Die oben beschriebene zeitlich implizite Methode ist ungefähr zweimal so aufwendig wie die explizite Methode aus Kap. 7.2.1. Sie liefert aber genaue Ergebnisse für die Zeitabhängigkeit, wenn der Zeitschritt hinreichend klein gewählt wird. Wenn man nur an der stationären Lösung interessiert ist, falls eine solche existiert, dann könnte man den Zeitschritt im Prinzip recht groß machen, da die implizite Methode stabil ist. Wegen der mit großen Zeitschritten verbunden Fehler ist es jedoch besser, eine Methode zu verwenden, die speziell auf stationäre Lösungen zugeschnitten ist.

7.3. Projektions-Methoden

Um auch den Druck implizit zu behandeln, wollen wir die obige Methode, die nur für das Geschwindigkeitsfeld implizit war, verallgemeinern. Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden wir die Diskretisierung der räumlichen und zeitlichen Ableitungen vorerst nicht spezifizieren. Deshalb schreiben wir die Gleichung, die in jedem Zeitschritt gelöst werden muß, in der Form (geographische Notation, alle Terme werden implizit behandelt)

$$A_P^{u_i} u_{i,P}^{n+1} + \sum_l A_l^{u_i} u_{i,l}^{n+1} = Q_{u_i}^{n+1} - \left(\frac{\delta p^{n+1}}{\delta x_i}\right)_P . \tag{7.21}$$

Hierbei bezeichnet P den jeweils betrachteten Gitterpunkt und l läuft über alle involvierten Nachbarpunkte. Wegen der Nichtlinearität können die Koeffizienten A auch noch von den Geschwindigkeiten abhängen. Der Quellterm Q^{n+1} enthält alle Größen, die *explizit* behandelt werden, z.B. Geschwindigkeitsterme u_i^n aus Linearisierungen, aber auch implizite Größen wie z.B. äußere Kräfte oder das Temperaturfeld T^{n+1}, die an die aktuellen Geschwindigkeiten u_i^{n+1} koppeln. Q^{n+1} enthält jedoch nicht den Druck, der im letzten Summanden als separater Term aufgeschrieben wurde. Die symbolische Schreibweise mit Hilfe der geographischen Notation deutet an, daß die folgende Methoden unabhängig von der räumlichen Diskretisierung sind.

Wegen der Kopplung der Unbekannten und wegen der nichtlinearen Terme ($A_l^{u_i}$ kann von u_i^{n+1} abhängen) muß die Gleichung (7.21) für jeden Zeitschritt iterativ gelöst werden. Die Genauigkeit mit der dies erfolgen muß, hängt davon ab, ob man den Zeitverlauf, d.h. die Dynamik, genau berechnen will, oder ob man nur an einem stationären Endzustand interessiert ist, falls dieser existiert. Im letzteren Fall ist man versucht, eine große Zeitschrittweite zu wählen, um den Aufwand zur Berechnung der stationären Lösung zu minimieren.

7.3.1. Generelles Konzept

Die Berechnung eines Zeitschritts durch Lösung von (7.21) umfaßt zwei ineinander verschachtelte Iterationen. Eine äußere und eine innere Iteration.

Zur Lösung der diskretisierten Impuls- und Wärmetransportgleichungen müssen große Gleichungssysteme gelöst werden. Die *äußere Iteration* dient der Behandlung der *Nichtlinearitäten* in der Impulsgleichung (und der Temperaturgleichung). Im Laufe der Iteration werden die Koeffizienten A_l (inklusive A_P) und der Quellterm Q^{n+1} neu berechnet, da diese i.a. von u_i^{n+1} abhängen. Diese Iteration ist erforderlich, da die nichtlinearen Terme meist linearisiert werden, wobei Werte aus dem vorherigen Iterationsschritt verwendet werden.

Wenn also die Koeffizienten der linearisierten Gleichungssysteme nach einem Schritt der äußeren Iteration neu berechnet wurden, müssen diese gelöst werden. Wegen der Größe der Gleichungssysteme geschieht dies auch iterativ. Die *innere Iteration* befaßt sich also mit der iterativen Lösung eines großen linearen Problem. Hierzu empfiehlt Demirdžić et al. (1993) die Verwendung des SIP-Algorithmus von Stone (1968), der auf einer unvollständigen LU-Zerlegung (ILU) der Matrix beruht (siehe auch Numerik I, Kap. 5.2.4). Die linearen Systeme (mit konstanten Koeffizienten) werden nur nährungsweise gelöst. Typischerweise wird für die Impulsgleichung und für die Temperaturgleichung nur ein einziger Iterationsschritt ausgeführt. Zur Lösung der Druckkorrekturgleichung werden allerdings 1–10 SIP-Iterationen ausgeführt, solange, bis die Summe aller Residuen um eine Größenordnung kleiner geworden ist oder aber die maximal vorgegebene Anzahl von Iterationen erreicht wurde.

Nach einem Durchgang der inneren Iterationen werden die Residuen der Impuls-, Energie- und Kontinuitätsgleichung geprüft und, falls noch keine Konvergenz erreicht wurde, man geht zu einem neuen Schritt der äußeren Iteration über, wobei alle Koeffizienten auf der Basis der nun abgeschlossenen inneren Iteration neu berechnet werden (nichtlineare konvektive Terme, Kopplung der Gleichungen).

Nach dem m-ten Schritt der äußeren Iteration hat man aus der Impulsgleichung ein divergenzbehaftetes Geschwindigkeitsfeld erhalten, die man als momentanen Schätzwert (Zwischenlösung) der Lösung u_i^{n+1} auffassen kann. Wir bezeichnen sie mit u_i^{m*}. Dabei bezeichnet m den Index der *äußeren* Iteration und der Stern $*$ zeigt an, daß es sich um eine *nicht divergenzfreie* Zwischenlösung handelt. Daher muß $u_i^{m*} \to u_i^m$ korrigiert werden, so daß u_i^m divergenzfrei ist. Da sich die äußere und die innere Iteration auf einen einzigen Zeitschritt $(n+1)$ beziehen, lassen wir den Zeitindex im folgenden weg (alle Terme werden implizit behandelt).

7.3.2. Äußere Iteration

Sei m der Index, der die äußere Iteration numeriert. Dann wird in jedem äußeren Iterationsschritt die diskretisierte Impulsgleichung

$$A_P^{u_i} u_{i,P}^{m*} + \sum_l A_l^{u_i} u_{i,l}^{m*} = Q_{u_i}^{m-1} - \left(\frac{\delta p^{m-1}}{\delta x_i}\right)_P \tag{7.22}$$

gelöst. Zu Beginn jedes äußeren Iterationsschritts werden auf der rechten Seite der Gleichung die Werte der vorhergehenden Iteration (Index $m-1$) verwendet. Bei der Lösung werden normalerweise die Geschwindigkeitskomponenten sequentiell in drei Schritten berechnet, wobei man jeweils nur eine Komponente löst und die anderen beiden Geschwindigkeitskomponenten sowie den Druck aus dem vorhergehenden Schritt verwendet. Die so berechneten Geschwindigkeiten werden i.a. nicht divergenzfrei sein (daher der Stern $*$), da der Druck bei der äußeren Iteration auf der rechten Seite steht. Um Divergenzfreiheit zu erzielen wird nach jedem Schritt der äußeren Iteration eine Anpassung des Drucks erforderlich. Daraus ergibt sich dann ein korrigiertes Geschwindigkeitsfeld u_i^m, das divergenzfrei ist, und der dazugehörige Druck p^m und man kann zum nächsten Schritt $(m+1)$ der äußeren Iteration übergehen.

Wir wollen nun den Druck so variieren, daß $u_{i,P}^{m*} \to u_{i,P}^m$ divergenzfrei wird. Um die Kontinuitätsgleichung $\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$ ausnutzen zu können, lösen wir (7.22) formal nach der Zwischenlösung $u_{i,P}^{m*}$ auf

$$u_{i,P}^{m*} = \underbrace{\frac{Q_{u_i}^{m-1} - \sum_l A_l^{u_i} u_{i,l}^{m*}}{A_P^{u_i}}}_{:=\tilde{u}_{i,P}^{m*}} - \frac{1}{A_P^{u_i}} \left(\frac{\delta p^{m-1}}{\delta x_i} \right)_P = \tilde{u}_{i,P}^{m*} - \frac{1}{A_P^{u_i}} \left(\frac{\delta p^{m-1}}{\delta x_i} \right)_P . \tag{7.23}$$

Hierbei wird den erste Term auf der rechten Seite mit $\tilde{u}_{i,P}^{m*}$ abgekürzt. Es ist der momentane Schätzwert von $u_{i,P}^m$ ohne den direkten Beitrag des Druckgradienten. Da die Methode aber implizit ist, ist $\tilde{u}_{i,P}^{m*}$ nicht dieselbe Geschwindigkeit, die man erhalten würde, wenn man den Druckgradienten in (7.22) von vornherein streichen würde.

Wenn wir nun in (7.23) den Druckgradienten geeignet variieren $[(m-1) \to m]$, sollte es möglich sein, daß das Geschwindigkeitsfeld divergenzfrei wird. Wir setzen deshalb das divergenzfreie Geschwindigkeitsfeld in gleicher Weise wie in (7.23) an, wobei wir nur den Druck variieren, nicht aber $\tilde{u}_{i,P}^{m*}$. Sei also

$$u_{i,P}^m = \tilde{u}_{i,P}^{m*} - \frac{1}{A_P^{u_i}} \left(\frac{\delta p^m}{\delta x_i} \right)_P . \tag{7.24}$$

Bilden der Divergenz $\nabla \cdot$(7.24) unter Beachtung der Forderung nach Divergenzfreiheit von $u_{i,P}^m$

$$\frac{\delta \left(\rho u_i^m \right)}{\delta x_i} = 0 \tag{7.25}$$

liefert eine Poisson-Gleichung für den erforderlichen (neuen) Druck

$$\frac{\delta}{\delta x_i} \left[\frac{\rho}{A_P^{u_i}} \left(\frac{\delta p^m}{\delta x_i} \right)_P \right] = \left[\frac{\delta \left(\rho \tilde{u}_i^{m*} \right)}{\delta x_i} \right]_P . \tag{7.26}$$

Das zugehörige lineare Gleichungssystem für p^m wird dann iterativ gelöst (SIP, innere Iteration).

Diese Vorgehensweise hat den Vorteil, daß die Inhomogenität in der Poisson-Gleichung $\left(\tilde{u}_{i,P}^{m*}\right)$ bekannt ist. Hat man den Druckgradienten gemäß (7.26) in guter Näherung berechnet, kann man u_i^m nach (7.24) berechnen. Damit ist u_i^m divergenzfrei. Da wir aber in (7.24) nur den Druck und nicht $\tilde{u}_{i,P}^{m*}$ angepaßt haben (denn auch

$\tilde{u}^{m*}_{i,P}$ hängt von u^{m*}_i ab), erfüllt u^m_i jetzt nicht mehr die Impulsgleichung (7.22). Deshalb müssen die Werte u^m_i und p^m erneut für u^{m-1}_i und p^{m-1} in die Impulsgleichung (7.23) eingesetzt werden, d.h. es erfolgt der nächste Schritt der äußeren Iteration. Dann wird die Poisson-Gleichung erneut gelöst, und so weiter, bis Konvergenz erreicht wird. Das vorgestellte Schema wird auch als *Projektionsmethode* bezeichnet, da die Anteile von u^{m*}_i, die nicht divergenzfrei sind, *herausprojiziert* werden.[6]

7.3.3. Druckkorrektur

Um die Konvergenz der äußeren Iteration zu verbessern, wäre es gut, in (7.24) nicht nur den Druckgradienten, sondern auch den Term $\tilde{u}^{m*}_{i,P}$ anzupassen (im Idealfall durch $\tilde{u}^{m}_{i,P}$). Dann ist die rechte Seite der Poisson-Gleichung aber nicht explizit bekannt und man muß Annahmen über den unbekannten Teil $\tilde{u}^{m}_{i,P} - \tilde{u}^{m*}_{i,P}$ der Inhomogenität machen. Im folgenden werden einige Möglichkeiten der inneren Iteration besprochen.

SIMPLE

Eine beliebte Variante der Projektionsmethode ist der *SIMPLE*-Algorithmus. Dieses Akronym steht für ***S****emi-****I****mplicit* ***M****ethod for* ***P****ressure-****L****inked* ***E****quations*.[7] Bei der Formulierung wird nicht der Druck verwendet, sondern die Druck-Korrektur. Dazu schreiben wir

$$u^m_i = u^{m*}_i + u'_i, \qquad \text{und} \qquad p^m = p^{m-1} + p'. \tag{7.27}$$

Wir fordern nun für das divergenzfreie Feld u^m_i und für p^m die Einhaltung der Impulsgleichung gemäß (7.22)

$$A^{u_i}_P u^m_{i,P} + \sum_l A^{u_i}_l u^m_{i,l} = Q^{m-1}_{u_i} - \left(\frac{\delta p^m}{\delta x_i}\right)_P . \tag{7.28}$$

Um zu den Korrekturgrößen u'_i und p' überzugehen, subtrahiert man hiervon die zuvor tatsächlich gelöste Gleichung (7.22) und löst nach $u'_{i,P}$ auf. Dann erhält man anstelle von (7.23) die Beziehung für die Korrekturgrößen

$$u'_{i,P} = \underbrace{-\frac{\sum_l A^{u_i}_l u'_{i,l}}{A^{u_i}_P}}_{:=\tilde{u}'_{i,P}} - \frac{1}{A^{u_i}_P}\left(\frac{\delta p'}{\delta x_i}\right)_P = \tilde{u}'_{i,P} - \frac{1}{A^{u_i}_P}\left(\frac{\delta p'}{\delta x_i}\right)_P . \tag{7.29}$$

[6] Die räumlichen Ableitungen innerhalb der runden Klammer in (7.26) ergeben sich aus der Diskretisierung der Impulsgleichung (7.22), während die anderen Ableitungen entsprechend der Diskretisierung der Kontinuitätsgleichung (7.25) zu bilden sind.

[7] Manchmal findet man auch die Erklärung als *Sheer Idiot's Monopurpose Programming Language Environment* ☺.

Die Kontinuitätsgleichung für u_i^m lautet

$$\frac{\delta\rho\left(u_i^{m*}+u_i'\right)}{\delta x_i}=\frac{\delta\left(\rho u_i^{m*}\right)}{\delta x_i}+\frac{\delta\left(\rho u_i'\right)}{\delta x_i}=0. \tag{7.30}$$

Wenn wir also $u_{i,P}^{m*}$ zu (7.29) addieren, mit ρ multiplizieren und die Divergenz bilden, erhalten wir unter Ausnutzung der Inkompressibilitätsbedingung (7.30) die Poisson-Gleichung für die Druck-Korrektur

$$\boxed{\frac{\delta}{\delta x_i}\left[\frac{\rho}{A_P^{u_i}}\left(\frac{\delta p'}{\delta x_i}\right)\right]_P=\left[\frac{\delta\left(\rho u_i^{m*}\right)}{\delta x_i}\right]_P+\underbrace{\left[\frac{\delta\left(\rho\tilde{u}_i'\right)}{\delta x_i}\right]_P}_{\to 0\ \text{(SIMPLE)}}.} \tag{7.31}$$

Leider ist an dieser Stelle der Term $\tilde{u}_i'$ noch nicht bekannt, da er von der (gesuchten) Korrektur u_i' abhängt. Daher wird $\tilde{u}_i'$ in (7.29) und (7.31) oft schlichtweg ignoriert (weggelassen). Wenn man dies tut und die Druck-Korrektur p' durch Lösen der resultierenden Poisson-Gleichung (7.31) (durch einige innere Iterationen) berechnet hat, kann man die Geschwindigkeitskorrektur $u_{i,P}'$ nach (7.29) (unter Vernachlässigung von $\tilde{u}_i'$) berechnen. Obwohl nicht die richtige Poisson-Gleichung gelöst wurde, ist die korrigierte Geschwindigkeit $u_i^{m*}+u_i'$ nun divergenzfrei. Davon kann man sich leicht durch Einsetzen überzeugen.

Wenn diese äußere Iteration konvergiert ist, verschwindet auch die Druck- und die Geschwindigkeitskorrektur und $u_i^{m*}=u_i^m$. Im Limes verschwindet daher auch der in der Poisson-Gleichung vernachlässigte Term $\delta\rho\tilde{u}_i'/\delta x_i$. Für die Vernachlässigung dieses Terms gibt es aber keinen plausiblen physikalischen Grund. Vermutlich ist dies die Ursache dafür, daß die SIMPLE-Methode nicht besonders schnell konvergiert.

SIMPLEC

Eine bessere Möglichkeit als die vollständige Vernachlässigung von $\delta\rho\tilde{u}_i'/\delta x_i$ in der Poisson-Gleichung (7.31) wäre eine Approximation dieses Terms. Eine Möglichkeit besteht darin, die Geschwindigkeitskorrektur $u_{i,P}'$ am Punkt P durch ein gewichtetes Mittel über die Werte an den Nachbarpunkten auszudrücken. Wenn man die Wichtungsfaktoren $A_l^{u_i}$ verwendet, gelten die Beziehungen

$$u_{i,P}'\approx\frac{\sum_l A_l^{u_i}u_{i,l}'}{\sum_l A_l^{u_i}}\qquad\Rightarrow\qquad\sum_l A_l^{u_i}u_{i,l}'\approx u_{i,P}'\sum_l A_l^{u_i}. \tag{7.32}$$

Wenn man dies in die Definition von $\tilde{u}_i'$ in (7.29) einsetzt, erhält man

$$\tilde{u}_{i,P}'\stackrel{\text{Def.}}{=}-\frac{\sum_l A_l^{u_i}u_{i,l}'}{A_P^{u_i}}\approx -u_{i,P}'\frac{\sum_l A_l^{u_i}}{A_P^{u_i}}. \tag{7.33}$$

Damit wurde die Abhängigkeit von $\tilde{u}_{i,P}'$ von den Werten $u_{i,l}'$ an den Nachbarpunkten $l\neq P$ auf eine einfache Abhängigkeit von $u_{i,P}'$ zurückgeführt. Dies erlaubt es, den

Term $\tilde{u}'_{i,P}$ vollständig der linken Seite ($u'_{i,P}$) zuzuschlagen und durch Divergenzbildung zu eliminieren. Denn mittels (7.29) folgt jetzt für die Beziehung zwischen $u'_{i,P}$ und p'

$$u'_{i,P} \approx -u'_{i,P}\frac{\sum_l A_l^{u_i}}{A_P^{u_i}} - \frac{1}{A_P^{u_i}}\left(\frac{\delta p'}{\delta x_i}\right) \qquad \Rightarrow \qquad u'_{i,P} \approx -\frac{1}{A_P^{u_i} + \sum_l A_l^{u_i}}\left(\frac{\delta p'}{\delta x_i}\right)_P \tag{7.34}$$

Wenn man nun wieder die Forderung der Divergenzfreiheit von u_i^m ausnutzt, indem man $u_{i,P}^{m*}$ addiert, mit ρ multipliziert und die Divergenz bildet, erhalten wir anstelle von (7.31) die Poisson-Gleichung für die Druck-Korrektur im Rahmen der SIMPLEC-Näherung

$$\frac{\delta}{\delta x_i}\left[\frac{\rho}{A_P^{u_i} + \sum_l A_l^{u_i}}\left(\frac{\delta p'}{\delta x_i}\right)\right]_P = \left[\frac{\delta\left(\rho u_i^{m*}\right)}{\delta x_i}\right]_P . \tag{7.35}$$

Anstelle des unbekannten Terms mit $\tilde{u}'_i$ haben wir nun lediglich einen anderen Koeffizienten vor dem Gradienten der Druck-Korrektur. Die Lösung dieser Gleichung ergibt wiederum ein divergenzfreies Geschwindigkeitsfeld und man geht zum nächsten Schritt der äußeren Iteration über. Diese Methode heißt *SIMPLEC* (SIMPLE ***C****orrected*/***C****onsistent*).

PISO

Ein weitere Möglichkeit der Verbesserung des SIMPLE-Verfahrens besteht darin, zunächst eine erste Korrektur u'_i nach SIMPLE zu berechnen und danach eine zweite Korrektur vorzunehmen, wobei man die erste Korrektur verwendet, um $\tilde{u}'_{i,P}$ zu approximieren.

Dazu wird zunächst die Poisson-Gleichung in SIMPLE-Näherung gelöst und dann die Geschwindigkeitskorrektur nach (7.29) berechnet, wobei jedoch $\tilde{u}'_{i,P}$ unberücksichtigt bleibt. Damit erhält man eine erste Korrektur

$$u'_{i,P} = -\frac{1}{A_P^{u_i}}\left(\frac{\delta p'}{\delta x_i}\right)_P . \tag{7.36}$$

Mit dieser vorläufigen Korrektur $u'_{i,P}$ berechnen wir nun

$$\tilde{u}'_{i,P} = -\frac{\sum_l A_l^{u_i} u'_{i,l}}{A_P^{u_i}} \tag{7.37}$$

und setzen die zweite Geschwindigkeitskorrektur u''_i in der bekannten Art wie in (7.29) an als

$$u''_{i,P} = \tilde{u}'_{i,P} - \frac{1}{A_P^{u_i}}\left(\frac{\delta p''}{\delta x_i}\right)_P . \tag{7.38}$$

Da die erste Korrektur u'_i so konstruiert wurde, daß im Falle der Konvergenz $u_i^m = u_i^{m*} + u'_i$ divergenzfrei ist, müssen wir fordern, daß die zweite Korrektur a priori divergenzfrei ist. Zur Bestimmung von p'' können wir daher die Divergenz bilden und erhalten

$$\frac{\delta}{\delta x_i}\left[\frac{\rho}{A_P^{u_i}}\left(\frac{\delta p''}{\delta x_i}\right)\right]_P = \left[\frac{\delta\left(\rho\tilde{u}_i'\right)}{\delta x_i}\right]_P, \tag{7.39}$$

wobei $\tilde{u}_i'$ nun aber nach (7.37) schon bekannt ist. Die Koeffizienten auf der linken Seite der Poisson-Gleichung für p'' sind dieselben wie für die Poisson-Gleichung für p' (7.31). Dies kann man beim Implementieren eines Programms ausnutzen, um Rechenzeit zu sparen. Die Namensgebung *PISO* stammt von ***P**ressure **I**mplicit with **S**plitting **O**perators*. Die korrigierten Felder sind danach

$$u_i^m = u_i^{m*} + u_i' + u_i'', \qquad \text{und} \qquad p^m = p^{m-1} + p' + p''. \tag{7.40}$$

Man könnte das Verfahren nun in derselben Weise fortsetzen und sukzessive weitere Geschwindigkeits-Korrekturen u_i''' etc. konstruieren. Dies entspräche dann einer iterativen Lösung der *vollständigen* Poisson-Gleichung (7.31). Stattdessen werden normalerweise nur die beiden Korrekturen u_i' und u_i'' berechnet und danach schon zum nächsten Schritt der äußeren Iteration übergegangen.

SIMPLER

Die *SIMPLER*-Methode (SIMPLE ***R**evised*) ist ähnlich wie PISO. Sie wurde von Patankar (1980) vorgeschlagen. Bei SIMPLER wird zunächst die Poisson-Gleichung (7.31) für die Druck-Korrektur p' wie bei SIMPLE unter Vernachlässigung des letzten Terms gelöst. Dann wird die Geschwindigkeitskorrektur u_i' nach (7.29) berechnet, wobei wie gehabt nur die Druck-Korrektur berücksichtigt wird, aber nicht der Beitrag von $\tilde{u}_i'$, also wie in (7.36).

Zur Berechnung des Drucks p^m wird allerdings nicht die soeben berechnete Druck-Korrektur p' verwendet. Vielmehr wird der Druck durch nochmaliges Lösen einer Poisson-Gleichung berechnet, jetzt aber direkt nach (7.26), wobei anstelle von $\tilde{u}_i^{m*}$ der schon korrigierte Term (vgl. (7.23))

$$\tilde{u}_i^m = \frac{Q_{u_i}^{m-1} - \sum_l A_l^{u_i} u_{i,l}^m}{A_P^{u_i}} \tag{7.41}$$

verwendet wird, weil ja das korrigierte Geschwindigkeitsfeld u_i^m jetzt schon zur Verfügung steht.

Randbedingungen

Das Problem der Randbedingungen für die Poisson-Gleichung für den Druck ist delikat. Der Druck ist eigentlich nur ein Langrange *Parameter*, dessen Aufgabe es ist, die Inkompressibilität sicherzustellen. Daher kann man für den Druck a priori keine Randbedingungen fordern. Wenn zur Lösung von (7.7) (bzw. der Linearisierung (7.31)) Randbedingungen benötigt werden, so sollten sich diese aus den

Navier-Stokes-Gleichungen herleiten lassen.[8] Es ist daher naheliegend die vektorielle Navier-Stokes-Gleichung zu verwenden, um Randbedingungen für die Druck-Gleichung zu formulieren, indem man die Navier-Stokes-Gleichung auf dem Rand auswertet. Dabei ist es zunächst nicht klar, ob man die normale oder tangentiale Komponente der Navier-Stokes-Gleichung verwenden sollte.

Wenn wir die normale Komponente der Navier-Stokes-Gleichung betrachten erhalten wir für ein inkompressibles Newtonsches Fluid aus (7.1) (ohne äußere Kraftfelder)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n} \cdot \nabla p &= \nabla \cdot \mathsf{T}_{\text{visc}} \cdot \boldsymbol{n} - \left[\frac{\partial(\rho u_n)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{n} \right] \\ &= \mu \nabla^2 u_n - \left[\frac{\partial(\rho u_n)}{\partial t} + \rho \boldsymbol{u} \cdot \nabla u_n \right], \end{aligned} \tag{7.42}$$

wobei $u_n = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}$ die normale Komponente von $\boldsymbol{u}$ ist. Wenn man diese Gleichung auf dem Rand auswertet hat man eine Neumann-Randbedingung (vorgegebene normale Ableitung) für den Druck. In analoger Weise kann man eine Dirichlet-Randbedingung ableiten, indem man die Navier-Stokes-Gleichung auf den tangentialen Vektor $\boldsymbol{\tau}$ projiziert.

Auf Rändern, auf denen $\boldsymbol{u} = 0$ ist, erhält man dann die Neumann Randbedingung $\partial p/\partial n = \mu \partial^2 u_n/\partial n^2$ bzw. die Dirichlet-Randbedingung $\partial p/\partial \tau = \mu \partial^2 u_\tau/\partial n^2$. Falls die Reynoldszahl $\mathrm{Re} \sim \mu^{-1} \gg 1$ groß ist, kann man diese Randbedingung durch $\partial p/\partial n = 0$ bzw. $\partial p/\partial \tau = 0$ approximieren und die homogene Neumann und die homogene Dirichlet-Randbedingungen liefern dasselbe Ergebnis.

7.3.4. Zusammenfassung

Die vorangegangenen Varianten der impliziten Druckiteration sind die wichtigsten Repräsentanten einer ganzen Klasse von Verfahren. Es hat sich herausgestellt, daß das SIMPLE-Verfahren besser konvergiert, wenn die Druck-Korrektur nicht vollständig durchgeführt wird, sondern nur teilweise

$$p^m = p^{m-1} + \alpha_p p', \tag{7.43}$$

wobei der *Unterrelaxationsparameter* α_p im Bereich $0 \leq \alpha_p \leq 1$ liegt. Man kann optimale Werte von α_p angeben (Ferziger and Perić, 2002). Die Geschwindigkeits-Korrektur benötigt keine Unterrelaxation. SIMPLEC, PISO und SIMPLER kommen ganz ohne Unterrelaxation aus.

[8] Gresho and Sani (1987) haben dieses Problem behandelt. Knapp zusammengefaßt haben sie gezeigt, daß Neumann Randbedingungen für die kontinuierliche Poisson-Gleichung des Drucks immer angemessen sind und für $t \geq 0$ eine eindeutige Lösung liefern. Dirichlet-Randbedingungen sind nur für $t > 0$ angemessen. Auch für die diskretisierte Version der Poisson-Gleichung sind Neumann Randbedingungen für $t \geq 0$ angebracht. Dirichlet Randbedingungen werden von der diskretisierten Poisson-Gleichung nicht erfüllt. Aber in dem Falle, in dem die Lösung der diskreten Gleichungen gegen die Lösung der kontinuierlichen Gleichungen konvergiert, erfüllt die Lösung der Poisson-Gleichung Neumann-Randbedingungen für $t \geq 0$ und Dirichlet-Randbedingungen, die letzteren allerdings nur für $t > 0$.

Zusammenfassend stellt sich die Strategie der Projektionsverfahren folgendermaßen dar:

1. Ausgangspunkt ist ein Zustand u_i^n und p^n zum Zeitpunkt n.
2. Aufstellen der Impulsgleichung (7.21) für $n+1$ und Berechnung eines Schätzwertes u_i^{m*}.
3. Aufstellen und Lösen der Druck-Korrekturgleichung (7.31) mit dem Ergebnis p' und u_i'. Berechne dabei u_i^m und p^m aus den Korrekturen u_i' und p':
   a) SIMPLE: Vernachlässige den zweiten Term in (7.31), löse die resultierende vereinfachte Poisson-Gleichung und berechne u_i^m und p^m.
   b) PISO: Berechne zunächst die erste Korrektur wie bei SIMPLE 3a. Löse dann die Poisson-Gleichung (7.39) für die zweite Druck-Korrektur p'' und berechne mit u_i'' und p'' die zweite Korrektur zu u_i^m und p^m.
   c) SIMPLER: Berechne zunächst p' wie bei SIMPLE 3a. Berechne daraus u_i^m. Zur Berechnung des Drucks p^m verwende jedoch nicht p' sondern löse (7.26) mit u_i^m auf der rechten Seite.
4. Gehe nach 2 und setzte die soeben berechneten Werte u_i^m und p^m ein, um neue Werte der Koeffizienten A_l und Q und neue Schätzwerte u_i^{m*} zu berechnen. Wiederhole die Schritte in 3 und gehe zu 2 bis diese äußere Iteration konvergiert ist.
5. Gehe über zum nächsten Zeitschritt.

Neben den genannten Projektionsmethoden existieren noch andere Methoden. Dazu zählen unter anderem *Fractional-Step*-Methoden, Formulierungen mit Hilfe der Stromfunktion[9] ψ und der Vortizität ω für zweidimensionale inkompressible Strömungen und auch die Methode der *künstlichen Kompressibilität*. Entsprechende Ausführungen sind in Ferziger and Perić (2002) zu finden.

7.4. Lösung der Navier-Stokes-Gleichung mittels Projektions-Methode

Zur Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen gibt es eine Vielzahl von Verfahren, die hier nicht umfassend vorgestellt werden können. Deshalb soll nur ein Verfahren detailliert behandelt werden, das in vielerlei Abwandlungen zum Einsatz kommt.

[9]Die Stokessche Stromfunktion ψ in kartesischen Koordinaten (x, y, z) ist definiert durch

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{und} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Dann ist die Vortizität $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{u} = (\partial v/\partial x - \partial u/\partial y)\, \boldsymbol{e}_z = -\left(\partial^2\psi/\partial x^2 + \partial^2\psi/\partial y^2\right) \boldsymbol{e}_z = -\nabla^2\psi \boldsymbol{e}_z = \omega \boldsymbol{e}_z$.