Übungsblatt 01

http://www.fluid.tuwien.ac.at/302.043

Wiederholung: Vektoralgebra, Nabla-Operator, Integralsätze.

Im Folgenden stehen normal gedruckte Buchstaben $\rho(\mathbf{x})$ für skalare Funktion die den $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}$ abbilden (z.B. $\rho(\mathbf{x})$ lokale Dichte eines Fluids), fett gedruckte Kleinbuchstaben $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ für vektorielle Funktionen die den $\mathbb{R}^3$ in den $\mathbb{R}^3$ abbilden (z. B. $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ das Geschwindigkeitsfeld einer Strömung) und fett gedruckte Großbuchstaben $\mathbf{\Sigma}(\mathbf{x})$, für Funktionen die den $\mathbb{R}^3$ in den $\mathbb{R}^{3\times 3}$ abbilden (z. B. $\mathbf{\Sigma}(\mathbf{x})$ den lokalen Spannungstensor). Im Folgenden ziehen wir nur karthesische Koordinatensysteme $\mathbf{x} = (x, y, z)^T = x\,\mathbf{e}_x + y\,\mathbf{e}_y + z\,\mathbf{e}_z$ in Betracht ($\mathbf{e}_x$ ist der Einheitsvektor in Richtung x).

Einsteinsche Summenkonvention, Indizierte Größen

Beispiele für indizierte Größen:

$$\delta_{ij},\ \epsilon_{ijk},\ a_i,\ a_i b_j,\ \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \tag{1}$$

Tritt ein Index in einer indizierten Größe doppelt auf so wird über diesen summiert (*Einsteinsche* Summenkonvention):

$$a_i a_i \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{3} a_i a_i\,; \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_j}{\partial x_j}\,; \quad \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk}\,. \tag{2}$$

Die Summation über doppelte Indizes wird bei der Auswertung des Ausdrucks immer vor etwaigen Multiplikationen durchgeführt, so z.B. $a_i b_j c_i = b_j \left(\sum_i a_i c_i\right)$. Der große Vorteil der Einsteinschen Schreibweise ist die formale Kommutativität. So bedeutet $a_i b_j c_j d_k$ dasselbe wie $b_j c_j a_i d_k$, wie $b_j a_i c_j d_k$, usw... .
Ausnahme hiervon ist natürlich die Differenzation. Es werden nur Größen rechts vom Differentialoperator differenziert. Also $a_i \partial_j b_k \neq b_k \partial_j a_i$, aber $a_i b_j \partial_k c_l = b_j a_i \partial_k c_l$.

Das *Kronecker*-Delta $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ ist definiert als

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}. \tag{3}$$

Das *Levi-Civita*-Symbol (Permutationssymbol) ist definiert als

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{falls } (i,j,k) \text{ eine gerade Permutation von } (1,2,3) \text{ ist} \\ -1 & \text{falls } (i,j,k) \text{ eine ungerade Permuation von } (1,2,3) \text{ ist} \\ 0 & \text{falls } (i=j) \text{ oder } (i=k) \text{ oder } (j=k) \end{cases} . \tag{4}$$

Einige Rechenregeln für das Permutationssymbol und das Kronecker-Delta:

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}\,; \quad \delta_{ii} = \sum_{i=1}^{3} \delta_{ii} = 3\,; \quad \delta_{ik}\delta_{kj} = \delta_{ij} \tag{5}$$

$$\delta_{ij} a_j = a_i\,; \quad \delta_{ij} a_i b_j = a_i b_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \tag{6}$$

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki} = \epsilon_{kij} = -\epsilon_{ikj} = -\epsilon_{kji} = -\epsilon_{jik} \tag{7}$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{li} & \delta_{lj} & \delta_{lk} \\ \delta_{mi} & \delta_{mj} & \delta_{mk} \\ \delta_{ni} & \delta_{nj} & \delta_{nk} \end{vmatrix} \tag{8}$$

$$\epsilon_{ijk} a_i b_j c_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \tag{9}$$

Vektorprodukte

Dyadisches Produkt:

$$\mathbf{ab} = a_i b_j = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix} = C_{ij} = \mathbf{C} \tag{10}$$

Skalarprodukt:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = a_i b_i = \delta_{ij} a_i a_j \tag{11}$$

Vektorprodukt:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \mathbf{e_i} a_j b_k = \epsilon_{ijk} \mathbf{e_i} a_j b_k \tag{12}$$

$$c_i = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} a_j b_k = \epsilon_{ijk} a_j b_k \tag{13}$$

∇ Nablaoperator

Durch den Nablaoperator ∇

$$\nabla \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)^T = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \mathbf{e}_i \partial_i = \partial_i \,, \quad (14)$$

der als formaler Spaltenvektor aufgefasst werden kann, lassen sich häufig gebrauchte mathematische Operation kompakt darstellen,
zum Beispiele die Rotation einer vektoriellen Funktion $\mathbf{u}(\mathbf{x})$

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{u} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)^T \times (u, v, w)^T = \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \partial_j u_k \,, \quad (15)$$

der Gradient einer skalaren Funktion $\rho(\mathbf{x})$

$$\operatorname{grad} \rho = \nabla \rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}, \frac{\partial \rho}{\partial y}, \frac{\partial \rho}{\partial z}\right)^T = \mathbf{e}_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \rho}{\partial z} = \mathbf{e}_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \,, \quad (16)$$

die Divergenz einer vektoriellen Funktion $\mathbf{u}(\mathbf{x})$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)^T \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \,, \quad (17)$$

sowie die Divergenz eines Tensors $\mathbf{A}(\mathbf{x})$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \left(\nabla^T * \mathbf{A}\right)^T = \partial_i A_{ij} \;; \quad * \cong \text{Matrizenmul.}. \quad (18)$$

Die Operation $\nabla \cdot \mathbf{A}$ wird manchmal als Skalare Multiplikation von links bezeichnet, da man Sie formal als 3-malige skalare Multiplation der Spaltenvektoren von $\mathbf{A}$ mit ∇ auffassen kann ($\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot (A_{i1}, A_{i2}, A_{i3}) = (\nabla \cdot A_{i1}, \nabla \cdot A_{i2}, \nabla \cdot A_{i3})^T$).
Oft wird auch der Ausdruck

$$\nabla \mathbf{u} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)^T \mathbf{u} = \partial_i u_j = (\partial_j u_i)^T = \mathbf{J}_{ij} \quad (19)$$

verwendet, welcher einfach die Transponierte, der Jacobimatrix, der vektoriellen Funktion u ist.

Linearkombinationen von beliebigen Funktionen f_a, f_b (vektoriell oder skalar) werden formal ausmultipliziert ($\alpha, \beta = \text{const}$):

$$\nabla (\alpha f_a + \beta f_b) = \alpha \nabla f_a + \beta \nabla f_b \quad (20)$$

Für Produkte (beliebige, z.B. skalare Multiplikation, Skalarprodukt, Vektorprodukt, Matrizenmultiplikation) gilt die Kettenregel

$$\nabla\left(f_a f_b\right)=\nabla\left(\overline{f_a} f_b\right)+\nabla\left(f_a \overline{f_b}\right) . \tag{21}$$

Funktionen, die zu differenzieren sind, werden überstrichen ($\overline{f_a}, \overline{f_b}$). Danach formt man (hoffentlich richtig) solange um, bis die überstrichenen Funktionen rechts vom Operator stehen und alle nicht überstrichenen links vom Operator. Die Überstriche können dann wieder entfernt werden.
Oft ist es leichter bei Umformungen den Umweg über die Einsteinsche Indexschreibweise zu gehen.

$$\begin{array}{llll}\nabla\cdot(\rho\mathbf{u}\mathbf{u}) = & (\nabla\cdot\rho\mathbf{u})\,\mathbf{u} & = (\nabla\cdot\overline{\rho\mathbf{u}})\,\mathbf{u} + (\nabla\cdot\rho\mathbf{u})\,\overline{\mathbf{u}} & = \mathbf{u}\,(\nabla\cdot\rho\mathbf{u}) + (\rho\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u} \\ \nabla\cdot(\rho\mathbf{u}\mathbf{u}) = & \partial_i\rho u_i u_j = & u_j\partial_i\rho u_i + \rho u_i\partial_i u_j & = \mathbf{u}\,(\nabla\cdot\rho\mathbf{u}) + (\rho\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}\end{array} \tag{22}$$

Gaußscher Integralsatz

Sei V ein kompaktes Volumen, ∂V sei die abgeschlossene Hülle von V, ∂V sei abschnittsweise Glatt, $\mathbf{n}$ sei der nach aussen zeigende Einheitsvektor senkrecht auf ∂V und $\mathbf{u}$ sei eine auf ganz V stetig differenzierbare, vektorielle Funktion, dann gilt der gaußsche Integralsatz

$$\begin{array}{lllll}\int_V \partial_i u_i dV & = & \int_{\partial V} u_i n_i dA & = & \int_{\partial V} u_i dA_i \\ \int_V \nabla\cdot\mathbf{u} dV & = & \int_{\partial V}\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} dA & = & \int_{\partial V}\mathbf{u}\cdot d\mathbf{A}\ .\end{array} \tag{23}$$

Vertauschung von Integration und Grenzübergang

Sei $f(x,t)$ eine Funktion von der Zeit t und des Ortes x und $F(x,t)$ die Stammfunktion von f bezüglich x. Will man die zeitliche Ableitung des Integrals $\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx$ bilden kann man das Theorem von Leibniz anwenden

$$\begin{array}{lll}\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx & = & \frac{d}{dt}\left(F(b(t),t)-F(a(t),t)\right) \\ & = & \frac{\partial F(b,t)}{\partial t}+\frac{\partial F(b,t)}{\partial x}\frac{db}{dt}-\frac{\partial F(a,t)}{\partial t}-\frac{\partial F(a,t)}{\partial x}\frac{da}{dt} \\ \frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx & = & \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}dx + f(b,t)\frac{db}{dt} - f(a,t)\frac{da}{dt}\ ,\end{array} \tag{24}$$

analog gilt in 3-D ($\mathbf{u}_{\partial V}$ ist die Geschwindigkeit der Hülle des Volumens V)

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} f(\mathbf{x},t)dV = \int_{V(t)}\frac{\partial f(\mathbf{x},t)}{\partial t}dV + \int_{\partial V(t)} f(\mathbf{x},t)\,\mathbf{u}_{\partial V}\cdot dA \tag{25}$$

1. Aufgabe:

Gegeben seien die Vektorfunktionen $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ und die skalare Funktion $\rho(\mathbf{x})$.

1. Zeigen Sie unter Verwendung von Gleichung (8) die Gültigkeit folgender Gleichung
$$\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \ . \tag{26}$$

2. Zeigen Sie, daß folgende Ausdrücke gelten
   (a) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) = 0$,
   (b) $\nabla \times (\nabla\rho) = 0$.

3. Zeigen Sie, dass
$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}\mathbf{u}) = \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) , \tag{27}$$
oder anderst geschrieben
$$\frac{\partial \rho u_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\rho u_i u_j = \rho \left(\frac{\partial u_j}{\partial t} + u_i \frac{\partial}{\partial x_i} u_j \right) , \tag{28}$$
gilt unter der Vorrausstetzung
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} = 0 \, , \tag{29}$$
bzw.
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\rho u_i = 0 \, . \tag{30}$$
Hinweis: Multiplizieren Sie (24) mit $\mathbf{u}$, bzw. (25) mit u_j.

2. Aufgabe:

Gegeben sei das Vektorfeld $\mathbf{u} = (zx, zy, z^2)^T$ und das zylinderförmige Volumen $V = \{(x,y,z)| - R \leq x \leq R$ und $-\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}$ und $0 \leq z \leq z_0\}$

1. Skizzieren Sie das Vektorfeld $\mathbf{u} = (zx, zy, z^2)^T$.

2. Berechnen Sie das Volumenintegral $\int_V (\nabla \cdot \mathbf{u})\,\mathrm{d}v$, für das Volumen V direkt und mit Hilfe des Gaußschen Satzes
$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{u})\,\mathrm{d}v = \int_F \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}f = \int_F \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{f} \, . \tag{31}$$
Hierin ist $F = \partial V$ die Hülle des Volumen V und $\mathbf{n}$ der aus dem Volumen herauszeigende Einheitsvektor.
(Hinweis: In Zylinderkoordinaten $(r\cos\phi, r\sin\phi, z)^T$ wird vieles leichter).