pitel vorgestellt werden.

Diskrete Fouriertransformation

Die schnelle Fourier-Transformation (FFT) basiert auf der *diskreten Fourier-Transformation (DFT)*. Wir betrachten eine 2π-periodische Funktion $u(x)$, die an N äquidistanten Punkten x_j ausgewertet (ge*sampled*) wird. Die Intervallänge ist dann $\Delta x = 2\pi/N$ und die Stützpunkte befinden sich bei

$$x_j = \frac{2\pi j}{N}, \qquad \text{mit} \quad j = 1, ..., N. \tag{4.123}$$

Die Werte der betrachteten Funktion an den Stützstellen im Ortsraum sind

$$u_j = u(x_j). \tag{4.124}$$

Dann stellen wir die Funktion $u(x)$ durch die diskrete *Fourier-Reihe*[29] dar

$$\boxed{u_j = u(x_j) = \sum_{k=-K}^{K} \hat{u}_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx_j}, \quad j = 1, ..., N.} \tag{4.125}$$

Diese N Gleichungen bieten Informationen zur Bestimmung von $N = 2K+1$ unbekannten Amplituden $\hat{u}_k$. Sie sind gegeben durch die *diskrete Fourier-Transformation*

$$\boxed{\hat{u}_k = \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} u_m \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx_m}, \quad k = -K, ..., K.} \tag{4.126}$$

Um diese Relation beweisen zu können, benötigen wir die *diskrete Orthogonalitätsrelation* für die harmonischen Funktionen $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx_j}$ des Fourier-Systems

$$\sum_{j=1}^{N} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m(2\pi j/N)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(2\pi j/N)} = \sum_{j=1}^{N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-m)2\pi j/N} = \begin{cases} N, & \text{falls } k-m = nN, \; n \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{4.127}$$

Diese Orthogonalitätsrelation kann man sich leicht klarmachen. Denn wenn $k-m = nN$ ist, dann ist der Exponent ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi\mathrm{i}$ und damit lauten alle Summanden $\mathrm{e}^{\mathrm{i}nj2\pi} = 1$. Der Summand mit Wert 1 taucht dann genau N-mal auf. Falls jedoch $k - m = q \in \mathbb{Z} \neq nN$ ist, dann liegen die Summanden $\mathrm{e}^{\mathrm{i}q2\pi(j/N)}$ für $j = 1, ..., N$ gleichmäßig verteilt auf dem Einheitskreis in der komplexen Ebene. Die komplexen Zeiger überstreichen dabei den Winkelbereich von $2\pi q/N$ $(j = 1)$

[29] Beachte, daß man die Summationsbereiche $k = -K, ..., K$ und $j = 1, ..., N$ beliebig verschieben kann, wenn die Funktionswerte u_j periodisch in j fortgesetzt werden (mit Periode N), was wir hier annehmen. Denn der Faktor $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx_j} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kj2\pi/N}$ ist periodisch in k mit Periode N, weil $k \to k+N$ nur den Zusatzfaktor $\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi j} = 1$ liefert. Außerdem ist auch die Fourier-Transformierte

bis $2\pi q$ ($j = N$) mit dem Inkrement $2\pi q/N$. Der Einheitskreis wird also q-mal überstrichen. Wegen der Gleichverteilung der Zeiger kompensieren sie sich zu Null.

Die *Orthogonalitätsrelation* (4.127) können wir nun verwenden, um die diskrete Fourier-Transformation zu beweisen. Wenn wir (4.126) in (4.125) einsetzen, erhalten wir[30]

$$\begin{aligned} u_j &= \sum_{k=-K}^{K} \left(\frac{1}{N} \sum_{m=1}^{N} u_m \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx_m} \right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx_j} = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{N} u_m \sum_{k=-K}^{K} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x_j - x_m)} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{N} u_m \underbrace{\sum_{k=-K}^{K} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}k(j-m)/N}}_{=N\delta_{j,m},\ (4.127)} = \sum_{m=1}^{N} u_m \delta_{j,m} = u_j. \end{aligned} \tag{4.128}$$

Damit haben wir bewiesen, daß (4.126) die Umkehrung von (4.125) ist.

Wenn $u_j \in \mathbb{R}$ reell ist, dann ist $u_j = u_j^*$ und es gilt

$$\hat{u}_{-k} = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{N} u_m \mathrm{e}^{+\mathrm{i}kx_m} \overset{u_m = u_m^*}{=} \left(\frac{1}{N} \sum_{m=1}^{N} u_m \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx_m} \right)^* = \hat{u}_k^*. \tag{4.129}$$

Damit sind nur noch $K+1$ Amplituden unabhängig voneinander, was den Rechenaufwand verringert.

Diskrete Fouriertransformation als lineare Operation

Wenn wir die Gitterpunkte (4.123) einsetzen, erhalten wir aus (4.125) für den Vektor der Funktionswerte

$$\boldsymbol{u} = u_j = \sum_{k=-K}^{K} \hat{u}_k \underbrace{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kj2\pi/N}}_{G_{jk}} = \mathsf{G} \cdot \hat{\boldsymbol{u}}. \tag{4.130}$$

Wir sehen also, daß die Abbildung $\hat{\boldsymbol{u}} \to \boldsymbol{u}$ der Amplituden auf die Funktionswerte (Transformation aus dem Fourier-Raum in den Ortsraum) eine lineare Transformation ist, die durch eine Multiplikation mit der symmetrischen Matrix

$$\mathsf{G} = G_{jk} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kj2\pi/N} \tag{4.131}$$

erreicht wird. Diese Transformation kostet $O(N^2)$ Operationen (Multiplikationen). Entsprechend kann man auch die diskrete Fouriertransformation (4.126) als Multiplikation einer Matrix mit dem Vektor der Funktionswerte schreiben

$$\hat{\boldsymbol{u}} = \mathsf{F} \cdot \boldsymbol{u} \tag{4.132}$$

$\hat{u}_k$ N-periodisch in k (siehe (4.126)). Dies erklärt den nur formalen Unterschied zwischen (4.125) und (2.35).

[30] Beachte, daß der Summationsbereich in der Orthogonalitätsrelation keine Rolle spielt, solange

mit der Transformationsmatrix (vgl. (4.126))

$$\mathsf{F} = F_{km} = \frac{1}{N} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}km2\pi/N}. \tag{4.133}$$

Mit Hilfe der diskreten Orthogonalitätsrelation kann man zeigen, daß F die Inverse von G ist: $\mathsf{F} = \mathsf{G}^{-1}$. Denn es gilt[31]

$$\mathsf{G} \cdot \mathsf{F} = \frac{1}{N} \sum_{k=-K}^{K} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}kj/N} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}km/N} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}k(j-m)/N} = \delta_{j,m} = \mathsf{I}. \tag{4.134}$$

Schnelle Fourier-Transformation

Wie wir gesehen haben, kostet die Berechnung der Fourier-Transformierten $\hat{\boldsymbol{u}}$ aus den Funktionswerten $\boldsymbol{u}$ (bzw. umgekehrt) eine Anzahl von $O(N^2)$ Operationen (Matrix-Multiplikation), wenn man die normale Matrix-Vektor-Multiplikation verwendet. Die Anzahl der Operationen kann man reduzieren, wenn man anders vorgeht.

Bei der *schnellen Fouriertransformation* (FFT) wird die ursprüngliche Fouriertransformation für N Punkte sukzessive auf Fourier-Transformationen mit jeweils der halben Anzahl von Punkten zurückgeführt ($N \to N/2 \to N/4 \to ...$). Diese Aufspaltung wird solange fortgesetzt bis nur noch die triviale Fouriertransformation für einen einzigen Punkt übrig bleibt.[32]

Mit Hilfe der FFT kann man die Anzahl der erforderlichen Operationen auf $O(N \ln N)$ reduzieren. Bei großen Werten von N, sagen wir $N = 100$, ist die FFT damit um einen Faktor von $N/\ln N \approx 22$ schneller als die Matrix-Multiplikation.[33] In drei Dimensionen ergibt sich damit schon der beträchtliche Faktor $22^3 \approx 10^4$. Bei einer Anzahl von 10^6 Stützstellen in einer Dimension hat man eine Ersparnis um den Faktor $\approx 7 \times 10^4$.

Um die Vorteile der FFT zu nutzen, darf N keine Primzahl sein. Die größte Beschleunigung erhält man, wenn N eine Potenz von 2 ist: $N = 2^p$, $p \in \mathbb{N}$.[34] Dann kann man die diskrete Fourier-Transformation für N Stützstellen auf zwei diskrete Fourier-Transformationen mit jeweils $N/2$ Stützstellen zurückführen, wenn wir die Summe in zwei Teilsummen spalten, die sich nur über die geraden bzw. die ungeraden Indizes erstrecken. Wenn wir die Summation von 0 bis $N-1$ laufen

er über N zusammenhängende ganze Zahlen geht.

[31] Der Summationsindex kann verschoben werden, da die Matrizen in jedem Index periodisch sind mit Periode N.

[32] hk: Siehe auch Boyd (2000) (pdf file) für eine gute Einführung inkl. FFT für Chebyshev.

[33] Dies gilt nur im Prinzip. In der Praxis kommen noch andere Faktoren hinzu, vgl. Tab. 4.3.

[34] In (4.125) war N ungerade. Man kann aber auch N gerade wählen und die Summe in (4.125) von 1 bis N oder von 0 bis $N-1$ nehmen, vgl. Fußnote 29 auf S. 95.

lassen und den Faktor N^{-1} weglassen, erhalten wir aus (4.126)

$$\begin{aligned}\hat{u}_k &= \sum_{j=0}^{N-1} u_j \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k2\pi j/N} = \sum_{j=0}^{N/2-1} u_{2j}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k2\pi(2j)/N} + \sum_{j=0}^{N/2-1} u_{2j+1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k2\pi(2j+1)/N} \\ &= \underbrace{\sum_{j=0}^{N/2-1} u_{2j}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k2\pi j/(N/2)}}_{:=\hat{u}_k^{\text{even}}:=\hat{u}_k^{(0)},\ k=0,\ldots,N/2-1} + \underbrace{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k2\pi/N}}_{:=W^k} \underbrace{\sum_{j=0}^{N/2-1} u_{2j+1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k2\pi j/(N/2)}}_{:=\hat{u}_k^{\text{odd}}:=\hat{u}_k^{(1)},\ k=0,\ldots,N/2-1},\end{aligned} \tag{4.135}$$

mit $W := \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}/N}$.[35]

Man sieht, daß man die Fourier-Transformierte $\hat{u}_k$ als Summe darstellen kann, die aus den Fourier-Transformierten der Funktionswerte mit geraden Indizes und derjenigen mit ungeraden Indizes besteht. Beide Fourier-Transformationen haben dann jeweils die halbe Länge $N/2$. Dadurch haben wir schon eine Ersparnis: Die beiden Fourier-Transformationen der Länge $N/2$ kosten nur $2\times(N/2)^2 = 2\times N^2/4 = N^2/2$ Operationen. Hinzu kommen N Multiplikationen mit einem komplexen Exponentialfaktor und N Additionen (wenn man sie mitrechnen will); in Summe also

$$\frac{N^2}{2} + 2N < N^2, \quad \text{falls } N > 4. \tag{4.136}$$

Bei dieser Betrachtung haben wir ausgenutzt, daß wir die Produkte (in den Summen über j) nur für die halbe Anzahl $N/2$ der k-Werte bilden müssen, und nicht für alle k-Werte aus dem eigentlichen Bereich $[0, N-1]$. Denn die Summanden in den FTs der halben Länge $\hat{u}_k^{\text{odd}}$ und $\hat{u}_k^{\text{even}}$ sind periodisch in k mit der Periode $N/2$. Denn für festes j gilt

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k2\pi j/(N/2)} \overset{k\to k+N/2}{=} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k2\pi j/(N/2)} \underbrace{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi j}}_{=1}. \tag{4.137}$$

Wenn man dies beachtet, erhält man für $k = 0, 1, 2, ..., N/2-1$

$$\hat{u}_k = \hat{u}_k^{(0)} + W^k \hat{u}_k^{(1)}, \tag{4.138a}$$

$$\hat{u}_{k+N/2} = \hat{u}_k^{(0)} - W^k \hat{u}_k^{(1)}. \tag{4.138b}$$

Das Minuszeichen vor W^k in der zweiten Gleichung kommt von $W^{k+N/2} = \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}/N(k+N/2)} = \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}k/N}\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}} = -W^k$.

Wir können nun die Zerlegung weiterführen und die beiden Summen in (4.135) wieder in zwei Summen über die geraden und die ungeraden Indizes aufspalten. Als

[35] Beachte: $W^k = \left(\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}/N}\right)^k = \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}k/N}$.

Beispiel sei die zweite Unterteilung durchgeführt,

$$
\begin{aligned}
\hat{u}_k &\overset{(4.135)}{=} \underbrace{\sum_{j=0}^{N/4-1} u_{2(2j)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k2\pi(2j)/(N/2)} + \sum_{j=0}^{N/4-1} u_{2(2j+1)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k2\pi(2j+1)/(N/2)}}_{\hat{u}_k^{(0)}} \\
&\quad + W^k \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{N/4-1} u_{2(2j)+1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k2\pi(2j)/(N/2)} + \sum_{j=0}^{N/4-1} u_{2(2j+1)+1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k2\pi(2j+1)/(N/2)} \right)}_{\hat{u}_k^{(1)}} \\
&= \sum_{j=0}^{N/4-1} u_{2(2j)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k2\pi j/(N/4)} + \sum_{j=0}^{N/4-1} u_{2(2j+1)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(2j+1)\pi/(N/4)} \\
&\quad + W^k \left(\sum_{j=0}^{N/4-1} u_{2(2j)+1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k2j\pi/(N/4)} + \sum_{j=0}^{N/4-1} u_{2(2j+1)+1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(2j+1)\pi/(N/4)} \right) \\
&= \underbrace{\underbrace{\sum_{j=0}^{N/4-1} u_{2(2j)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k2\pi j/(N/4)}}_{=\hat{u}_k^{(00)},\ k=0,\dots,N/4-1} + W^{2k} \underbrace{\sum_{j=0}^{N/4-1} u_{2(2j+1)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k2j\pi/(N/4)}}_{=\hat{u}_k^{(01)},\ k=0,\dots,N/4-1}}_{\hat{u}_k^{(0)}} \\
&\quad + W^k \underbrace{\left(\underbrace{\sum_{j=0}^{N/4-1} u_{2(2j)+1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k2j\pi/(N/4)}}_{=\hat{u}_k^{(10)},\ k=0,\dots,N/4-1} + W^{2k} \underbrace{\sum_{j=0}^{N/4-1} u_{2(2j+1)+1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k2j\pi/(N/4)}}_{=\hat{u}_k^{(11)},\ k=0,\dots,N/4-1} \right)}_{\hat{u}_k^{(1)}} \\
&= \dots \qquad (4.139)
\end{aligned}
$$

Hierbei können die Exponentialfaktoren in den Summen ebenfalls als Potenzen von W ausgedrückt werden. Wenn $N = 2^q$ eine ganzzahlige Potenz von 2 ist, kann man diese Aufteilung bis zu dem Punkt durchführen, bei dem die Summe nur noch über einen einzigen Funktionswert zu bilden ist. Diese Prozedur ist anschaulich in Tab. 4.2 dargestellt. Bei jeder Zerlegung in gerade bzw. ungerade Terme erhält der zur Kennzeichnung hochgestellte Index die Ziffer 0 (gerade) oder 1 (ungerade) angehängt. Bei $N = 8$ muß man die Fouriertransformation drei mal ($= \log_2(8)$) in gerade und ungerade Beiträge zerlegen. In der Tabelle ist die jeweilige Zuordnung jedes einzelnen Summanden entweder zu den geraden oder ungeraden Punkten der jeweiligen Transformation dargestellt. Wenn man auf dem niedrigsten Niveau angekommen ist, besteht die Fourier-Transformation nur noch aus einem einzigen Punkt. Wenn man die Kodierung (den hochgestellten Index) der resultierenden 1-Punkt-FFTs bitweise invertiert (*Bit-Inversion*), erhält man gerade die Binär-Darstellung

Tabelle 4.2.: Zuordnung der Werte an den Gitterpunkten j zu den einzelnen FFTs bei sukzessiver Halbierung der Punktzahl der FFTs. Eine 0 steht für gerade Punkte und eine 1 für ungerade Punkte. Bei jeder Aufteilung in zwei Fouriertransformationen für die geraden und die ungeraden Punkte, aber der halben Länge, wird dem Index (Bezeichnung der FFT) eine 0 (gerade) oder eine 1 (ungerade) angehängt, je nachdem, ob es sich bei der neuen Anordnung um eine gerade oder eine ungerade Position in der momentanen Fourierreihe handelt.

Gitterpunkt j	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
	0	1	0	1	0	1	0	1
FFT-Zuordnung	00	10	01	11	00	10	01	11
	000	100	010	110	001	101	011	111
Bit-Inversion	**000**	**001**	**010**	**011**	**100**	**101**	**110**	**111**

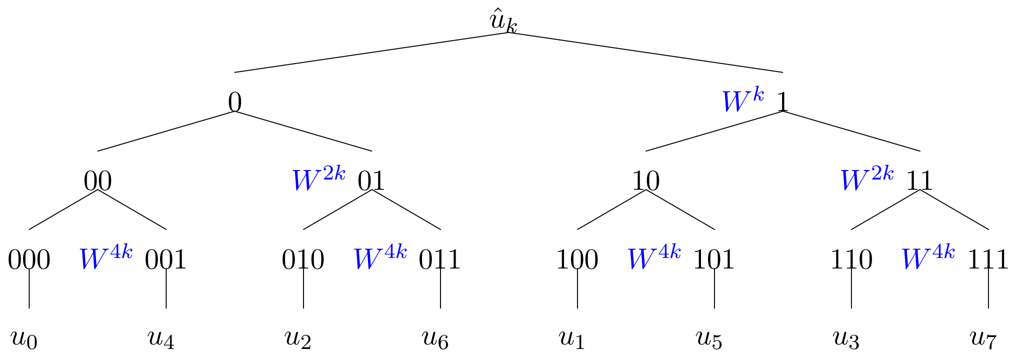

Abbildung 4.15.: Baumdiagramm der Aufspaltung einer FFT für $N = 8$. Auf jeder Stufe muß man eine gewichtete Summe über die beiden Terme nehmen, die von der Stelle verzweigen. Die Anzahl der k-Werte, für die man das machen muß, halbiert sich aber mit jeder Stufe. Die Ausgangsreihenfolge ergibt sich durch die Binärinversion des Gitterindex.

des Gitter-Index j des jeweiligen Funktionswertes. Der FFT-Algorithmus besteht dann in einer sukzessiven gewichteten Addition der im Baumdiagramm Abb. 4.15 benachbarten Werte.[36]

In rekursiver Form kann man den Algorithmus (nach A. Bekele) wie folgt darstellen:

`procedure` FFT(A)

Input: An array of complex values which has a size of 2^m for $m \geq 0$
Output: An array of complex values which is the DFT of the input

[36]Die immer wiederkehrenden Operationen können auch durch das sogenannte *Butterfly*-Diagramm symbolisiert werden.

```
N := A.length
  if N = 1
    return A
  else
    W_N := e^{2πi/N}
    W := 1
    A_even := (A_0, A_2, ...., A_{N-2})
    A_odd := (A_1, A_3, ...., A_{N-1})
    Y_even := FFT(A_even)
    Y_odd := FFT(A_odd)
    for j := 0 to N/2 - 1
      Y[j] = Y_even[j] + W * Y_odd[j]
      Y[j + N/2] = Y_even[j] - W * Y_odd[j]
      W := W * W_N
    end
    return Y
  end
```

Um den numerischen Aufwand abzuschätzen, beachten wir, daß wir in jedem Schritt N Werte berechnen müssen, zum Beispiel

$$W_{00}\hat{u}_k^{(00)} + W_{01}\hat{u}_k^{(01)} + W_{10}\hat{u}_k^{(10)} + W_{11}\hat{u}_k^{(11)} \tag{4.140}$$

Dazu benötigt man bei *jeder* Unterteilung $O(N)$ Operationen, denn die Anzahl der Summanden erhöht sich zwar mit der Tiefe der Unterteilung, aber in demselben Maße nimmt die Zahl der Werte k, für welche man die Summen berechnen muß, ab (wegen der Periodizität des Ausdrucks). In dem Beispiel haben wir $O(4)$ Summanden, die wiederum aus Summen bestehen, die aber nur für $N/4$ k-Werte berechnet werden müssen. Da wir $\log_2 N$ Unterteilungen haben, beträgt der Gesamtaufwand zur Berechnung von $\hat{u}_k$ nur *$O(N \log_2 N)$ Operationen*. Dies muß mit den $O(N^2)$ Operationen für die DFT verglichen werden.

4.6.2. Chebyshev Polynome

Definition und allgemeine Eigenschaften

Zur Beschreibung von Problemen mit periodischen Randbedingungen sind Fouriermoden am besten geeignet. In der Strömungsmechanik treten aber oft nichtperiodische Randbedingungen auf, wenn man zum Beispiel an die Strömung in einem Kanal denkt. In transversaler Richtung (senkrecht zur Hauptströmunsgrichtung) müssen wir die Variablen auf einem endlichen Intervall beschreiben, wobei in