

Wir hatten oben gesehen, daß der Pfad  $F_k$  entlang der reellen  $k$ -Achse möglich ist und für  $\omega \in L_\omega$  keine verallgemeinerten räumlichen Zweige kreuzt.<sup>13</sup> Die räumlichen Moden zerfallen also in zwei Mengen  $K_+$  und  $K_-$ , die oberhalb und unterhalb der reellen  $k$ -Achse liegen.

Um das Verhalten der verallgemeinerten Moden zu studieren, verkleinern wir nun den Imaginärteil von  $L_\omega$  unter den Wert  $\gamma$ . Wie man in Abb. 9.12 sieht, werden dann beide räumlichen Zweige verschoben. Wenn  $\Im(L_\omega) < \gamma$  ist, schneidet ein verallgemeinerter räumlicher Zweig die reelle  $k$ -Achse. Das ist nicht weiter schlimm, denn wir können auch  $F_k$  absenken, so daß die Rücktransformation über den verschobenen Weg  $F_k$  möglich bleibt. Wie man sieht, bleiben auch die zu dem verschobenen Pfad  $F_k$  gehörenden verallgemeinerten zeitlichen Zweige der Dispersionsrelation unterhalb von  $L_\omega$ . Im Laufe der Absenkung von  $L_\omega$  kann es nun passieren, daß sich zwei verallgemeinerte räumliche Zweige annähern. Dann wird der Pfad  $F_k$  abgeklemmt und es bleibt nur noch ein kleiner Spalt, durch den man den Weg  $F_k$  legen kann (Abb. 9.12g). Im Grenzfall (*Pinching*) schließt sich die Lücke (Abb. 9.12i) und wir können keinen Weg  $F_k$  mehr finden, so daß die Fouriertransformation definiert ist. Wir können den Pfad  $L_\omega$  in der komplexen  $\omega$ -Ebene dann nicht mehr weiter absenken (siehe Abb. 9.12k,l).

Wenn das Pinching für  $\Im(L_\omega) < 0$  eintritt (wie in Abb. 9.12), dann ist klar, daß auch der Pfad  $L_\omega$  mit  $\Im(L_\omega) = 0$  möglich ist. Die verallgemeinerten Zweige der Dispersionsrelation, die zu diesem Weg gehören, sind die reinen räumlichen Äste. Das heißt, daß die räumlichen Äste physikalisch Sinn machen. Für die linearisierte GL-Gleichung ist dies der Fall für  $\mu < U^2/2$ . In diesem Fall dominiert der konvektive Effekt (Parameter  $U$ ) über das intrinsische Modenwachstum (Parameter  $U$ ).

Falls jedoch das Pinching schon für  $\Im(L_\omega) > 0$  eintritt, können wir  $\Im(L_\omega) = 0$  nicht erreichen und die räumlichen Moden machen keinen physikalischen Sinn. Für die linearisierte GL-Gleichung ist dies der Fall für  $\mu > U^2/2$ . Dann dominiert das intrinsische Wachstum über den konvektiven Effekt. Störungen breiten sich dann auch stromaufwärts aus (siehe unten). Welcher Fall eintritt, hängt von also den Parametern ab.

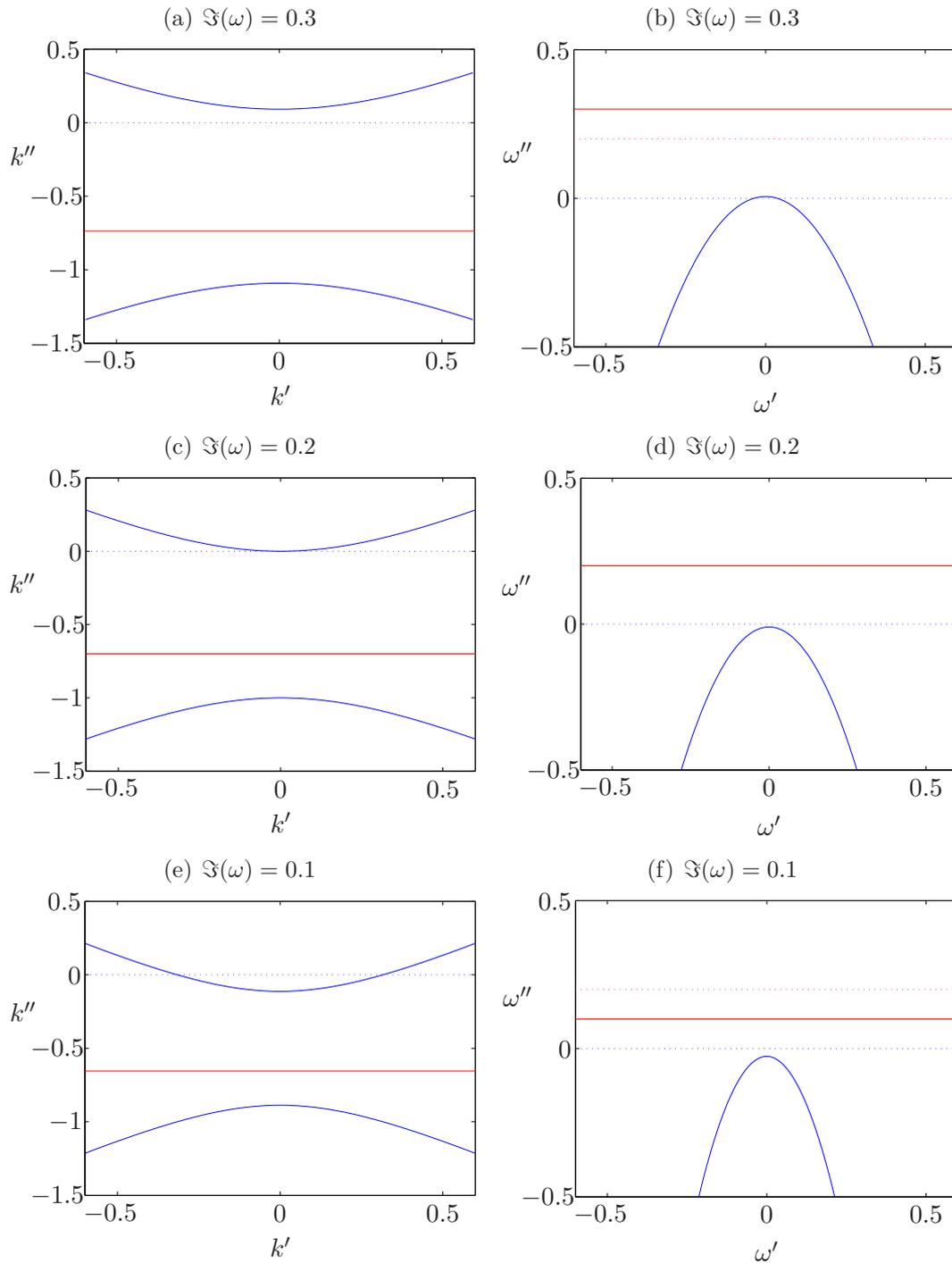
Für die GL-Gleichung können wir den *Pinching*-Punkt  $(k_0, \omega_0)$  berechnen, indem wir schreiben (siehe (9.12))

$$\begin{aligned}
 k_{\pm}(\omega; \mu, U) &= \underbrace{-\frac{iU}{2}}_{k_0} \pm \sqrt{\mu + i\omega - \frac{U^2}{4}} = k_0 \pm \underbrace{\sqrt{i}}_{e^{i\pi/4}} \sqrt{\omega - i \underbrace{\left(\mu - \frac{U^2}{4}\right)}_{\omega_0 = i\omega_0''}} \\
 &= k_0 \pm e^{i\pi/4} \sqrt{\omega - \omega_0}.
 \end{aligned}
 \tag{9.32}$$

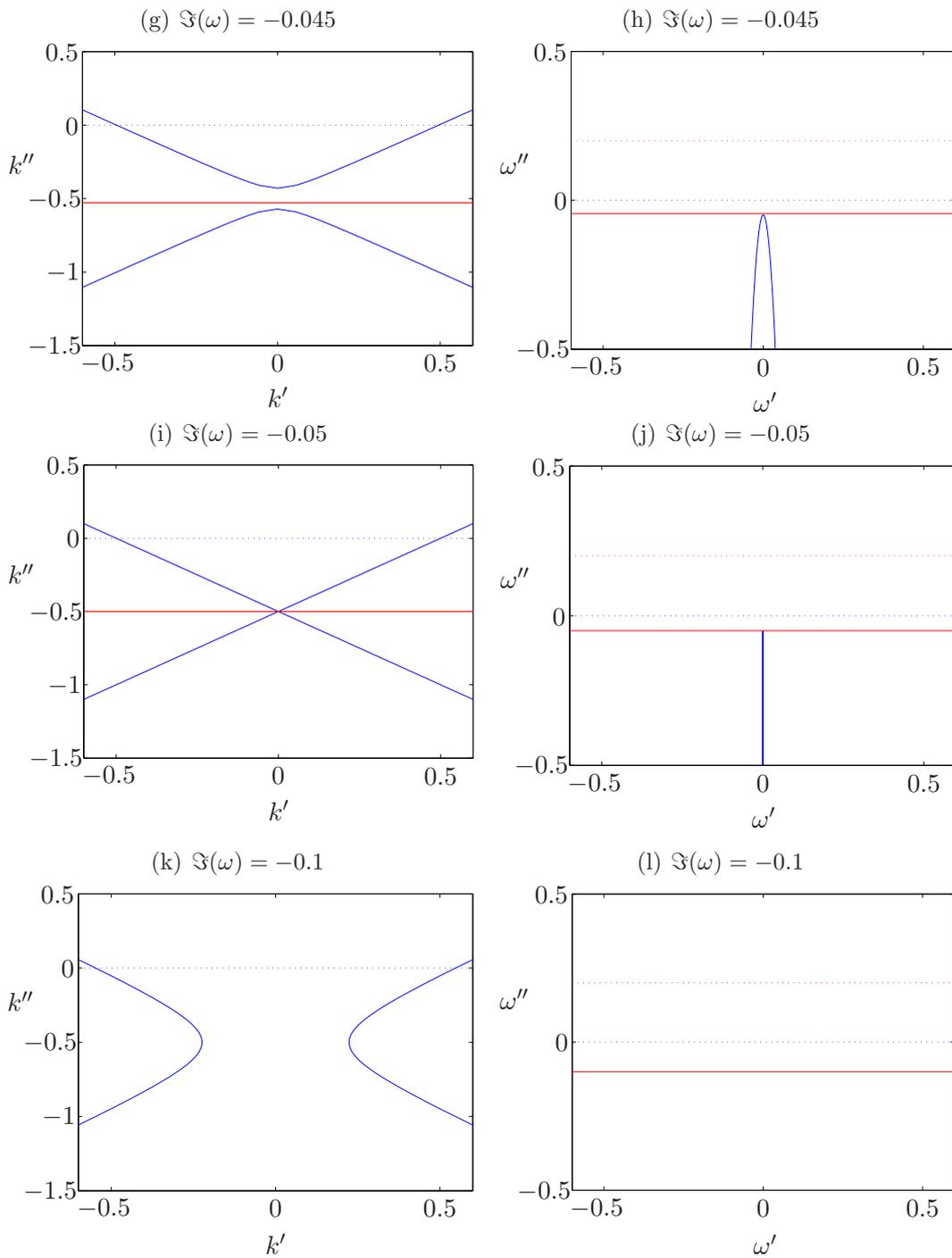
Man sieht, daß der Spalt für  $\omega \rightarrow \omega_0$  verschwindet. Der Wert von  $\omega_0''$  hängt von  $\mu$  und  $U$  ab. Er ist negativ, solange  $\mu < U^2/4$ . Unter dieser Bedingung (dominierende

<sup>13</sup>Wenn der Pfad  $F_k$  durch einen räumlichen Ast gekreuzt würde, würde der  $k$ -Wert ( $\in \mathbb{R}$ ) am diesem Punkt zu einer zeitlichen Mode gehören. Dies kann aber nicht sein, denn wir haben  $L_\omega$  so gelegt, daß der Pfad sicher oberhalb aller zeitlichen Zweige liegt.

## 9. Absolute und konvektive Stabilität

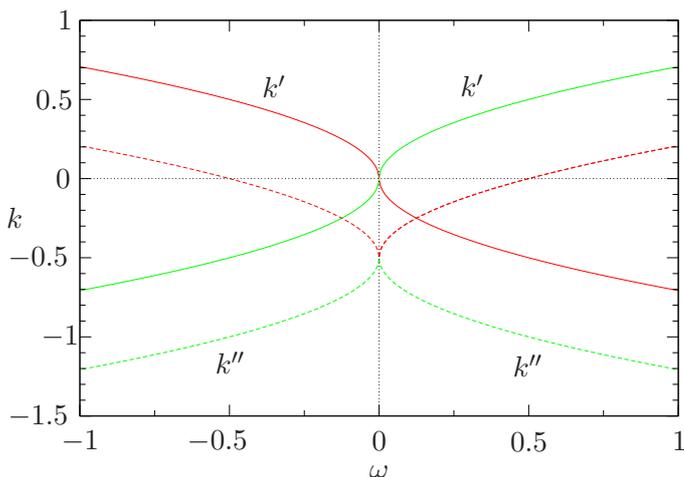


**Abbildung 9.6.:** Räumliche (links) und zeitliche Zweige (rechts) der Dispersionsrelation (9.12) der GL-Gleichung (blau) für  $U = 1$  und  $\mu = 0.2$  bei Absenkung des Pfades  $L_\omega$  (rechte Spalte), wobei  $\Im(\omega) = 0.3, 0.2, 0.1, -0.045, -0.05$  und  $-0.1$  (von oben nach unten). Die Integrationspfade  $L_\omega$  und  $F_k$  sind rot dargestellt. Die gepunktete rote Linie ist  $i\gamma$  entsprechend dem Pfad  $C_0$ . Das Pinching passiert für diese Parameter bei  $\Im(\omega) = -0.05$ . Siehe auch nächste Seite.



Noch Abbildung 9.6.: Siehe vorhergehende Seite.

## 9. Absolute und konvektive Stabilität



**Abbildung 9.7.:** Bildung einer Kuspensingularität im Real- (durchgezogen) und Imaginärteil (gestrichelt) von  $k(\omega)$  für  $\mu = U^2/4$  und  $U = 1$ . Die Zweige  $+$  und  $-$  sind in grün bzw. rot dargestellt.

Konvektion) machen die räumlichen Zweige Sinn. Für  $\mu > U^2/4$  macht die räumliche Stabilität keinen Sinn mehr. Für  $\mu = U^2/4$ , d.h. für  $\omega_0'' = 0$ , treffen sich beide Zweige  $k_+$  und  $k_-$  an dem *Pinching*-Punkt  $(k_0, \omega_0)$  und die Dispersionsrelation für die räumlichen Zweige (hier ist jetzt  $\omega \in \mathbb{R}$ ) reduziert sich zu

$$\begin{aligned}
 k_{\pm}(\omega) &= -\frac{iU}{2} \pm e^{i\pi/4} \omega^{1/2} = \begin{cases} \pm \cos(\pi/4) \sqrt{\omega} + i \left( \pm \sin(\pi/4) \sqrt{\omega} - \frac{U}{2} \right), \\ \mp \sin(\pi/4) \sqrt{|\omega|} + i \left( \pm \cos(\pi/4) \sqrt{|\omega|} - \frac{U}{2} \right), \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \pm \sqrt{\frac{\omega}{2}} + i \left( \pm \sqrt{\frac{\omega}{2}} - \frac{U}{2} \right), & \omega > 0, \\ \mp \sqrt{\frac{|\omega|}{2}} + i \left( \pm \sqrt{\frac{|\omega|}{2}} - \frac{U}{2} \right), & \omega < 0 \end{cases} \quad (9.33)
 \end{aligned}$$

Die räumlichen Zweige der Dispersionsrelation bilden also eine Kuspensingularität aus (Abb. 9.7). Die Bildung einer Kuspensingularität der räumlichen Zweige ist ein Warnsignal dafür, daß die zwei separaten Mengen  $K_+$  und  $K_-$  miteinander verschmelzen und daß die Kausalität verletzt wird.

### 9.4.5. Zeit-asymptotische Antwort auf einen lokalisierten Impuls

Das Pinching der räumlichen Zweige der Dispersionsrelation hängt mit der Reaktion des Systems auf einen lokalisierten Impuls zusammen, und damit auch mit der absoluten und der konvektiven Instabilität.

Um die Stabilität des Grundzustands  $\psi_0 = 0$  zu untersuchen, müssen wir allgemeine Störungen (9.7) betrachten. Dazu benötigen wir die Greensche Funktion. Also betrachten wir zunächst die Antwort auf einen räumlich und zeitlich lokalisierten Impuls  $S(x, t) = \delta(x)\delta(t)$ . Die Fourier-Transformierte ist 1, denn

$$S(k, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\delta(t) e^{i(\omega t - kx)} dx dt = 1. \quad (9.34)$$

Nach (9.31) gilt für die Antwort auf diesen lokalisierten Impuls  $\psi(x, t) = G(x, t)$  mit

$$G(x, t) = -\frac{i}{2\pi} \sum_j \int_{F_k} \frac{S[k, \omega_j(k)] e^{i[kx - \omega_j(k)t]}}{\partial D / \partial \omega(k, \omega_j(k))} dk = -\frac{i}{2\pi} \int_{F_k} \frac{e^{i[kx - \omega(k)t]}}{\partial D / \partial \omega[k, \omega(k)]} dk \quad (9.35)$$

wobei wir im zweiten Schritt angenommen haben, daß nur ein verallgemeinerter zeitlicher Zweig vorhanden ist, wie für die GL-Gleichung, so daß wir den Index  $j$  weglassen können. Wir nehmen an, daß die Kontur  $F_k$  so gewählt ist, daß sie bei  $(k_0, \omega_0)$  durch die beiden räumlichen Zweige abgeklemmt wird. In diesem Grenzfall hat die Dispersionsrelation  $D(k, \omega) = 0$  eine doppelte Nullstelle bei  $(k_0, \omega_0)$ . Das bedeutet, daß sowohl  $D$  wie auch  $\partial D / \partial k$  verschwinden

$$D(k_0, \omega_0) = \partial_k D(k_0, \omega_0) = 0. \quad (9.36)$$

Dies ist aber äquivalent zu

$$\omega_0 = \omega(k_0) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \omega}{\partial k}(k_0) = 0, \quad (9.37)$$

was man mit Hilfe einer Taylor-Entwicklung von  $D(k, \omega)$  sehen kann.<sup>14</sup> Damit muß  $\omega(k)$  bei  $k = k_0$  ein Extremum haben. Wenn sich die räumlichen Zweige bei  $k = k_0$  berühren und auch den Pfad  $F_k$  (Abb. 9.6i), dann gehört der entsprechende  $\omega$ -Wert  $\omega_0$  zu dem zeitlichen Zweig und muß den Pfad  $L_\omega$  in einem einzigen Punkt berühren (Abb. 9.6j). Da sich  $L_\omega$  oberhalb aller zeitlichen Zweige befinden muß, muß das Extremum bei  $\omega_0 = \omega(k_0)$  ein *globales* Maximum von  $\omega''(k)$  sein. Dieser Punkt entspricht also der zeitlichen Mode mit der größten Wachstumsrate. Für lange Zeiten  $t \rightarrow \infty$  wird sich diese Mode durchsetzen und auch den Betrag von  $G(x, t)$  (9.35) bestimmen. Damit bestimmt diese Mode auch die Stabilität der Grundlösung.

<sup>14</sup>Wir entwickeln  $D(k, \omega)$  um die doppelte Nullstelle  $(k_0, \omega_0)$

$$D(k, \omega) = D(k_0, \omega_0) + (k - k_0)D_k + (\omega - \omega_0)D_\omega + (k - k_0)(\omega - \omega_0)D_{k\omega} + O[(k - k_0)^2] + O[(\omega - \omega_0)^2],$$

wobei wir die Notation  $D_k = \partial_k D(k, \omega)|_{k=k_0, \omega=\omega_0}$  verwendet haben.  $D_\omega$  wird entsprechend definiert. Da  $D = D_k = 0$ , gilt auch  $D_{k\omega} = D_{k\omega\omega} = D_{k\omega\omega\omega} = \dots = 0$  und es verbleibt

$$D(k, \omega) = (\omega - \omega_0)D_\omega + O[(k - k_0)^2] + O[(\omega - \omega_0)^2],$$

oder, wenn wir nach  $\omega$  auflösen und  $D_\omega \neq 0$  ist,

$$\omega = \omega_0 + \frac{1}{D_\omega} \{ D + O[(k - k_0)^2] + O[(\omega - \omega_0)^2] \}.$$

Wenn wir dies nach  $k$  ableiten und bei  $k = k_0$  auswerten, erhalten wir

$$\omega_k = \frac{1}{D_\omega} \left[ \underbrace{D_k}_{=0} + \underbrace{O((k - k_0))}_{\rightarrow 0} \right] = 0.$$

## 9. Absolute und konvektive Stabilität

Wir wollen nun das asymptotische Verhalten von  $G(x, t)$  für  $t \rightarrow \infty$  bestimmen. Die Greensche Funktion (9.35) hat die Form

$$G(x, t) = -\frac{i}{2\pi} \int_{F_k} f(k) e^{-i\omega(k)t} dk, \quad (9.38)$$

wobei hier  $f(k) = e^{ikx} \{\partial D / \partial \omega[k, \omega(k)]\}^{-1}$  ist. Um das Integral mittels sogenannten *steepest descent* zu approximieren, beachten wir, daß die Größe des Integranden durch den Exponentialfaktor  $e^{\omega''(k)t}$  bestimmt wird.<sup>15</sup> Die Funktion  $\omega''(k) = \omega''(k', k'')$  kann man sich als eine Oberfläche in der komplexen Ebene  $(k', k'')$  vorstellen. Um  $k = k_0$  kann man die Funktion  $\omega(k)$  entwickeln ( $\omega_{k_0} = 0$ , siehe (9.37))

$$\omega(k) = \omega_0 + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right|_{k=k_0} (k - k_0)^2 + O[(k - k_0)^3]. \quad (9.39)$$

Mit den Abkürzungen

$$-i \left. \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right|_{k=k_0} = ae^{i\alpha} \quad \text{und} \quad k - k_0 = re^{i\theta} \quad (9.40)$$

können wir dann die Taylor-Reihe (9.39) für  $\omega$  auch schreiben als

$$-i\omega(k) \approx -i\omega_0 + \frac{1}{2} ae^{i\alpha} r^2 e^{2i\theta} = -i\omega_0 + \frac{ar^2}{2} [\cos(\alpha + 2\theta) + i \sin(\alpha + 2\theta)]. \quad (9.41)$$

Damit können wir den Imaginärteil  $\omega''$  durch

$$\omega''(k) \approx \omega''_0 + \frac{ar^2}{2} \cos(\alpha + 2\theta) \quad (9.42)$$

approximieren. Wenn der Abstand  $r = |k - k_0| > 0$  vom Pinch-Punkt anwächst, dann existieren Richtungen  $\theta$ , entlang derer  $\omega''$  am schnellsten und am langsamsten anwächst oder abfällt. Nach (9.42) sind diese Richtungen durch  $\cos(\alpha + 2\theta) = 1$  (anwachsen) bzw.  $\cos(\alpha + 2\theta) = -1$  (abfallen) gegeben. Beide Richtungen stehen in der komplexen  $k$ -Ebene senkrecht aufeinander.<sup>16</sup> Aus diesem Grund hat die Funktion  $\omega''(k', k'')$  die Form eines Sattels (Abb. 9.8).

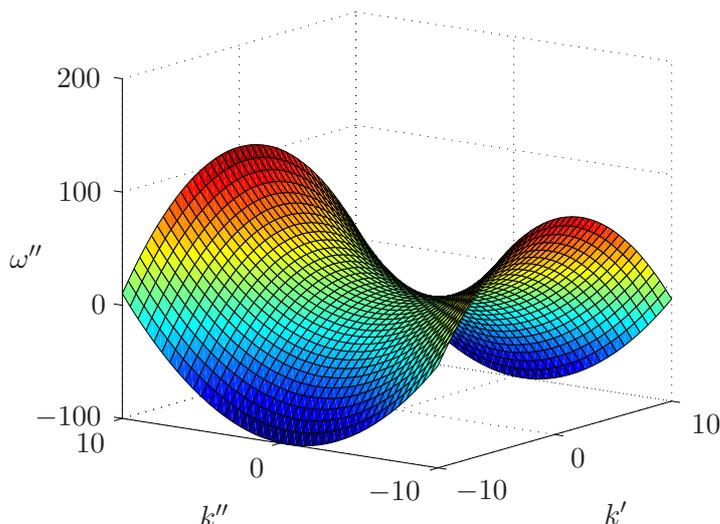
Es ist immer möglich, den Pfad  $F_k$  in der komplexen  $k$ -Ebene so zu wählen, daß er entlang des steilsten Abfalls von  $\omega''$  führt, denn wir haben ja oben schon gesehen, daß  $\omega''_0$  ein Maximum als Funktion von  $k$  annimmt. Wenn wir den Pfad

<sup>15</sup>Mit *steepest descent* bezeichnet man eine Klasse von Verfahren, mit denen man Integrale vom Typ

$$F(t) = \int_C h(z) e^{t\rho(z)} dz$$

in der komplexen  $z$ -Ebene für  $t \rightarrow \infty$  approximieren kann, wenn  $h(z)$  und  $\rho(z)$  analytische Funktionen sind (siehe z.B. [Bender and Orszag, 1978](#)).

<sup>16</sup>Mit  $\theta \rightarrow \theta - \alpha/2$  gilt  $\cos(2\theta_1) = 1$  und  $\cos(2\theta_2) = -1$ . Dann muß  $2|\theta_2 - \theta_1| = \pi$  sein.



**Abbildung 9.8.:** Sattelpunkt von  $\omega''$  für  $\mu = U^2/4$  und  $U = 1$  in der komplexen  $k$ -Ebene.

$F_k$  so wählen, dann haben wir nach (9.42)  $\omega'' \approx \omega_0'' - ar^2/2$ . Mit  $\cos(\alpha + 2\theta) = -1$  gilt nach (9.41) für diesen Pfad  $\omega' \approx \omega_0' - ar^2 \sin(\alpha + 2\theta)/2 \approx \omega_0'$ .

Für den Moment betrachten wir nur ein kleines Segment  $F_{p1}$  des Integrationspfades  $F_k$  in (9.35) in der Umgebung des Pinch-Punktes (Sattelpunkt von  $\omega''(k)$ ), derart, daß  $(\omega_0'' - \omega''(k)) \leq \delta$  ist mit  $\delta \ll 1$ . Dort können wir die Funktion  $f(k)$  im Integranden von (9.38) durch ihren Wert bei  $k = k_0$  approximieren und erhalten

$$\begin{aligned}
 G_{F_{p1}}(x, t) &\approx -\frac{i}{2\pi} \int_{F_{p1}} \frac{e^{ik_0x}}{\partial D / \partial \omega(k_0, \omega_0)} e^{-i(\omega'(k) + i\omega''(k))t} dk \\
 &\approx -\frac{i}{2\pi} \frac{e^{ik_0x}}{\partial D / \partial \omega(k_0, \omega_0)} \int_{F_{p1}} e^{-i(\omega_0' + i(\omega_0'' - ar^2/2))t} dk \\
 &\approx -\frac{i}{2\pi} \frac{e^{i(k_0x - \omega_0 t)}}{\partial D / \partial \omega(k_0, \omega_0)} \int_{F_{p1}} e^{-\frac{ar^2}{2}t} dk \\
 &\approx \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i(k_0x - \omega_0 t)}}{\partial D / \partial \omega(k_0, \omega_0)} e^{-i\alpha/2} \int_{F_{p1}} e^{-ar^2 t/2} dr \\
 &\approx \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i(k_0x - \omega_0 t)}}{\partial D / \partial \omega(k_0, \omega_0)} \sqrt{ai} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}(k_0) \right)^{-1/2} \int_{F_{p1}} e^{-ar^2 t/2} dr. \quad (9.43)
 \end{aligned}$$

Im vorletzten Schritt haben wir dabei  $dk = ie^{-i\alpha/2} dr$  verwendet, was aus der Richtung für den steilsten Abfall folgt (wegen  $2\theta + \alpha = \pi$ ).

Der Rest des verallgemeinerten zeitlichen Zweigs ( $\omega''(k) < \omega_0'' - \delta$ ) liefert für  $t \rightarrow \infty$  nur Beiträge zum Integral, die kleiner sind als (9.43). Außerdem ist (9.43) so dominant, daß man (wie in der klassischen *steepest descent method*) die Integration über  $r$  bis ins Unendliche ausdehnen darf. Mit der für Gauß-Integrale üblichen

## 9. Absolute und konvektive Stabilität

Koordinatentransformation<sup>17</sup> erhalten wir so für  $t \rightarrow \infty$

$$G(x, t \rightarrow \infty) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \Big|_{k_0} \right)^{-1/2} \frac{e^{i(k_0 x - \omega_0 t + \pi/4)}}{\partial D / \partial \omega(k_0, \omega_0)}. \quad (9.44)$$

Dies ist die Antwort auf eine impulsförmige Störung im Limes langer Zeiten für festen aber beliebigen Ort im Laborsystem. Das Langzeitverhalten im Laborsystem wird dominiert durch eine Welle mit sogenannter **absoluter Wellenzahl**  $k_0$  und **absoluter Frequenz**  $\omega_0$  (beide komplex), die eine verschwindende Gruppengeschwindigkeit besitzt ( $\partial \omega / \partial k|_{k_0} = 0$ , siehe (9.37)). Der Imaginärteil  $\omega_0''$  wird **absolute Wachstumsrate** genannt. Aus (9.44) erhalten wir damit die folgenden Kriterien für die konvektive bzw. absolute Instabilität:

1. Falls der Grundzustand instabil ist,  $\omega_{\max}'' > 0$ , und wenn  $\omega_0'' < 0$  ist, dann geht das System an jedem festen Ort wieder in den Grundzustand zurück und der Grundzustand ist **konvektiv instabil**.<sup>18</sup>
2. Falls der Grundzustand instabil ist,  $\omega_{\max}'' > 0$  ist, und wenn  $\omega_0'' > 0$ , dann wachsen kleine Störungen an jedem festen Ort irgendwann exponentiell an und die Grundströmung ist **absolut instabil**.

Die obigen Ergebnisse gelten für das Laborsystem.<sup>19</sup> Man kann das Ergebnis aber auf Bezugssysteme erweitern, die sich mit einer konstanten Geschwindigkeit  $v$  relativ zum Laborsystem bewegen. Mittels entsprechenden Transformationen (siehe [Huerre and Rossi, 1998](#)) erhält man für die Antwort auf eine Impuls entlang dem Strahl  $x/t = v$  im Limes  $t \rightarrow \infty$

$$G(x, t \rightarrow \infty) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \Big|_{k_*} \right)^{-1/2} \frac{e^{i(k_* x - \omega_* t + \pi/4)}}{\partial D / \partial \omega(k_*, \omega_*)}, \quad (9.45)$$

wobei<sup>20</sup>

$$\omega_* = \omega(k_*) \quad \text{and} \quad \frac{\partial \omega}{\partial k} \Big|_{k=k_*} = v. \quad (9.46)$$

Ein Beobachter, der sich mit der Geschwindigkeit  $v$  relativ zum Laborsystem bewegt, befindet sich an der momentanen Position  $x = vt$ . Daher wird er die Phase

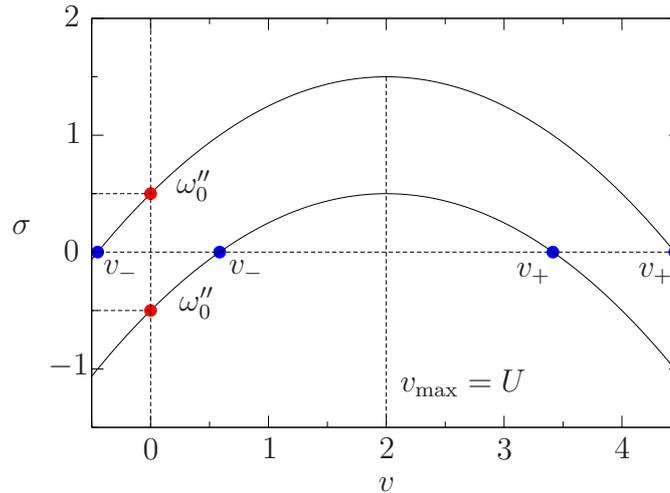
<sup>17</sup>

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ar^2 t} dr = \sqrt{\frac{2}{at}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} ds}_{\sqrt{\pi}} = \sqrt{\frac{2\pi}{at}}$$

<sup>18</sup>Beachte, daß  $\omega_{\max}''$  das Maximum über **alle**  $k$ -Werte darstellt und nicht beschränkt ist auf solche, die sich auf dem abgeklemmten Weg  $F_k$  befinden.

<sup>19</sup>Natürlich macht die Unterscheidung in konvektive und absolute Instabilität nur in Systemen sind, die nicht Galilei-invariant sind.

<sup>20</sup>Die Größe  $\partial \omega / \partial k$  ist im allgemeinen komplex. Sie hat nur dann die Bedeutung einer Gruppengeschwindigkeit, wenn sie reell ist.



**Abbildung 9.9.:** Asymptotische zeitliche Wachstumsrate der Antwort auf einen Impuls als Funktion der Relativgeschwindigkeit  $v$  des Bezugssystems für die GL-Gleichung für  $U = 2$  und  $\mu = 0.5$  (untere Kurve, konvektiv instabil) und  $\mu = 1.5$  (obere Kurve, absolut instabil).

$k_*x - \omega_*t = (k_*v - \omega_*)t$  sehen, sowie die zeitliche Wachstumsrate  $\sigma = \omega''_* - k''_*v$ . Diese Wachstumsrate muß natürlich kleiner sein als die maximale zeitliche Wachstumsrate  $\max \omega''$ , die dem Imaginärteil des Pfads  $L_\omega$  entspricht. Wenn  $\sigma < 0$  ( $\sigma > 0$ ) ist, zerfallen (wachsen) die Störungen entlang dem Strahl  $x/t = v$ .

Als Beispiel betrachten wir die GL-Gleichung. Für sie haben wir die Dispersionsrelation (9.10)

$$\omega = Uk + i(\mu - k^2). \quad (9.47)$$

Daraus erhalten wir  $\partial\omega/\partial k = U - 2ik$  was für  $k = k_*$  gleich  $v$  sein muß. Daher erhalten wir

$$k_* = \frac{U - v}{2i}, \quad (9.48a)$$

$$\omega_*(k_*) = \frac{U(U - v)}{2i} + i \left[ \mu + \frac{(U - v)^2}{4} \right]. \quad (9.48b)$$

Durch Kombination der Imaginärteile erhalten wir die Wachstumsrate als Funktion der Relativgeschwindigkeit  $v$

$$\sigma(v) = \omega''_* - k''_*v = \mu + \frac{(U - v)^2}{4} - \underbrace{\frac{U(U - v)}{2} + \frac{(U - v)v}{2}}_{-(U-v)^2/2} = \mu - \frac{(U - v)^2}{4}. \quad (9.49)$$

Sie ist in Abb. 9.9 für  $\mu > 0$  gezeigt.

Das Maximum der Wachstumsrate erhält man für das Bezugssystem, das sich mit der Geschwindigkeit  $v_{\max} = U$  bewegt. Die Nullstellen von  $\sigma(v)$  (im instabilen

## 9. Absolute und konvektive Stabilität

Fall) definieren zwei (manchmal mehr) Geschwindigkeiten  $v_{\pm}$  (Bezugssysteme), für welche die Amplitude der Antwort stationär ist. Die Strahlen  $x/t = v_{\pm}$  definieren die vordere und die hintere Kante des wachsenden Pulses. Falls die Strömung instabil ist, d.h.  $\sigma_{\max} = \sigma(v_{\max}) > 0$ , sind zwei Fälle möglich (siehe Abb. 9.9)

1. Falls  $v_- < 0 < v_+$  ist, dann ist die Grundströmung **absolute instabil**, weil  $\sigma(0) > 0$  ist.
2. Falls  $0 < v_- < v_+$  ist, dann ist die Grundströmung **konvektiv instabil**, weil  $\sigma(0) < 0$  ist.

### 9.4.6. Antwort auf einen räumlich lokalisierten oszillierenden Antrieb

Dies ist das Signal-Problem. Im Prinzip kann man die asymptotische Lösung dieses Problems mit Hilfe der in (9.44) abgeleiteten Greenschen Funktion für  $t \rightarrow \infty$  gewinnen. Hier werden wir sie aber direkt berechnen. Angenommen, der Antrieb mit Frequenz  $\omega_f$  ist bei  $x = 0$  lokalisiert und wird zum Zeitpunkt  $t = 0$  eingeschaltet. Dann ist

$$S(x, t) = \delta(x)\theta(t)e^{-i\omega_f t}. \quad (9.50)$$

Daraus können wir die Fourier-Laplace-Transformation  $S(k, \omega)$  berechnen

$$\begin{aligned} S(k, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\delta(x)\theta(t)e^{-i\omega_f t}}_{S(x,t)} e^{i\omega t} e^{-ikx} dx dt = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(t)e^{i(\omega-\omega_f)t} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{i(\omega-\omega_f)t} dt = \left[ \frac{e^{i(\omega-\omega_f)t}}{i(\omega-\omega_f)} \right]_0^{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{e^{i(\omega-\omega_f)t}}{i(\omega-\omega_f)} \right) + \frac{i}{\omega-\omega_f}. \end{aligned} \quad (9.51)$$

$\rightarrow 0, \text{ for } \omega'' > 0, \omega_f \in \mathbb{R}$

Die Fourier-Laplace-Transformierte von  $\psi(x, t)$  ist damit (siehe (9.26))

$$\psi(k, \omega) = \frac{S(k, \omega)}{D(k, \omega)} = \frac{i}{(\omega - \omega_f)D(k, \omega)}. \quad (9.52)$$

Für die Rücktransformation in den Zeitbereich erhalten wir

$$\begin{aligned} \psi(k, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{L_{\omega}} \frac{ie^{-i\omega t}}{(\omega - \omega_f)D(k, \omega)} d\omega = \frac{i}{2\pi} \oint_{\text{lower, } t>0} \frac{e^{-i\omega t}}{(\omega - \omega_f)D(k, \omega)} d\omega \\ &= \frac{i}{2\pi} \underbrace{(-2\pi i)}_{\text{Drehsinn}} \sum_{\text{alle Residuen}} \text{Res} \left[ \frac{e^{-i\omega t}}{(\omega - \omega_f)D(k, \omega)} \right] \\ &= \frac{e^{-i\omega_f t}}{D(k, \omega_f)} + \frac{e^{-i\omega(k)t}}{[\omega(k) - \omega_f] \partial D / \partial \omega(k, \omega(k))}. \end{aligned} \quad (9.53)$$

Pol bei  $\omega = \omega_f$       Pole durch Nullstellen von  $D(k, \omega)$

Schließlich erhalten wir für die Rücktransformation in den Ortsraum

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{F_k} \left( \frac{e^{-i\omega_f t}}{D(k, \omega_f)} + \frac{e^{-i\omega(k)t}}{[\omega(k) - \omega_f] \partial D / \partial \omega(k, \omega(k))} \right) e^{ikx} dk \\ &= \underbrace{\frac{e^{-i\omega_f t}}{2\pi} \int_{F_k} \frac{e^{ikx}}{D(k, \omega_f)} dk}_{\psi_f(x, t)} + \frac{1}{2\pi} \int_{F_k} \frac{e^{i(kx - \omega(k)t)} dk}{[\omega(k) - \omega_f] \partial D / \partial \omega(k, \omega(k))}. \end{aligned} \quad (9.54)$$

Der erste Beitrag  $\psi_f(x, t)$  zur gesamten Antwort  $\psi(x, t)$  resultiert direkt aus dem Antrieb mit Frequenz  $\omega_f$  (Pol von  $\psi(k, \omega)$ ). Dieser Beitrag wird durch Wellen mit fester Frequenz  $\omega = \omega_f$  gebildet. Die Wellenzahlen ergeben sich aus der Integration über  $k$ . Es resultieren gerade die zu  $\omega_f$  gehörenden Wellenzahlen der räumlichen Zweige. Um das zu sehen, schließen wir das Integral über die obere Halbebene für  $x > 0$  und über die untere Halbebene für  $x < 0$  (der Integrand verschwindet in beiden Fällen im Unendlichen). Wenn wir dann den Residuen-Satz anwenden und der Einfachheit halber annehmen, daß (wie für die GL-Gleichung) nur zwei räumliche Zweige  $k = k_{\pm}(\omega)$  existieren, dann hat der Integrand für die gegebene Frequenz  $\omega_f$  zwei Pole, nämlich bei  $(k_+(\omega_f), \omega_f)$  und bei  $(k_-(\omega_f), \omega_f)$ . Wir erhalten so mit Hilfe des Residuen-Satzes

$$\psi_f(x, t) = \frac{i\theta(x)e^{i(k_+(\omega_f)x - \omega_f)t}}{\partial D / \partial k(k_+(\omega_f), \omega_f)} - \frac{i\theta(-x)e^{i(k_-(\omega_f)x - \omega_f)t}}{\partial D / \partial k(k_-(\omega_f), \omega_f)}. \quad (9.55)$$

Die Stufenfunktion  $\theta$  wurde hier eingeführt, um zwischen den beiden Fällen  $x > 0$  und  $x < 0$  unterscheiden zu können. Dieser Anteil zum Antwortverhalten enthält genau die Charakteristika des Antriebs.

Der zweite Beitrag zur Antwort (9.54) kann für  $t \rightarrow \infty$  in genau derselben Art und Weise berechnet werden wie für den impulsförmigen Antrieb in (9.44). Man erhält dieselbe Unterscheidung zwischen konvektiver und absoluter Instabilität wie oben, d.h. abhängig von dem Imaginärteil der Frequenz am Kuspuntpunkt, d.h. absolute Instabilität für  $\omega_0'' > 0$  und konvektive Instabilität für  $\omega_0'' < 0$ .

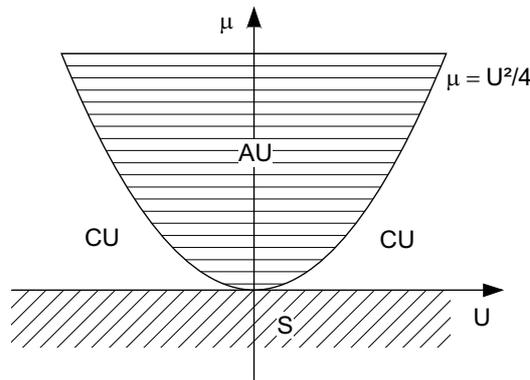
Fall die Strömung **absolute instabil** ist, wird der Beitrag von dem zweiten Integral als Funktion der Zeit an jedem Ort explodieren und den Beitrag  $\psi_f$  dominieren. In diesem Fall haben die räumlichen Zweige in einem Experiment keine Bedeutung.

Falls die Strömung nur **konvektiv instabil** ist, werden die anfänglichen Transienten, durch den Einschaltprozeß verursacht sind, an jedem Punkt zeitlich zerfallen. Dann wird letztendlich nur die Antwort  $\psi_f$  übrigbleiben. Dann werden stromabwärts die  $k_+$ - und stromaufwärts die  $k_-$ -Zweige beobachtet. In diesem Fall machen die räumlichen Zweige des linearen Stabilitätsproblems also Sinn. Falls  $\omega_f$  im Bereich der räumlich verstärkten Frequenzen liegt ( $k_{\pm}''(\omega_f) < 0$ ), dann wird die Welle stromabwärts verstärkt und stromaufwärts gedämpft. Die Dämpfungsrates stromaufwärts ist dabei größer als die Wachstumsrate stromabwärts, weil  $0 > k_+'' > k_-''$ . Deshalb kann man die Strömung auch als einen Verstärker der Eingangssignals bei  $x = 0$  auffassen. Falls bei  $x = 0$  kein Signal mit signifikanter Amplitude anliegt, wird nur das Rauschen verstärkt.

## 9. Absolute und konvektive Stabilität

$\omega''_{\max}$	$\omega''_0$	type
$> 0$	$> 0$	absolut instabil
$> 0$	$< 0$	konvektiv instabil
$< 0$	$< 0$	stabil

**Tabelle 9.1.:** Stabilitätskriterien:  $\omega''_{\max} = \max_{j,k \in \mathbb{R}} \omega''(k)$  ist die Wachstumsrate, maximiert über alle zeitlichen Moden  $j$  und reelle Wellenzahlen  $k \in \mathbb{R}$ .  $\omega''_0$  ist die zeitliche Wachstumsrate am Kuspunkt.



**Abbildung 9.10.:** Stabilitätsbereiche der GL-Gleichung.

### 9.4.7. Kleine Zusammenfassung

Die erhaltenen Stabilitätskriterien sind in Tabelle 9.1 zusammengefaßt. Um zwischen absoluter und konvektiver Instabilität zu unterscheiden, muß man entweder den Kuspunkt, an dem sich die zwei Zweige  $k_+$  und  $k_-$  aus den Untermengen  $K_+$  und  $K_-$  treffen, geometrisch lokalisieren oder man verwendet die Bedingungen

$$\left. \frac{\partial \omega(k; R)}{\partial k} \right|_{k=k_0} = 0 \quad \text{und} \quad \omega_0 = \omega(k_0). \quad (9.56)$$

Bei der Anwendung dieser Bedingung muß man aber aufpassen, weil es möglich ist, daß sich zwei Zweige aus derselben Untermenge, z.B. aus  $K_+$ , treffen. Es ist entscheidend, daß die Kontur  $F_k$  abgeklemmt wird!

Wir hatten oben schon den Pinch-Punkt  $(k_0, \omega_0)$  für die GL-Gleichung für den allgemeinen Fall eines gleichförmig bewegten Bezugssystems (9.48) lokalisiert. Wenn wir das Ergebnis auf das Laborsystem übertragen, erhalten wir durch Anwendung von (9.56) auf die Dispersionsrelation (9.10),  $\omega = Uk + i(\mu - k^2)$ ,

$$\frac{\partial \omega(k; \mu, U)}{\partial k} = U - 2ik_0 = 0. \quad (9.57)$$

Dies resultiert in

$$k_0 = \frac{U}{2i} \quad \text{und} \quad \omega_0 = i \left( \mu - \frac{U^2}{4} \right). \quad (9.58)$$

#### 9.4. Komplexe Wellenzahlen und Frequenzen

Der Übergang zwischen konvektiver und absoluter Instabilität ist gegeben durch  $\omega_0'' = 0$ . Also erhalten wir die Relation  $\mu_t = U^2/4$  (Abb. 9.10).