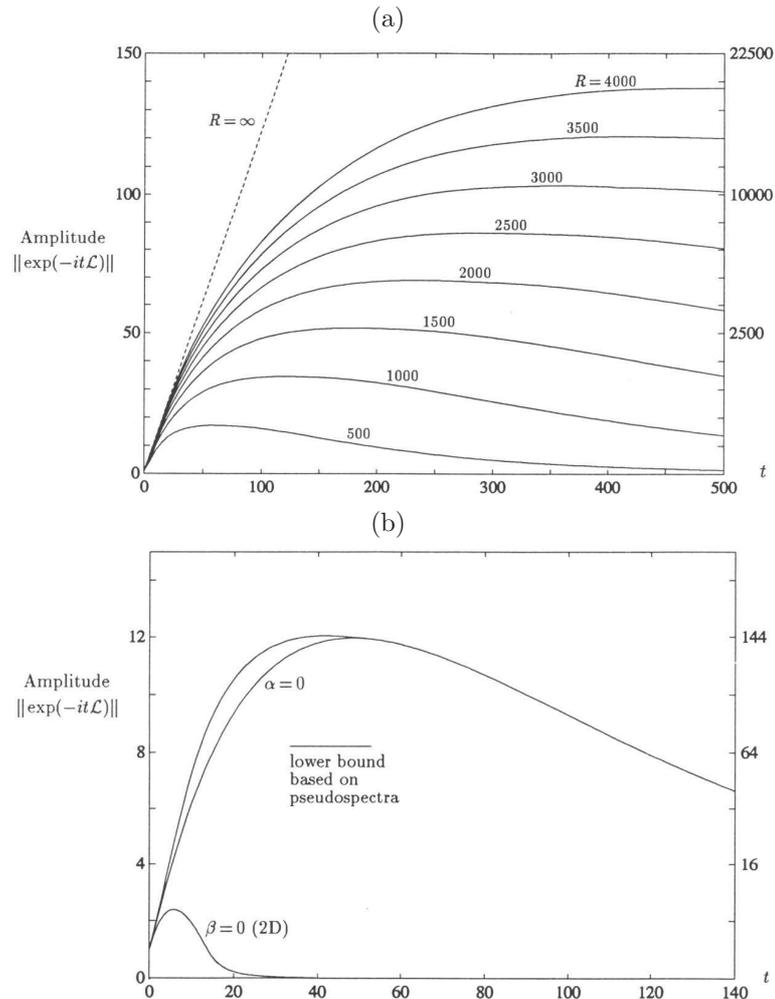
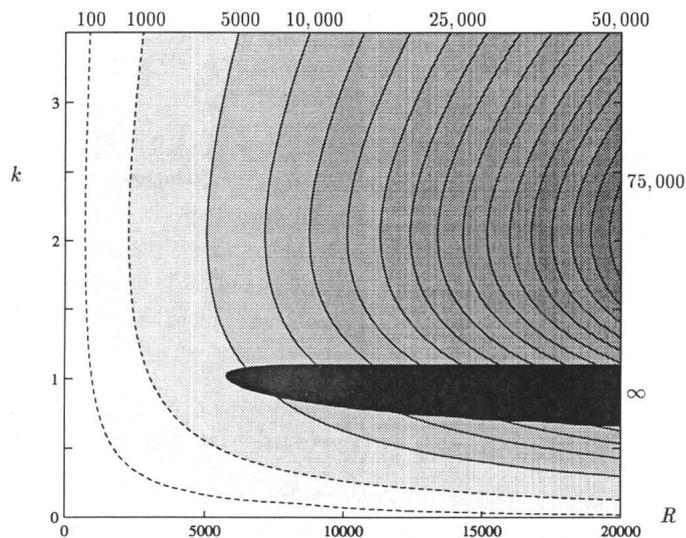


Abbildung 8.14.: Transientes Amplituden-Wachstum für die Couette-Strömung für verschiedene Reynoldszahlen (a) und für $Re = 350$ (b), wobei 2D-Störungen ($k_z = \beta = 0$) sowie Störungen mit $k_x = \alpha = 0$ (Vortizität nur in Stromrichtung) betrachtet wurden. Die rechte Seite zeigt die Energie-Skala $\|\exp(-it\mathcal{L})\|^2$ (nach Trefethen et al., 1992).

zum Beispiel der Anfangszustand (Störung), der zum Zeitpunkt $t = 0$ das stärkste Wachstum aufweist, sowie die Störung, die im Laufe der Zeit die höchstmögliche Amplitude erreicht, oder die Pseudo-Mode, die der Pseudo-Resonanz entspricht. Diese Störungen ergeben sich als rechte Haupt-Singulärvektoren der folgenden Ope-

Abbildung 8.15.: Transiente Energie-Wachstumsfaktoren $\sup_{t \geq 0} \|\exp(-it\mathcal{L})\|^2$ für die Poiseuille-Strömung. Diese Abbildung ist analog zu Abb. 8.10 ($k = \sqrt{k_x^2 + k_z^2}$), welche die resonanten Wachstumsfaktoren $\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \|(\omega\mathcal{I} - \mathcal{L})^{-1}\|$ zeigt (nach Trefethen et al., 1992).



ratoren¹¹

- $v_1 : e^{-i0^+\mathcal{L}}$ (Maximales Anfangswachstum),
- $v_2 : e^{-it_{\text{opt}}\mathcal{L}}$ (Maximales Totalwachstum),
- $v_3 : \mathcal{L}^{-1}$ (Maximale Resonanz).

Das Zeitverhalten dieser Störungen in der Couette-Strömung ist in Abb. 8.16 für $Re = 350$ gezeigt. Die Berechnung der Kurven erfolgt üblicherweise durch Singulärwertzerlegung (*singular value decomposition* (SVD), siehe Golub and van Loan (1989)). Alle drei Pseudo-Moden haben ein Amplitudenwachstum von vergleichbarer Größenordnung. Auch ihre räumliche Struktur ist ähnlich. Die Pseudo-Moden bestehen aus Wirbeln, die nahezu in Stromrichtung ausgerichtet sind und die bekannten *streaks* verursachen. Die Kurven für die Poiseuille-Strömung sehen ähnlich aus.

Der durch das transiente Wachstum von Anfangsstörungen verursachte Übergang wird in der Literatur auch häufig als *bypass transition* bezeichnet. Dadurch soll zum Ausdruck gebracht werden, daß der Übergang in die Turbulenz nicht über die sonst beobachteten Instabilitäten geschieht. Manchmal wird auch der Begriff *algebraische Instabilität* im Gegensatz zur konventionellen exponentiellen Instabilität verwendet.

8.2.8. Bemerkungen zum Limes $\nu \rightarrow 0$

Die klassischen Stabilitätsanalysen ebener Scherströmungen auf der Basis sowohl idealer wie auch viskoser Fluide sind nicht in der Lage, die beobachteten Phäno-

¹¹ Für die auf der euklidischen Norm beruhende Spektralnorm gilt

$$\|\mathcal{L}\|^2 = \max_{\|x\|=1} \|\mathcal{L}x\|^2 = \max_{\|x\|=1} \langle \mathcal{L}x, \mathcal{L}x \rangle = \max_{\|x\|=1} \langle \mathcal{L}^\dagger \mathcal{L}x, x \rangle = \mu_{\max}.$$

Die Matrix $\mathcal{L}^\dagger \mathcal{L}$ ist eine positiv semidefinite hermitesche Matrix (im reellen Fall symmetrisch) und μ_{\max} ihr maximaler Eigenwert. Die Wurzeln der Eigenwerte von $\mathcal{L}^\dagger \mathcal{L}$ werden als Singulärwerte bezeichnet.

8. Übergang zur Turbulenz

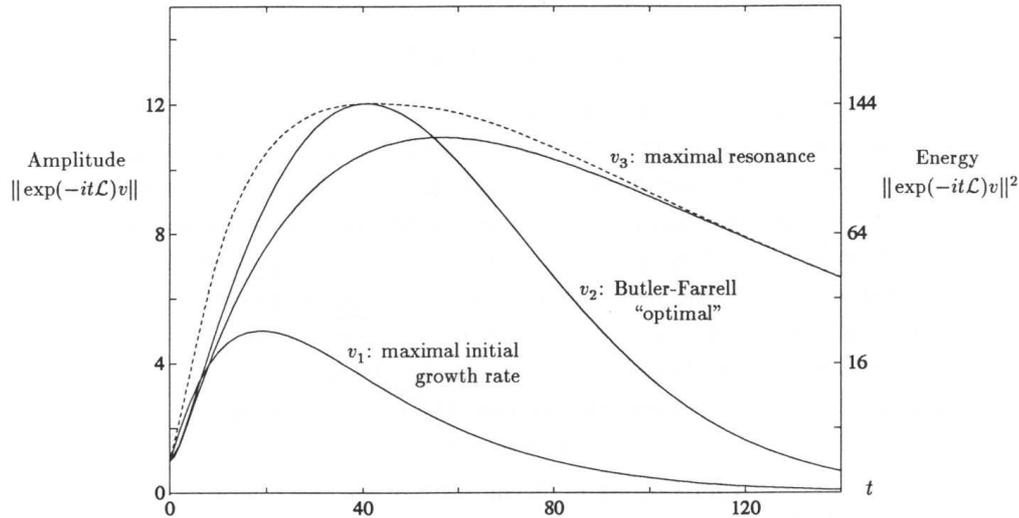


Abbildung 8.16.: Zeitverhalten dreier spezieller Anfangswerte in der ebenen Couette-Strömung für $Re = 350$: Maximales anfängliches Wachstum, maximales Wachstum und maximale Resonanz. Die gestrichelte Kurve ist die Operator-Norm (8.20) (siehe auch Abb. 8.14b) (nach Trefethen et al., 1992).

mane des Umschlags richtig zu beschreiben. Insbesondere sollten im Limes $\nu \rightarrow 0$ inertielle Prozesse wichtig sein. Außerdem sollten nach dem Rayleigh-Kriterium (für reibungsfreie Fluide) sowohl die Couette- wie auch die Poiseuille-Strömung linear stabil sein, da die Geschwindigkeitsprofile keine Wendepunkte besitzen. Die Strömungen sind bei asymptotisch hohen Reynoldszahlen aber definitiv instabil.

Dies liegt vor allem daran, daß diese Theorien (Rayleigh- und Squire-Kriterium) auf der Analyse von Eigenwerten beruhen. Diese Theoreme sind mathematisch korrekt, aber irreführend. Denn wenn man die Stabilität mit Hilfe des Energie-Wachstums definiert, sind alle ebenen Scherströmungen für $\nu = 0$ instabil, unabhängig vom Geschwindigkeitsprofil. Diese Beobachtung geht auf Ellingsen and Palm (1975) zurück.

Um dies zu sehen, betrachten wir die ebene Couette-Strömung. Für $k_x = 0$ (2D-Störungen in der (y, z) -Ebene) erhält man für die (nur y -abhängigen) Fourier-Komponenten der Störgeschwindigkeit und -vortizität in y -Richtung im Limes $Re \rightarrow \infty$ (siehe (8.29a)–(8.29b))

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \tilde{v} \\ \tilde{\omega} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -ik_z & 0 \end{pmatrix}}_{=\mathcal{L}} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{v} \\ \tilde{\omega} \end{pmatrix}. \quad (8.21)$$

Die hier auftretende Matrix \mathcal{L} ist nicht diagonalisierbar! Wegen $\mathcal{L}^n = 0$ für $n \geq 2$ sieht man direkt, daß $\|\exp(-it\mathcal{L})\| = \mathcal{I} - it\mathcal{L}$, was für $t \rightarrow \infty$ wie $\sim C(k_z)t$ skaliert. Daher ist die reibungsfreie ($\nu = 0$) Couette-Strömung linear instabil, obwohl es kein exponentielles Wachstum gibt (vgl. auch Kapitel 5.2.3). Dieses *algebraische Wachstum* ist in Abb. 8.14a als gestrichelte Linie dargestellt. Numerische Rechnungen haben gezeigt, daß der Grenzübergang $Re \rightarrow \infty$ glatt ist. Trefethen et al.