

2. Finite Differenzen und einige generelle Betrachtungen

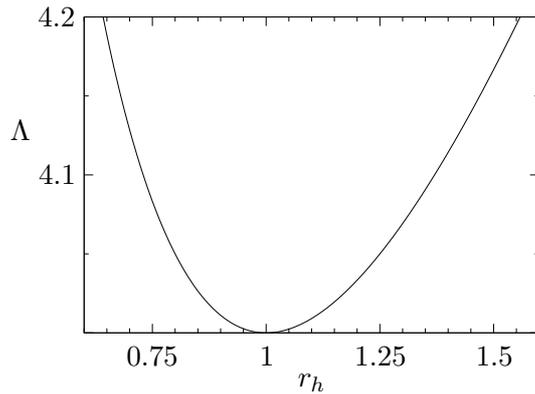


Abbildung 2.8.: Verhältnis Λ des Fehlers auf einem groben zu demjenigen auf einem feinen Gitter bei Verdopplung der Gitterpunkte und räumlich konstantem Streckungsfaktor r_h .

ab. In der Praxis sollte der Streckungsfaktor aber nicht außerhalb des Bereichs $0.85 \lesssim r \lesssim 1.2$ liegen.

2.4.3. Spektrale Betrachtung von Diskretisierungsfehlern

In vielen strömungsmechanischen Problemen treten Wellen auf. Es ist nun instruktiv zu sehen, welche Diskretisierungsfehler hierbei entstehen. Dazu sei zunächst die *Fourier-Darstellung* einer periodischen Funktion rekapituliert.

Diskrete Fourier-Transformation

Für eine *kontinuierliche* periodische Funktion $g(x)$ mit *Periode* 2π lautet sie

$$g(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{g}_m e^{imx}, \quad (2.33)$$

mit $m \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$ und $\hat{g}_m \in \mathbb{C}$.⁹ Die *Amplituden* der spektralen Komponenten lauten¹⁰

$$\hat{g}_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x) e^{-imx} dx. \quad (2.34)$$

In der Numerik hat man meist keine kontinuierlichen Funktionen. Die Funktion ist nur diskret auf den Stützstellen eines Gitters vorgegeben. Bei der *diskreten* Darstellung der 2π -periodischen Funktion auf einem Gitter mit $\Delta x = 2\pi/J$ kann man die diskrete Funktion $g_j = g(x_j = j\Delta x = 2\pi j/J)$ als *diskrete Fourier-Reihe*

⁹Für reelle Funktionen $g(x) \in \mathbb{R}$ muß man fordern $\hat{g}_{-m} = \hat{g}_m^*$.

¹⁰Probe durch Einsetzen:

$$\hat{g}_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{g}_k e^{ikx} e^{-imx} dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{g}_k \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k-m)x} dx}_{=\delta_{km}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{g}_k \delta_{km} = \hat{g}_m.$$

darstellen (siehe auch Kap. 4.6.1)

$$g_j = \sum_{m=0}^{J-1} \hat{g}_m e^{im \overbrace{j\Delta x}^{x_j}} = \sum_{m=0}^{J-1} \hat{g}_m e^{i2\pi m j/J}. \quad (2.35)$$

Man kann leicht nachprüfen, daß die Fourier-Amplituden \hat{g}_m dann durch

$$\hat{g}_m = \frac{1}{J} \sum_{j=0}^{J-1} g_j e^{-im \overbrace{j\Delta x}^{x_j}} = \frac{1}{J} \sum_{j=0}^{J-1} g_j e^{-i2\pi m j/J} \quad (2.36)$$

gegeben sind.¹¹

Beachte, daß sowohl die Funktionswerte g_j im Ortsraum, wie auch die spektralen Komponenten \hat{g}_m periodisch sind mit Periode J . Für die periodische Funktion im Ortsraum ist das klar. Für die spektralen Komponenten gilt dies auch. Denn für $m \rightarrow m + nJ$, $n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\hat{g}_{m+nJ} = \frac{1}{J} \sum_{j=0}^{J-1} g_j e^{-i2\pi(m+nJ)j/J} = \frac{1}{J} \sum_{j=0}^{J-1} g_j e^{-i2\pi m j/J} \underbrace{e^{-i2\pi n j}}_{=1} = \hat{g}_m. \quad (2.37)$$

Darüber hinaus kann man den Index in (2.35) und (2.36) beliebig um $n \in \mathbb{Z}$ verschieben.¹² Insbesondere kann man ihn auch symmetrisch wählen, von $j = -J/2$

¹¹Die Probe ergibt

$$\begin{aligned} \hat{g}_m &= \frac{1}{J} \sum_{j=0}^{J-1} \left(\sum_{k=0}^{J-1} \hat{g}_k e^{ikj\Delta x} \right) e^{-imj\Delta x} = \frac{1}{J} \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{J-1} \hat{g}_k e^{i(k-m)j\Delta x} \\ &= \frac{1}{J} \sum_{k=0}^{J-1} \hat{g}_k \underbrace{\sum_{j=0}^{J-1} e^{i(k-m)j\Delta x}}_{=J\delta_{km}} = J \frac{1}{J} \underbrace{\sum_{k=0}^{J-1} \hat{g}_k \delta_{km}}_{=\hat{g}_m} = \hat{g}_m. \end{aligned}$$

Hierbei wurde beachtet, daß für $n \neq 0$ die Summe $\sum_{j=0}^{J-1} e^{inj\Delta x} = 0$ ist, da die J komplexen Zeiger $e^{inj\Delta x} = e^{in j 2\pi/J}$ den Einheitskreis (oder ein ganzzahliges Vielfaches davon) äquidistant abdecken.

¹²Für die periodische Funktion g_j ist das klar. Man kann aber auch den Index der Fouriertransformierten um ein beliebiges $n \in \mathbb{Z}$ verschieben, denn es gilt aufgrund der Periodizität von g_j

$$\begin{aligned} \hat{g}_m &= \frac{1}{J} \sum_{j=0}^{J-1} g_j e^{-i2\pi m j/J} = \frac{1}{J} \sum_{j=0}^{n-1} g_j e^{-i2\pi m j/J} + \frac{1}{J} \sum_{j=n}^{J-1} g_j e^{-i2\pi m j/J} \\ &= \frac{1}{J} \sum_{j=0}^{n-1} g(J+j) e^{-i2\pi m j/J} + \frac{1}{J} \sum_{j=n}^{J-1} g_j e^{-i2\pi m j/J} \\ &= \frac{1}{J} \sum_{j=0}^{n-1} g(J+j) e^{-i2\pi m(j+J)/J} + \frac{1}{J} \sum_{j=n}^{J-1} g_j e^{-i2\pi m j/J} \end{aligned}$$

2. Finite Differenzen und einige generelle Betrachtungen

bis $J/2 - 1$.

Eine Index-Verschiebung im Ortsraum um n liefert im spektralen Raum eine Phasenverschiebung der Amplituden \hat{g}_m um $e^{i2\pi mn/J}$, denn es gilt

$$\begin{aligned}\hat{g}_m &= \frac{1}{J} \sum_{j=0}^{J-1} g_{j+n} e^{-i2\pi mj/J} = e^{i2\pi mn/J} \frac{1}{J} \sum_{j=0}^{J-1} g_{j+n} e^{-i2\pi m(j+n)/J} \\ &= e^{i2\pi mn/J} \frac{1}{J} \sum_{j=n}^{n+J-1} g_n e^{-i2\pi mn/J} \stackrel{\text{Fußnote 12}}{=} e^{i2\pi mn/J} \frac{1}{J} \sum_{j=0}^{J-1} g_n e^{-i2\pi mn/J}.\end{aligned}\quad (2.38)$$

Falls die Funktionswerte $g_j \in \mathbb{R}$ reell sind, hat man J reelle Daten. Die Fouriertransformation liefert aber formal $2J$ Daten, weil die spektralen Komponenten $\hat{g}_m \in \mathbb{C}$ komplex sind. Daher muß die Information in \hat{g}_m redundant sein. In der Tat gilt für reelle Funktion

$$\hat{g}_{J-m} = \hat{g}_m^*, \quad (2.39)$$

Dies sieht man, wenn man beachtet

$$\hat{g}_{J-m} = \frac{1}{J} \sum_{j=0}^{J-1} g_j e^{-i2\pi(J-m)j/J} = \frac{1}{J} \sum_{j=0}^{J-1} g_j e^{i2\pi mj/J} \underbrace{e^{i2\pi Jj/J}}_{=1} = \hat{g}_m^*. \quad (2.40)$$

Für reelle Funktionen $g_j \in \mathbb{R}$ ist die Amplitude des konstanten Anteils $\hat{g}_0 \in \mathbb{R}$ auch reell. Bei einer geraden Anzahl J von Stützstellen ist außerdem die Nyquist-Amplitude (s.u.) $\hat{g}_{J/2} \in \mathbb{R}$ wegen (2.39) ebenfalls reell.¹³

Fehler bei der Finite-Differenzen-Approximation einer periodischen Funktion

Auf dem diskreten Gitter können keine Wellenlängen wiedergegeben werden, die kleiner sind als die *cut-off-Wellenlänge* $\lambda_c = 2\Delta x$. Die *cut-off-Wellenlänge* wird auch *Nyquist-Wellenlänge* $\lambda_{\text{Nyquist}} = \lambda_c$ genannt. Ihr entspricht die *Nyquist-Wellenzahl*

$$k_{\text{Nyquist}} = \frac{\pi}{\Delta x} \triangleq \frac{J}{2}. \quad (2.41)$$

In diesem Sinne muß jede diskrete Approximation einer kontinuierlichen Funktionen als eine *langwellige Approximation* verstanden werden. Je kürzer die Wellenlänge ist, desto schlechter werden die entsprechenden Amplituden durch die diskrete Approximation wiedergegeben. Um dies zu quantifizieren, betrachten wir die Welle

$$T(x, t) = \cos[k(x - ct)], \quad (2.42)$$

$$= \frac{1}{J} \sum_{j=J}^{J+n-1} g(j) e^{-i2\pi mj/J} + \frac{1}{J} \sum_{j=n}^{J-1} g_j e^{-i2\pi mj/J} = \sum_{j=n}^{n+J-1} g_j e^{-i2\pi mj/J}.$$

¹³Für gerades J hat man dann die reellen Amplituden \hat{g}_0 und $\hat{g}_{J/2}$ sowie die $J/2 - 1$ nicht-